2016年8月25日実施

２０１７年度立命館大学大学院理工学研究科
博士課程前期課程
入学試験問題（専門科目）

基礎理工学専攻（物理科学コース）

【注意事項】

（１）解答は問題番号１．２．…ごとに解答用紙１枚を使用して下さい。
（２）受験番号、氏名、志望コース、問題番号等の必要事項を解答用紙すべてに記入して下さい。
（３）無記名答案は無効です。また、問題用紙および解答用紙の持ち帰りは認めていません。
（４）解答用紙はホッチキス止めしてあるので、はずさないで下さい。
（５）専門科目
問題用紙が志望専攻・志望コースの問題であるかを確認し、下記の問題を解答して下さい。

基礎理工学専攻（物理科学コース）：次の１～４のすべてに解答すること（４問必答）。
１．電磁気学
２．量子力学
３．力学
４．統計熱力学

（６）専門科目試験時間
基礎理工学専攻物理科学コース・電子システム専攻・環境都市専攻
１３：００～１６：００（１８０分）試験時間中の途中退室は認めていません。

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

［専門科目］基礎理工学専攻・物理科学コース

1．電磁気学

図１のように，真空（透磁率μ_0）中に常磁性体球（半径 a，一定の透磁率μ_1）がある。時間変化しない一様な大きさ H_0 の外部磁場（z軸正方向）があるとき，常磁性体球の内外の磁場を考える。必要ならば極座標表示$\vec{r}=\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$を用いて，以下の設問に答えよ。

（１）一様な外部磁場により常磁性体球は一様に分極（磁化）する。その磁気分極（磁化）の大きさを M とすると，大きさ$\dfrac{M}{3\mu_0}$の反磁場が作られる。磁気分極（磁化）の大きさ M を用いて，常磁性体球の内部の磁場の x, y, z 各成分を求めよ。

（２）常磁性体球の外部では，一様に分極（磁化）した常磁性体球は磁気双極子と考えて良い。磁気双極子の大きさは磁気分極（磁化）と体積の積で表せる。また，磁気双極子 $\vec{m}$ の作る磁場は $\vec{H}(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\mu_0}\left[\dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\dfrac{\vec{m}}{r^3}\right]$と表される。これらより，磁気分極（磁化）の大きさ M を用いて，常磁性体球の外部の磁場の x, y, z 各成分を求めよ。

（３）（１）と（２）より，常磁性体球の球面上で常磁性体球内外の磁場の接線成分が等しいことを示せ。

（４）常磁性体球の球面上で磁束密度の法線成分が等しくなることから，磁気分極（磁化）の大きさ M が求まる。μ_0，μ_1，H_0 を用いて，常磁性体球の内部の磁場の x, y, z 各成分を求めよ。また，常磁性体球の透磁率μ_1が非常に大きい場合，常磁性体球内部の磁場の特徴を簡潔に答えよ。

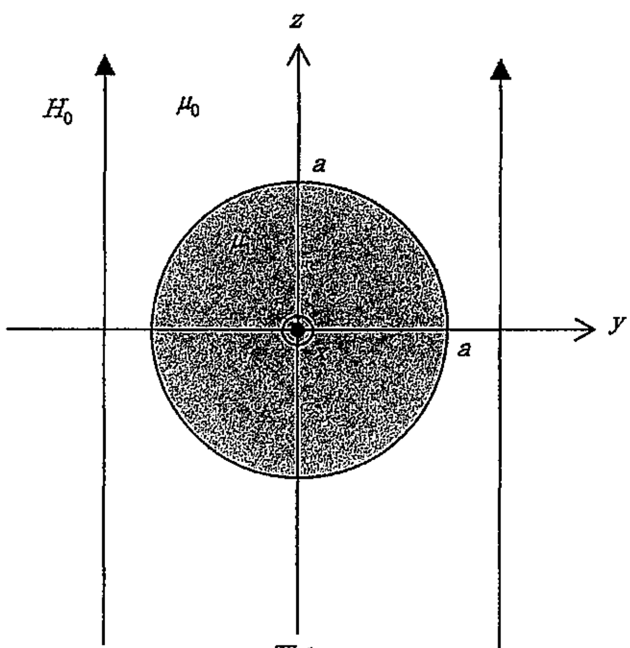

図１

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

［専門科目］基礎理工学専攻・物理科学コース

2．量子力学

一次元的に原子が並んだ結晶中の電子の運動について考えよう。原子は x 軸上の $0 \le x \le L$ の範囲に周期 a で規則正しく並んでいるとする。ただし、a は微視的な長さなのに対して、L は巨視的な長さで、L は a の整数倍だとする。今、電子は原子核から

$$V(x) = V_0 + W \cos \frac{2\pi x}{a}$$

という周期的な有効ポテンシャルを受けるとする。ここで、V_0 と W は定数である。また、電子の波動関数 $\varphi(x)$ には次の境界条件を課す。

$$\varphi(0) = \varphi(L) \qquad かつ \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)_{x=L}$$

(1) $W = 0$ として、次の問に答えよ。

(a) 電子の固有状態と固有エネルギーを全て求めよ。

(b) 電子がスピン $\frac{1}{2}$ をもつフェルミ粒子であることを用いて、絶対零度において 1 電子が持つ波数の大きさの最大値 k_{F} (フェルミ波数) とエネルギーの最大値 E_{F} (フェルミエネルギー) を求めよ。ただし、一原子あたり n_1 個の電子がある、つまり全系の電子数は $n_1 L/a$ 個であるとする。また、電子同士の相互作用は無視する。

(2) 原子数 L/a が十分大きければ、上で求めた固有エネルギーは V_0 以上の範囲で連続的に分布しているとみることができる。しかし、$W \neq 0$ の場合は、電子の固有エネルギーの分布に飛びが生じる。このことを、W が正でかつ十分小さい場合について確かめよう。なお、W が十分小さいことから、波動関数はいくつかの平面波の重ね合わせで近似できる。

(a) まず、近似的に次のように表される波動関数を考えよう。

$$\varphi(x) = c\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{\pi}{a}x} + d\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-i\frac{\pi}{a}x}$$

これをハミルトニアンの固有値方程式に代入し、左から $\frac{1}{\sqrt{L}}e^{\pm i\frac{\pi}{a}x}$ をかけて $0 \le x \le L$ で積分することで係数 c および d に対する連立方程式を求め、固有状態と固有エネルギーを求めよ。さらに、2 つの固有状態のエネルギー差はいくらか。

(b) 今度は、近似的に次のように表される波動関数を考えよう。なお、前問は $k = \pi/a$ の場合に対応する。

$$\varphi_k(x) = c_k\frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikx} + d_k\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i(k-\frac{2\pi}{a})x} \quad (0 \le k \le \pi/a)$$

このとき、固有状態と固有エネルギーを求め、固有エネルギーの k 依存性を図示せよ。さらに、固有エネルギー分布の飛びの大きさは W にどのように依存するか。

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）
［専門科目］基礎理工学専攻・物理科学コース

3．力学

以下の問いに答えよ。答えのみではなく途中の導出過程もなるべく詳しく記すこと。なお、問題文に無い文字や記号を用いるときは適宜定義して用いること。

I. 図１の様に半径 R、質量 M の均一で厚さの無視できる円盤がある。この時、

(1) 図中の濃い灰色部分(内径 r, 幅 dr)の微小面積 dS を r, dr を用いて示せ。また、円盤の面密度 σ を R, M を用いて示せ。
(2) (1)の結果を用いて円盤の中心Ｃを通り、円盤に垂直な軸(図１の点線)周りの慣性モーメント I を求めよ。
(3) (2)の軸を中心Ｃから円盤面内方向に距離 d だけずらしたとき、この軸周りの慣性モーメント I' は I と比べてどれだけ変化するか示せ。

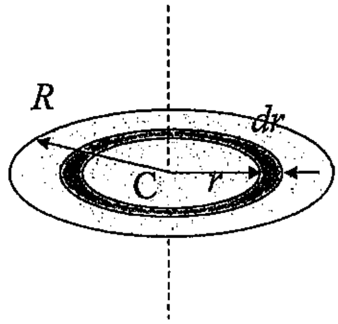

図１

II. 上に記した円盤を、その中心Ｃを通り質量の無視できる棒に取り付けてコマを作った。このコマを図２の様に鉛直方向から θ だけ傾けて角速度 ω で回したところ、一定の角速度 Ω で歳差運動を始めた。ここで、ω は Ω よりも十分に大きく、コマの支点はＯから移動しないものとする。また摩擦や空気抵抗によるコマの回転の減衰は無視できるものとする。

(4) 角運動量を $\mathbf{L}$、トルクを $\mathbf{N}$ としたとき、それぞれの大きさを求め、その向きを図示せよ。ただし、コマの慣性モーメントは I、重力加速度を g とする。
(5) 静止系で見たコマの角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ の時間微分 $d\mathbf{L}/dt$ と、円盤とともに回転する座標系からみた $\mathbf{L}$ の時間微分 $d'\mathbf{L}/dt$ との間には、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d'\mathbf{L}}{dt}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{L}$$

という関係がある。この式を用いて歳差運動の角速度 Ω を I の関数として表せ。
(6) コマの運動をつかさどるパラメータ M, R, l, ω, θ のうち、Ω に影響を与えないものはどれか。根拠とともに記せ。

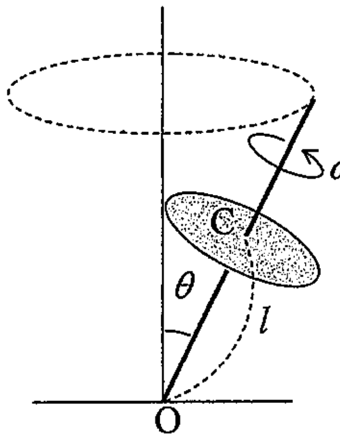

図２

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

［専門科目］基礎理工学専攻・物理科学コース

4．統計熱力学

以下の問題に解答せよ。ボルツマン定数を k_B とする。また、スターリングの公式 $n! \sim n\log n - n$ を用いてよい。

(1) 系の内部エネルギーを E としエントロピーを S とする。外部からの仕事が行われない場合には温度 T は、熱力学的に $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V$ で定義されることを示せ。

(2) 磁化された結晶中の核スピン系を考える。核スピン間の相互作用は無視できるとする。それぞれの核スピンは $\epsilon = 0$ および $\epsilon = a$ $(a > 0)$ の２個のエネルギー値だけをとるとする。また、それぞれのエネルギー値の状態の縮退度は g_0 および g_a であるとする。この系において核スピンは N 個あるとし、そのうちエネルギー $\epsilon = 0$ の核スピンの個数を N_0、エネルギー $\epsilon = a$ の核スピンの個数を N_a とする（占拠数）。系全体のエネルギーが $E = Nx$（x は核スピンの平均エネルギー）であるとき、$\frac{N_0}{N}$ と $\frac{N_a}{N}$ を a と x で表わせ。

(3) ボルツマンの公式を用いて系のエントロピー S をエネルギー x の関数として求め、**(1)** の結果を用いて温度 T の平均エネルギー x に対する表式を求めよ。

(4) 温度 T が負になる平均エネルギー x の領域を求めよ。

(5) この系を２つ用意する。一方を負の温度、他方を正の温度とする。この２つの系を熱的に接触させるとどうなるか簡単に述べよ。