

2016 年 2 月 11 日実施

2016 年度立命館大学大学院理工学研究科
博士課程前期課程
入学試験問題（専門科目）

基礎理工学専攻（数理科学コース）

【注意事項】

- (1) 解答は問題番号 1, 2, …ごとに解答用紙 1 枚を使用して下さい。
- (2) 受験番号、氏名、志望コース、問題番号等の必要事項を解答用紙すべてに記入して下さい。
- (3) 無記名答案は無効です。また、問題用紙および解答用紙の持ち帰りは認めていません。
- (4) 解答用紙はホッチキス止めしてあるので、はずさないで下さい。
- (5) 専門科目
問題用紙が志望専攻・志望コースの問題であることを確認し、下記の問題を解答して下さい。

基礎理工学専攻（数理科学コース）：次の 1～3 のすべてに解答すること（3 問必答）。

1. 微分・積分学
2. 線形代数学
3. 集合論・位相空間論

(6) 専門科目試験時間

基礎理工学専攻数理科学コース・機械システム専攻

13:00～15:00（120分）試験時間中の途中退室は認めていません。

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

〔専門科目〕 基礎理工学専攻・数理科学コース

1. 微分・積分学

m を 1 以上の自然数とし、多項式 P に対し

$$A(P, m) := \int_0^1 P(x) \sin(2\pi mx) dx, \quad B(P, m) := \int_0^1 P(x) \cos(2\pi mx) dx$$

とおく.

- (1) $k \geq 1$ について $A(x^k, m)$, $B(x^k, m)$ を $A(x^{k-1}, m)$, $B(x^{k-1}, m)$ を用いて表せ.
- (2) $B(x^2(x-1)^2, m)$ を求めよ.
- (3) 1 以上のある整数 l, n とある多項式 Q について

$$P(x) = Q(x)x^l(x-1)^n = \sum_{k=l}^N \alpha_k x^k \quad (N = \deg Q + l + n)$$

を満たす多項式 P に対し,

$$B(P', m) = 2\pi m A(P, m)$$

なることを示せ.

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

〔専門科目〕 基礎理工学専攻・数理科学コース

2. 線形代数学

A を n 次実対称行列とする. $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}$ 係数の $n \times 1$ 型行列と同一視して, $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を次により定義する:

$$f_A(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積である. つまり,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

N_A を f_A による $\{0\}$ の逆像とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $n = 3$ とし, A を次で定めるとき, A の固有値および N_A を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) $n = 4$ とし, A を次で定めるとき, A の固有値および N_A を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) λ, μ を A の異なる固有値として, x, y をそれぞれの固有ベクトルとすると, $f_A(x+y) = f_A(x) + f_A(y)$ が成り立つことを示せ.
- (4) N_A が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるための必要十分条件は, A の固有値が全て 0 以上, または全て 0 以下であることを示せ.

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

〔専門科目〕 基礎理工学専攻・数理科学コース

3. 集合論・位相空間論

1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 f を $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) と定めるとき, $\mathbb{R}$ の空でない開集合 U で, その f による像 $f(U)$ も $\mathbb{R}$ の開集合であるような U の例を与えよ. また $f(U)$ が $\mathbb{R}$ の開集合とならないような開集合 U の例を与えよ.
- (2) f による $\mathbb{R}$ の像 $f(\mathbb{R})$ に $\mathbb{R}$ の相対位相を入れたとき, $\mathbb{R}$ のある閉集合 A の像 $f(A)$ が $f(\mathbb{R})$ の閉集合にはならないような関数 f と閉集合 A の例を与えよ.
- (3) $\mathbb{R}$ の部分集合 E および $f(E)$ に, それぞれ $\mathbb{R}$ の相対位相を入れたとき, f が以下の条件 (P) をみたすならば, E の任意の閉集合 A の像 $f(A)$ は $f(E)$ の閉集合になることを示せ.
(P) : $f(E)$ における任意のコンパクト集合 K の f による逆像 $f^{-1}(K)$ が E でコンパクトである.