2017年2月9日実施

２０１７年度立命館大学大学院理工学研究科
博士課程前期課程
入学試験問題（専門科目）

基礎理工学専攻（数理科学コース）

【注意事項】

（１）解答は問題番号１．２．…ごとに解答用紙１枚を使用して下さい。解答用紙が１枚では不足する場合は試験監督に申し出て下さい。予備の用紙をお渡しします。

（２）受験番号、氏名、志望コース、問題番号等の必要事項を解答用紙すべてに記入して下さい。

（３）無記名答案は無効です。また、問題用紙および解答用紙の持ち帰りは認めていません。

（４）解答用紙はホッチキス止めしてあるので、はずさないで下さい。

（５）専門科目

問題用紙が志望専攻・志望コースの問題であるかを確認し、下記の問題を解答して下さい。

基礎理工学専攻（数理科学コース）：次の１～３のすべてに解答すること（３問必答）。

１．微分・積分学

２．線形代数学

３．集合論・位相空間論

（６）専門科目試験時間

基礎理工学専攻数理科学コース・機械システム専攻

１３：００～１５：００（１２０分）試験時間中の途中退室は認めていません。

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

［専門科目］基礎理工学専攻・数理科学コース

1．微分・積分学

$\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して，$g(x)$ を次で定義する：

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = \cos(x)$ のとき，$g(x)$ が最大値，最小値，0 を取るときの x の値をそれぞれ求めよ．

(2) $f(x)$ が有界ならば，$g(x)$ も有界であることを示せ．

(3) 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して，$g(x) = f(t)$ となる $t \in \mathbf{R}$ が存在することを示せ．

(4) $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(2\pi x)$ のとき，$f(x)$ が非有界であること，$g(x)$ が有界であることをそれぞれ示せ．ただし，$\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す．

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

［専門科目］基礎理工学専攻・数理科学コース

2．線形代数学

n を自然数とする．一般に $\mathbb{R}$ 上の微分可能関数 $c_{ij}(t)(i,j\in\{1,\cdots,n\})$ を (i,j) 成分とする行列値関数 $C(t)=(c_{ij}(t))_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ の t に関する微分を $C'(t)=(\frac{dc_{ij}}{dt}(t))_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ で定義する．

$a_{ij}(t), b_{ij}(t)(i,j\in\{1,\cdots,n\})$ を $\mathbb{R}$ 上の微分可能関数とするとき，行列値関数 $A(t)=(a_{ij}(t))_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$, $B(t)=(b_{ij}(t))_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ に関する以下の問に答えよ．

(1) $n=2$ のとき，$A(t)B(t)$ の各 (i,j) 成分の微分を計算しなさい．

(2) $n=2$ のとき，$(A(t)B(t))'$ を $A(t)$, $A'(t)$, $B(t)$, $B'(t)$ であらわしなさい．

以下では n は一般の値であるとする．

(3) $(A(t)^2)'$ を $A(t)$, $A'(t)$ であらわしなさい．

(4) 任意の t について，$A(t)$ の逆行列 $A^{-1}(t)$ が存在しているとき，$(A^{-1}(t))'$ を $A^{-1}(t)$ と $A'(t)$ であらわしなさい．

(5) $(A(t)^3)'$ を $A(t)$ と $A'(t)$ であらわしなさい．

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）

［専門科目］基礎理工学専攻・数理科学コース

3．集合論・位相空間論

空でない位相空間 X および連続写像 $f: X \to X$ について, $X_0 = X$ とし, 自然数 n に対して $X_n = f^n(X)$ とおく. 以下, 相対位相により X の部分集合を位相空間とみなす.

(1) X を自然数全体のなす集合に離散位相を考えた位相空間とし, 写像 $f: X \to X$ を $x \in X$ に対して $f(x) = x + 1$ と定義すると, f は連続である. このとき, $\cap_{n=0}^{\infty} X_n$ が空集合であることを示せ.

(2) 0 以上の任意の整数 n について, X_{n+1} が X_n に含まれることを示せ.

(3) X の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, $(\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \cup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda)^c$ が成り立つことを示せ. ただし, X の部分集合 A について, A^c でその補集合を表す.

(4) A を X のコンパクトな部分集合とするとき, $f(A)$ がコンパクトであることを示せ.

(5) X がコンパクトであるとき, 0 以上の任意の整数 n について, X_n がコンパクトであることを示せ.

(6) X がコンパクトかつハウスドルフであるとき, $\cap_{n=0}^{\infty} X_n$ が空集合でないことを示せ.