2017年2月9日実施

# ２０１７度立命館大学大学院理工学研究科
# 博士課程前期課程
# 入学試験問題（専門科目）

## 基礎理工学専攻（物理科学コース）

【注意事項】

（１）解答は問題番号１．２．…ごとに解答用紙１枚を使用して下さい。解答用紙が１枚では不足する場合は試験監督に申し出て下さい。予備の用紙をお渡しします。
（２）受験番号、氏名、志望コース、問題番号等の必要事項を解答用紙すべてに記入して下さい。
（３）無記名答案は無効です。また、問題用紙および解答用紙の持ち帰りは認めていません。
（４）解答用紙はホッチキス止めしてあるので、はずさないで下さい。
（５）専門科目
問題用紙が志望専攻・志望コースの問題であるかを確認し、下記の問題を解答して下さい。

基礎理工学専攻（物理科学コース）：次の１～４のすべてに解答すること（４問必答）。
１．電磁気学
２．量子力学
３．力学
４．統計熱力学

（６）専門科目試験時間
基礎理工学専攻物理科学コース・電子システム専攻・環境都市専攻
１３：００～１６：００（１８０分）試験時間中の途中退室は認めていません。

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）
［専門科目］基礎理工学専攻・物理科学コース

## 1．電磁気学

真空中のマックスウェル方程式;

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{E} &= \rho \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \rho, \boldsymbol{j}$ は，それぞれ電場，磁場 (磁束密度)，電荷密度，および電流密度であり，$\epsilon_0=\mu_0=1$ という単位系を採用している．

**マックスウェル方程式 (1) を用いて**，以下の問に解答せよ．

**(1)** 3 次元空間の原点に置かれた点電荷 $Q$ が $\boldsymbol{r}$ の位置に作る静電場がクーロンの法則：$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\dfrac{Q}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, $(r\equiv|\boldsymbol{r}|)$ に従うことを示せ．

**(2)** 電荷の保存則：$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$ を導け．

**(3)** $\rho\equiv0, \boldsymbol{j}\equiv\boldsymbol{0}$ とする．エネルギー保存則：$\dfrac{\partial U}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}=0$ を導け．ここで，$U\equiv\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2\right)$ は電磁場のエネルギー密度，$\boldsymbol{S}\equiv\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ はポインティング・ベクトル（電磁場のエネルギーの流れの密度＝電磁場の運動量密度）である．

**(4)** $\rho\equiv0, \boldsymbol{j}\equiv\boldsymbol{0}$ とする．マックスウェル方程式 (1) が位相速度 $c=1$ の平面波で $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ が常に定まった向きを持つ解（直線偏光した電磁波）を持つことを示し，

- この電磁波が横波であること，
- この電磁波の進行方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とするとき，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{n}$ がこの順に右手系をなすこと，

を説明せよ．

**(5)** 一般に，界面 $S_0$ 上に有限な電荷や電流の分布が存在し，$S_0$ 以外の領域には存在しないとき，電磁場は $S_0$ の両側で不連続となり得る．このとき，$S_0$ に対する**電場 $\boldsymbol{E}$ の接線成分と磁場 $\boldsymbol{B}$ の法線成分**は常に連続であることを説明せよ．

解答に際しては，必要に応じて新たな文字定数や変数，模式図等を導入してもよいが，明確に定義すること．もし必要であれば，以下の公式を用いてよい ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は任意のベクトル場，$f$ は任意のスカラー場);

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\Delta\boldsymbol{a}, \qquad \nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}),$$

$$\nabla\times(\nabla f)=\boldsymbol{0}, \qquad \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0, \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}), \quad (3\text{ 次元},\ r\equiv|\boldsymbol{r}|).$$

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）
［専門科目］基礎理工学専攻・物理科学コース

## 2．量子力学

結晶中の原子のエネルギー準位について考察する．以下の問に答えよ．ただし，$\hbar$ はプランク定数を $2\pi$ で割った定数である．

**(1)** 軌道角運動量 $\hat{\boldsymbol{L}}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ において，$\hat{\boldsymbol{L}}^2$ と $\hat{L}_z$ が可換であることを示し，このとき，両者の同時固有関数が定義できることを説明せよ．ただし，位置 $\hat{\boldsymbol{r}}$ と運動量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ の間には，交換関係 $[\hat{r}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\delta_{i,j}$ $(i,j=x,y,z)$ が成り立つものとする．

**(2)** 球面調和関数 $Y_{\ell m}$ はこの同時固有関数になっており，

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2Y_{\ell m}=\hbar^2\ell(\ell+1)Y_{\ell m}\quad(\ell=0,1,2,\cdots)$$
$$\hat{L}_zY_{\ell m}=\hbar mY_{\ell m}\qquad(m=-\ell,-\ell+1,\cdots,\ell)$$

である．$\hat{L}_\pm=\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y$ を $Y_{\ell m}$ に作用した関数が $Y_{\ell m\pm1}$ に比例することを示し，その比例係数が $\hbar\sqrt{(\ell\pm m+1)(\ell\mp m)}$ となることを示せ．

**(3)** 3次元球対称ポテンシャルの下で運動する電子の波動関数は，動径波動関数と球面調和関数の積で表され，軌道角運動量 $\ell$ の各状態は上記のように $2\ell+1$ 重に縮退する．例えば，$\ell=1$ の $p$ 軌道では，$Y_{10}$ と $Y_{1\pm1}$ の3つが縮退する．$Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$ であることから，$Y_{1\pm1}$ の表式を求めよ．また，適当に線形結合を取ることで，$xf(r)$, $yf(r)$, $zf(r)$（ここで $f(r)$ は $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ だけの関数）のような形にユニタリー変換できることを示せ．必要なら角運動量の極座標表示

$$\hat{L}_x=i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\ \hat{L}_y=-i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\ \hat{L}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

を用いて良い．

**(4)** 結晶中では注目する原子のポテンシャルはもはや球対称ではなく，まわりのイオンによる静電ポテンシャルが加わる．例えば，図1にあるように原点Oにある原子のまわりに電荷 $q$ の立方対称場 $V(\boldsymbol{r})=-\frac{35}{2}qA\left(x^4+y^4+z^4-\frac{3}{5}r^4\right)$,（定数 $A>0$）が摂動として加わった場合を考えよう．このとき，注目する原子のd軌道はどのようなエネルギー分裂を示すか．まわりのイオンがもつ電荷の符号と波動関数の形に基づいて考察せよ．また，$z$ 軸上の2つのイオンが無限遠に離れた正方対称場においてはどのような軌道の縮退が残るか説明せよ．必要なら、以下の式を利用して良い。

$$Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1),$$
$$Y_{2\pm1}=\pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}),$$
$$Y_{2\pm2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}(\sin^2\theta e^{\pm2i\phi}).$$

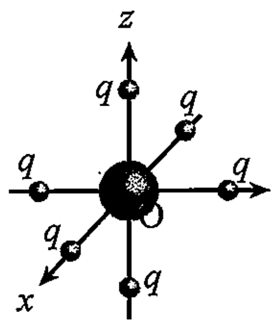



図1

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）
［専門科目］基礎理工学専攻・物理科学コース

3．力学

z 軸方向の一様な静磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)(B > 0)$ の中におかれた質量 $m$ で電荷 $(-e)(e > 0)$ をもつ荷電粒子が, 時刻ゼロで原点から $x$ 軸正方向に速さ $v_0$ $(v_0 > 0)$ で射出された.
この荷電粒子の $(x - y)$ 平面における運動はラグランジュ関数

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

によって記述される. 但し, $m$ と $c$ はいずれも正の定数である.
このとき次の (1) から (7) の問いに答えよ. **(1)-(6) では荷電粒子は $(x - y)$ 平面で円運動することを前提としてよい.**

(1) $(x - y)$ 平面上での荷電粒子の運動方程式を $x$ と $y$ の各成分に分けて求めよ.

(2) 荷電粒子の運動を極座標 $(r, \theta)$ で表すとき, ラグランジュ関数 $L$ を新たな座標 $(r, \theta)$ を用いて書き直せ. 但し $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とし,$\dot{r} = 0$ とせよ.

(3) 角運動量 $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ が時間によらない定数となることを示せ.

(4) 円運動する荷電粒子の角速度 $\omega$ を $(B, m, e, c)$ を用いて求めよ.

(5) 荷電粒子の全エネルギー $E$ を $\omega$ と $p_\theta$ を用いて表せ.

(6) (5) の結果とボーア-ゾンマーフェルトの量子化条件

$$\oint p_\theta d\theta = nh \quad (n = 1, 2, 3...)$$

を用いて荷電粒子の量子化されたエネルギー準位を求めよ (但し $h$ はプランク定数). これは磁場中を荷電粒子が円運動するときに取り得る離散的なエネルギー準位（ランダウ準位）に対する半古典近似である.

(7) 時刻 $t$ における荷電粒子の位置を知るために (1) の運動方程式を解いて $x = x(t)$ と $y = y(t)$ を求めよ. さらにその結果に基づいて軌道の位置や運動の向きをできるだけ詳しく図示せよ.
(1) から (6) では荷電粒子が円運動をすることを前提としたが, $x = x(t)$ と $y = y(t)$ を具体的に求めると, この前提が正しいことを確認できる.

(ヒント)
(1) の運動方程式において $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ とおき, $\ddot{v}_x$ を $(v_x, B, m, e, c)$ を用いて表すとともに, $\ddot{v}_y$ についても $(v_y, B, m, e, c)$ を用いて表せ. これらの $v_x$ と $v_y$ の 2 階の微分方程式を, 問題文で与えられた初期条件に対して解き, $v_x = v_x(t)$ と $v_y = v_y(t)$ を求め, それをもとに $x = x(t)$ と $y = y(t)$ を求めよ.

立命館大学大学院理工学研究科（博士課程前期課程）
［専門科目］基礎理工学専攻・物理科学コース

4．統計熱力学

図のように、断熱壁からなる体積 $V$ の容器がある。この容器に仕切りを入れて、体積 $V_1$ と $V-V_1$ の二つの部分に分ける。$V_1$ の領域に $n$ モル，温度 $T_1$ の気体を封入し，残りの $V-V_1$ の部分を真空にする。これを状態 1 とする。次に仕切りの壁を取り除くと，左側の気体は断熱自由膨張し，十分時間が経過したのち，系は体積 $V$，温度 $T_2$ の熱平衡状態に達する。これを状態 2 とする。容器内部の気体は理想気体であるとし，気体定数を $R$ とする。

1) $1 \to 2$ の変化において、気体がされた仕事 $\Delta W_{1\to2}$，および気体が受け取った熱 $\Delta Q_{1\to2}$ を求めよ。気体の内部エネルギー $U$ は温度 $T$ だけの関数であるとして，$T_1$ と $T_2$ の大小関係を答えよ。

つぎに，状態 2 $(V, T_2)$ の気体をピストンでゆっくりと元の体積 $V_1$ まで押し縮める断熱操作を「準静的」に行う。その結果，気体は体積 $V_1$，温度 $T_3$ の熱平衡状態（これを状態 3 とする）に達する。

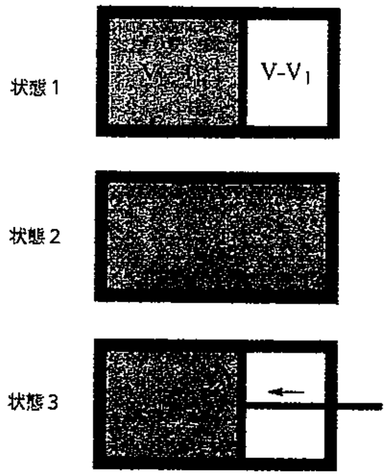
2) $U_3 > U_1$ であることを説明せよ。

3) 内部エネルギー $U$ とエントロピー $S$ はどちらも温度 $T$ の増加関数である。$S_2 > S_1$ を示せ。$1 \to 2$ の断熱自由膨張は可逆過程か，不可逆過程か，答えよ。

4) エントロピーは状態量であり，その変化 $S_2 - S_1$ は途中の経路によらない。そこで，1 と 2 を結ぶ準静的な過程をひとつ選び，断熱自由膨張する理想気体にたいして

$$S_2 - S_1 = nR \ln\left(\frac{V}{V_1}\right)$$

となることを示せ。




図