現代日本の中学校高等学校数学科の教育課程編成の可能性
――J.S. ブルーナーの教育原理への着目から――

The Possibility of the Reforming Modern Mathematical School Curriculum in the Secondary School in Japan: Focusing on J.S. Bruner's Educational Theory

茂野　賢治
SHIGENO Kenji

Ⅰ　はじめに

1　問題

最近，新たな学習指導要領が改訂告示された。今回の改訂では，前回の改訂で重視された学力の三要素のバランスのとれた育成や学力の改善傾向の成果を受け継ぎながらも，教科等の学ぶ意義の明確化とそのための教育課程の検討・改善を課題の一つに挙げている（文部科学省, 2017a）。

これらの課題解決のためには，学びがどのような資質・能力（コンピテンシー[1)]）を育むことを目指しているのかを明確にしていくこと，それらの資質・能力と各学校の教育課程や，各教科等の授業等とのつながりがわかりやすくなるような示し方を工夫すること及びそのための研究が今後，求められているといえる。

今回, 改訂された学習指導要領の特徴の一つは，各教科等において「何ができるようになるか」といった資質・能力であるコンピテンシーを明確にすることである（文部科学省, 2017a）。そのために，各学校がコンピテンシーを基礎におく教育課程の検討改善や創意工夫にあふれた指導の充実を図ることが，中央教育審議会の答申からも窺われる（中央教育審議会, 2016）。

学習研究においても，石井（2015）は，コンピテンシー概念を社会的スキルや動機，人格特性も含めた包括的な能力として,「何を知っているかではなく」実際の問題状況下での「何ができるか」を問う汎用スキルとしている。そして，育成するコンピテンシーの内実を捉えた今後の学校教育における学習活動，授業の在り方を指摘している。

この「何ができるようになるか」「何ができるか」を問う汎用スキルであるコンピテンシーを捉えるため，教育課程の編成上で示唆的なのが，ブルーナー（1963）の提唱した「学問中心の教育課程」と考える。この教育課程の特徴は，学問の構造を教育課程に反映させることであり，教育内容や教材が学問を探究する論理構造から編成することとしている。もう一つの特徴は，学習者である子どもに学問探究の論理をたどらせるための方法として，子どもの認知構造に翻案して学習を行うことである。これは，物事の認識は子どもでも，研究者でも同一であり，差異は質ではなく程度であるとした「どの教科でも，知的正確をそのままにたもって，発達のどの段階のどの子どもにも効果的に教えることができる」（ブルーナー, 1963,p.42）という仮説を基調としているといえる。ここには，教科内容であるコンテンツに固定しないコンピテンシー基調のブルーナーの学問の論理構造を中心とする教育課程編成への示唆が見てとれる。また，ブルーナーは子どもの表象構造の発達に依拠した「ラセン型教育課程」（Ibid.,pp.66-69）を提唱している。これは学習が活動的，形象的，形式的段階を経ることを基調とする教育原理であり，この段階を繰り返し展開することで，基礎的概念の理解が深まり高まるとしている。これらブルーナーの教育原理に従うと，今回の学習指導要領改訂の中心となるコンピテンシーを基礎におく教育課程や学習実践上及び，学習の本質である概念を中心としたその編成と授業実践に対して示唆があるといえそうである。

今回の学習指導要領の改訂においては，各教科においても「何ができるようになるか」といった

コンピテンシーの育成が強調されていると同時に，各教科等における「見方・考え方」がより一層重視されていることが特徴である（文部科学省, 2017a）。中学校数学科においても例外ではなく，学力の三要素の一つでもあり，これまで重要視されてきた「数学的な見方・考え方」に対するコンピテンシーを意識した授業，及び実践上の研究が今後求められているといえる（文部科学省, 2017b）。

これまでも，わが国の学校数学における「数学的な考え方」及びその育成は 21 世紀に入り，さらに必要性を帯びてきていることが指摘されていた（文部科学省, 2008,2009; 中央教育審議会, 2016）。それに伴うように, わが国には「数学的な考え方」についての指導法や教材開発等，学習指導要領との関連や国内外の学力調査と比較した知見の蓄積がある（e.g., 片桐, 1988; 長崎, 2007; 湊, 2007）。一方で，今回の学習指導要領の改訂で目指すコンピテンシーを基礎においた数学的な考え方についての研究は，これまでの学習指導要領にあるコンテンツを中心とした研究では途上といえ，今後はこれまでの知見を活かしたコンテンツからコンピテンシーを中心とした数学学習研究が必要になるといえる。

以上をまとめると，我が国の今後進むべき学習や数学学習及び研究の概観が明らかになってくる。それは, 数学的な考え方の内容を社会生活に汎用させること，数学的な本質を失わずに育成する学校数学におけるコンピテンシーを基礎におく教育課程や指導法の開発，及びそのための授業のあり方等の研究である。

これらのことを踏まえ，これまでの学習指導要領にあるコンテンツからコンピテンシーへの教育課程及びその指導方法を探ることは，新たな学習指導要領の目標の具現化において意義のあることと考える。そこで，コンピテンシーを基礎におく新たな学習指導要領に基づく教育課程の編成を考えてみる。例えば，ある特定の教科に対して, 中学校と高等学校のこれまでのコンテンツをもとにした編成ではなく，コンピテンシーを融合する編成が考えられる。さらに，融合する編成上の効果を検証するためには，高等学校の学習内容を中学校において，実践上で行い，諸理論や概念などの形成過程を捉えることが，まずは必要と考える。

そこで，本稿ではブルーナーの仮説（ブルーナー, 1963,p.42）を基調とする「学問中心の教育課程」の教育原理に着目して，コンピテンシーである「何ができるようになるか」を明確にする新たな学習指導要領における授業実践での検証の一助のために，実験的ではあるが，数学科に特定して現行の高等学校での学習内容を中学校の授業に導入して，数学的概念の形成過程を調査する。この結果をもとに，上述したブルーナーの教育原理を探りつつコンピテンシーを基礎におく教育課程の編成として中学校と高等学校の教育課程の融合の可能性をみていく。つまり, 授業実践において，高等学校数学科の学習内容が中学校の授業実践において数学科の重要とされる社会汎用的な「数学的な考え方」として概念形成がされるのか確かめる。そして形成がされるのであれば，どんな過程を経るのか，そんな問いを手がかりに，今後の我が国のコンピテンシーを中心とした教育課程の編成に迫るべく，本稿で以下の目的を設定して, これら問いに耐えうる解を探すことを試みる。

2　目的

本稿は，中学校と高等学校の数学科の教育課程編成の可能性を探るため，現在我が国の教育課程において高等学校で初出する学習内容である「極限」を中学校の授業において実験的に行った結果から，極限概念形成の有り様を実践上から検討することを目的とする。そこから，コンピテンシーを基礎におく今後の教育課程の編成における視座を得ることを試みる。「極限」を取り上げた理由は，現在の学習指導要領数学科において高等学校で初出する学習内容であることから，それ以前の学校段階での学習履歴があまり影響を及ぼさないことが予想され，本稿の目的を遂行するために適当な学習内容と考えたためである。対象とした「極限」については，第Ⅲ章で詳細に後述する。

Ⅱ　本稿における理論的視座

1　数学学習における数学的なアイデア

上述したような今後のわが国の学び及び学校数学における可能性を探るため，数学的な考え方の育成において示唆的なのが，中島（2015）の指摘する数学的なアイデアと考える。

中島はまず，数学的な考え方の育成を，算数・数学にふさわしい創造的な活動を自主的に行う力の育成としている。中島のいう創造的な活動とは，既習の知識や習慣的な方法だけでは処理できない新しいものを探り，考え出すことが要求される数学的な活動である。その活動には，観点の変更，場面の構造を再構成して，既習の知識や手法とつながりをつけることが必要とされるという。そのつながりをつけるための着想としての働きを数学的なアイデアとしている（中島, 2015,p.89）。つまり，課題解決のための着想として数学的なアイデアがつくられ，働くことで創造的な活動を通した数学的な考え方の育成がなされるという指摘である。

この中島（2015）の指摘に従うと，創造的な活動には，既習の知識や習慣的な方法だけでは処理できない何か新しいものを探り，考え出すことが要求されるので，課題解決のための着想である数学的なアイデアについて探ることは有益であると考える。なぜなら，わが国の学びの課題である学習したことを活用して，生活や社会の中で出会う課題の解決に主体的に生かしていくためには，学校数学において着想としての数学的なアイデアを育成することで，社会生活における個別，具体の課題克服のために数学的なアイデアが活用されることが期待できると考えるからである。そして，このアイデアの活用は，社会汎用的な力として育成すべき上述してきたコンピテンシーの一つと解せることから，本稿では中島の数学的な考え方の育成のための着想である数学的なアイデアをコンピテンシーの一つの指標として，以後の展開の中で用いていく。

また，中島（2015）は数学的なアイデアは直観，または非形式的な形で働いていることが多いので，学校教育においてその観察や分析する際には，各事例をもとに，具体的に読み取っていくことを指摘している（中島, 2015,p.91）。

2　実証的な数学学習の研究

事例をもとに数学学習を捉える際，数学をディスコース[2)]の参加として，また学習者の概念の形成を，観察可能な数学のディスコース上で捉えた研究者の一人にSfard,A.（1991;2000;2001;2008;2012）がいる。Sfardは，数学概念の認知主義的な研究に限界を感じ，コモグニション主義（Sfard,2008,pp.275-281）を立ち上げる。コモグニション（commognition）とは，Sfardの造語であり，コミュニケーション（communication）と認識（cognition）である行動と認知を合わせた理論である。コモグニション論は，数学をコミュニケーションの一つの形として，学習をコミュニケーションへの参加としている点において，数学概念を社会面であるコミュニケーションの参加活動から捉え直しているといえる（Sfard,2008;2012）。Sfardの数学学習研究は教室内の数学ディスコースから概念を捉えることで，概念形成をより蓄積可能な対象として，表現しているともいえる。この理論に至る過程において，Sfardは具象化論（1991）を創出している。

Sfard（1991）の具象化論とは，三つの性質から概念形成を捉える理論といえる。一点目は，操作的概念は構造的概念に先立つという順序性，二点目は，概念を創り上げていくための相補性，三点目は，概念形成を三つの層に分けた段階性である。その三つの層とは内面化（interiorization），凝縮化（condensation），具象化（reification）である。内面化とは操作の過程を熟達することであり，凝縮化とは操作と数学の本質を結びつけようとする段階であり，具象化とはそれが結びつき，一つの構造と理解された段階である。これにより概念形成を操作的概念から構造的概念への移行と特徴付けている。さらに，Sfard（2000）では，具象化論をディスコースの文脈に依存することで，数学的な概念形成を捉えている。そこでは，操作的表記が構造的表記へ移行することで，具象化論をディスコースの変容から捉え直している（Sfard,2000,p.41）。操作的表記から構造的表記へ移行することが，より高次のディスコースの発達

になることを指摘しているのである（Sfard, 2000,p.91）。さらにSfard（2001）では，ディスコースの発達を三つの側面から捉えている。それらは，語彙とコミュニケーションを行う上での視覚的媒介物の変更や追加，メタディスコース規則の変更である。メタディスコース規則とは「ディスコース行為の適切，不適切を制御する（navigate）もの」と定義している（Sfard ,2001,pp.4-5）。Sfardのこれらの指摘をまとめると，具象化論の観点において，ディスコースの発達とは，操作的に用いられていた数学的表記が構造的に変容していくプロセスといえる。

Ⅲ　研究方法

1　研究方法の概観

本稿では，中学校と高等学校数学科の教育課程編成の可能性を探る。そして，コンピテンシーの一つである数学的な考え方を，より社会生活に汎用的に活用するためのカテゴリーの導出的役割として，数学的なアイデアを同定する。そのアイデアの創造過程を学校数学における実践上のディスコースから数学的概念形成として検討する。また，中島（2015）の指摘に従い，数学的なアイデアは分析する際，各事例から具体的に読み取っていくことがふさわしいので，学校数学における各授業事例に応じて，数学的なアイデアの概念カテゴリー[3)]を導出する。さらに，そのアイデアのもとを最初に，クラス全体に提出した生徒に着目して，アイデアの創造過程を焦点化して捉える。

ディスコースに着目した理由は，社会生活の場面に対応する数学的なアイデアの創造過程を微視的に分析することが可能になると考えたためである。なぜなら，ディスコースとは，「談話」「言説」等の和訳が存在するが，川嶋（1994）によると教育研究では，言語集約的な相互作用として文脈化されたことばを示すとの指摘がある（川嶋, 1994,pp.75-77）。この指摘に従うと，個別の授業において文脈化されたことばには，豊かな意味が表出することが考えられるので，ディスコースへの着目により，数学的なアイデアの記述が，より具体的な形で詳述できると考えたからである。また，豊かな意味の表出するディスコース上で，概念を段階的に捉えるSfrad（1991）の具象化論を分析枠に用いることで，数学的なアイデアである着想の働きもディスコース上で段階的に捉えられると考える。

2　事例の選定条件

本稿において捉える数学的なアイデアとは，第Ⅱ章において上述した中島（2015）の指摘する観点の変更や場面構造の再構築をする際の着想として働くアイデアである。例えば，中島はある一つのアイデアとして「（前略）はじめの諸法則は保持されるが，それらのうちの何かが，ほかに望むことを有利にするために変えられることがある。」と述べ，その具体的な場面として「複素数への拡張が行われたときは，複素数の順序関係は失われる。（後略）」と例示している（中島, 2015,p.116）。従って，事例の選定において，学校数学での授業事例を想定する際，学習者である生徒たちが新たなアイデアを用いて，探究的に課題を解決していく上述で例示した観点が変わるもしくは，未習の学習内容が望ましい。そこで，本稿の事例選定においての条件として，学年やクラス，学習内容及び授業者である教師の生徒に期待する学習を以下のように選定した。その際，上述したように数学的なアイデアはある一定の特質があるので，実践上の事例選定を行う際，考慮することを以下の三点に集約した。

①生徒の観点の変更の表出が期待できるような創造的な活動の場面及び対象学年。

②既習の数学的な知識とつながりを付けていくことで課題解決が期待できる学習主題及び概念カテゴリー。

③ディスコース上で，語彙や視覚的媒介物の表出が期待できる学習形態。

3　選定した授業事例の概要

上述した事例の選定条件を鑑み，本稿においては以下の授業事例を選定した。その概要を以下で示す。

①本稿の目的と照らし合わせた創造的な活動を起動させるため，探究的な学習課題の場面を取り上げる。なぜなら，探究的な学習とはある一定の条

件の下に，日常生活における現象の原理や構造を探ること及びその活動と考える。そこで，この探究的な学習及びその場面を取り上げることは，学習者が探ること，つまり創造的な活動が期待できる場面に適当と考えるからである。また，創造的な活動の要件として，観点の変更や場面構造の再構成を要求することから，学習が発展的な内容を含むことが適当と考える。従って，事例の選定では，学習内容面と対象学年との関係において，現行の高等学校における内容を中学三年生の同じ領域として行った関数学習の授業場面を捉えることで，創造的な活動が期待できると考える。

②学習主題として極限概念を活用して課題解決を行う場面を取り上げる。ここでいう極限概念とは，高等学校のカリキュラムにおいては，関数 y ＝ f（x）において，x の値を限りなくある値に近づけていくと，f（x）の値が一定の値に近づく場合に，その近づく値を極限値という数学的な考え方である（デボラ・ヒューズ＝ハレット他，訳永橋英郎,2010,pp.2-84）。グラフ図においてのイメージは図１である。極限概念を取り上げた理由は，図２のようにこれまでの既習の観点（本事例では，平均）からの変更を持って，新たな観点に転換するためにつながりを学習者がつけていくことが期待できる概念カテゴリーと考えたからである。

③本事例で取り上げた対象となるクラスは，学校全体で日頃から協働的な学習形態を取っている。本事例においても，コの字型の４人グループでの話し合いや図を描く活動を通して生徒同士，生徒と教師の相互交渉が表出する学習形態を取っている。この形態によって，語彙や視覚的媒介物の表出が期待できると考えた学校とクラスを選定している。

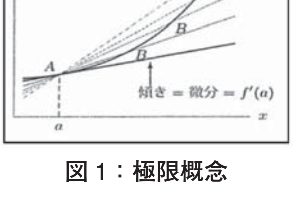


図１：極限概念

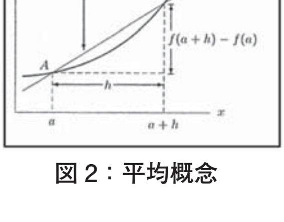


図２：平均概念

4　分析枠組みの構築

本稿で捉えようとする数学的なアイデアとは，課題解決における観点の変更や場面構造の再構成をして，既習の知識とつながりをつけるための着想としての働きであった（中島, 2015,p.89）。そこで，この着想の働きを捉えるためには，数学的な概念を捉えるある枠組みが必要と考える。そこで，Sfard の具象化論（1991）における概念の形成段階の枠組みを用いることで，着想から既習の知識とのつながりをつける過程を概念の形成として捉えていくことを試みる。この枠組みは概念形成を段階的に捉えているので，数学的なアイデアが創造される過程を微視的に捉えられると考える。その際，具象化をディスコースの文脈におく。それにより，事例では，より概念形成が観察しやすい形としてかつ，具象化における概念がディスコースの発達（2000）として捉えることが可能になる。その際，ディスコースの発達を捉える枠組みとして，メタディスコース規則の変更（2001）の観点を用いる。さらに，メタディスコース規則の変更をより実践上の観察可能な形で捉えるために，語彙と視覚的媒介物をメタディスコース規則の変更の観点として本稿では位置づけておく。例えば，発話者の語彙や図の使用において，具象化論におけるメタディスコース規則の変更とは，操作的段階から構造的段階への移行といえる。メタディスコース規則の変更をディスコース発達の観点に用いた理由は，メタディスコース規則がディスコース行為の適切，不適切を制御するものである（Sfard,2001,pp.4-5）ので，実践上では学習者の概念形成における変容を捉えられると考えたためである。

5　分析手続き及び手段

分析手続きとして，まず中学三年生 20 名のクラスを授業参与させて頂いた。授業参与したクラスは，某中等教育学校第３学年（中学校第３学年段階）クラスである。学習内容は，数学科関数領域における授業であり，参与期間 2014 年 10 月～2015 年１月までの約４ヶ月間，延べ 20 時間の内，本事例の対象となる授業は 10 時間分である。

事例対象とした学校は，日常的に協働的な学習

を進めており，参与期間においてもクラス内で，小グループによる話し合い活動などが盛んに行われていた。対象としたクラスはホームルームクラスを，出席番号順に半数に分けた少人数クラス20名（女子10名，男子10名）である。指導教諭は教職歴20年以上の数学教師である。授業参与の際，ビデオカメラ２台を窓側前方後方に置かせて頂き，ホワイトボード（WB）に記述したものと生徒の発話と様子を同時に，映像として記録した。また，小グループの話し合い時に，全５グループにそれぞれ１台の割合でICレコーダーを置き，教師にはICレコーダーを小マイクで付けて頂いた。さらに授業後，音声記録として教師インタビューを行い，生徒たちの使用したプリント及びノートの複写をして，生徒たちの記述を採取した。

分析手段として，ビデオカメラ及びICレコーダーの記録，フィールドノーツ，生徒のノートとプリントの複写から毎時間ごとに，数学概念の解釈を授業者と筆者で修正しながら中心となる数学概念のカテゴリーを導出した。これと，生徒たちと教師の発話データをコード化したものと照らし合わせて，発話を解釈して分析を行った（以下，本文及び表２中の発話の前の番号は発話コード番号を表す）。

Ⅳ　結果と考察

1　結果

本稿では，学習単元「二乗に比例する関数」（全20時間，2013年10月から2014年１月）の授業参与のうち，後半の「二乗に比例する関数の応用」10時間分の記録に基づいている。以下の表１でその構成を示す。

表１：「二乗に比例する関数の応用」単元構成

授業番号	授業内容	中心となる教師の問い
1	課題提示と課題把握	パラボラアンテナは光をどのように反射するか
2	課題把握とグラフ用紙へのイメージ図の作成	パラボラアンテナの反射を二乗に比例する関数として見立てるとどうなるか
3	イメージ図の交流と解決のための議論	曲線に反射するとき光を制御するためにはどうすればいいか
4	イメージ図を用いての解決方法の共有のための議論	反射する際の基準となる線をどのように生み出すか
5	イメージ図による解決方法のMkくんたちによる説明	小円を描いて反射の基準線をつくる考えにしようと思ったのはなぜか
6	グラフ図による解決方法の表示活動	共有した方法をグラフに描いてみるとどうなるか
7	グラフ図による解決方法の表示活動と議論	反射の線は一致するか
8	解決方法の正当性の吟味	正確に線を引くにはどうすればいいか
9	解決方法の正当性の吟味と共有	なぜ、円を小さくするといいのか
10	計算による解決方法の検証	計算でこの方法でいいか確かめてみよう

(1)　対象とする授業の概要

本事例において，教師はパラボラアンテナの反射の構造を数学学習として扱うために，アンテナの反射面を二次曲線のグラフの形状に理想化して学習課題を設定した（図３参照）。

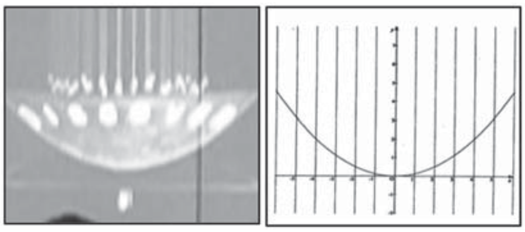


図３：パラボラアンテナの反射映像とグラフ用紙

その際，教師は実際の反射の映像を，生徒が課題解決の糸口として掴みやすいように見せ，グラフ図に反射の様子を描かせた。これは，極限概念を活用した課題解決を教師が期待したためである。パラボラアンテナの実際の構造として，反射した光をある一点に集めるためには，グラフ上で

は，反射の基になる線を創り出す必要があり，小円を描くことで，反射の基になるグラフの接線を創り出す方法をMくん（仮名）らはクラスに提出した。この時に用いられた操作的な方法から課題解決に迫る着想，つまり数学的なアイデアが，概念カテゴリーとしては「極限概念」といえる（図4参照[4)]）。

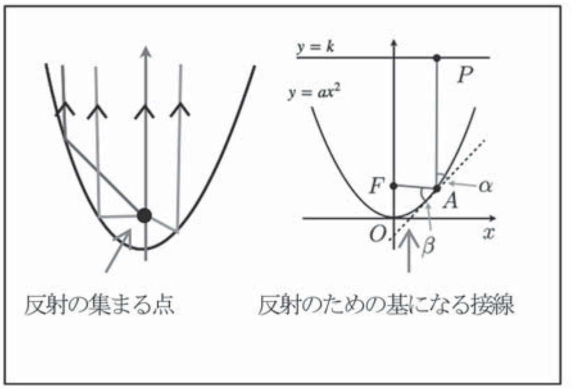


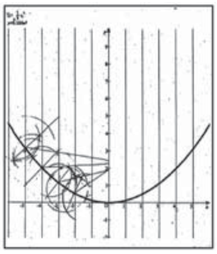
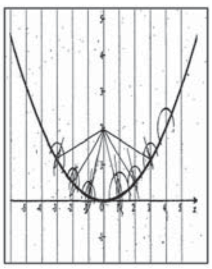
図4：課題解決のために用いられる方法

(2)　分析結果

以下では，Mくんの具象化について，ディスコース上の分析を，表2から行っていく。

まず，Mくんのメタディスコース規則の変更を同定する。当初，Mくんは操作的に円を小さくすることで，反射の基になる線を見出そうとする（発話053，図M5の線分BCとグラフ上の曲線BCとの接近）。しかし，円を小さくしても反射の線は一致に近づくが一致することなく（図

表2：具象化から捉えた各段階

Mくんの描いた図	中心となるディスコースと発話 （　）内は発話と同時の行動を示す。	Mくんの発話と描かれた図の様態	Mくんのメタディスコース規則の状態	具象化の各段階として解釈できる特徴的な語彙と図の表出
授業番号5  図M5	051：Mくん：「それを結ぶと、大体沿った、グラフに沿った直線が書けるじゃないですか。」 052：教師：「こう結ぶ。(BとCを結んで線分を作る)」 053：Mくん：「で、その円の直径を段々小さくしていくと、そのズレる幅が小さくなるから大体グラフに沿ってくる。」 054：教師　「この考えにしようと思ったことは、何かコメントない？」 055：Tくん「とにかくその（Mくんの書いた図を指しながら）曲がってるグラフに対して、何かしら直線を引かないと上手くいかないんですよ。それは点Aを中心にして、等距離の点を結ぶっていうのが、こうなんていうか書きやすくて分かりやすくって、円を小さくすれば誤差が減る。」	Mくんは、小円をより小さく描くことで、線分BCが、よりグラフの曲線に近づくことを記号を入れた図M5を用いて、一般化する説明を行う。	操作的に円をより小さく描くことで、グラフとの二交点を結んでできる線分BCが曲線に近づくので、それを反射の基の線分にするという操作的なメタディスコース規則に従っている。	内面化 グラフに近い線を引くため、円をより小さくしていく動的プロセスとしての発話051「グラフに沿った直線が書ける」,053「段々小さくしていく」と線分BCと弧BCが近い図の表出。
授業番号8  図M8	083：教師：「そうするとBCに対する垂線を引いたということは、この図からいけばいいんだよね。BCの垂線引けてる。より正確に引くことを考えたら改善する所ある？」 084：Mくん：「BCをゼロに等しくする。無理だけど。」 085：Nくん：「だけど、無理だろ。」 086：Mくん：「だけど、そうやらないと無理じゃね。ぴったりするには。」 （中略） 089：Nくん：「BCのこと消すんじゃないのか。」	Mくんは、小円を描いた操作の結果として、発話084において、線分BCを無理だがゼロにすることと、発話086で線分とグラフの曲線がぴったりすることの説明を行う。合理的に捉えた操作プロセスの結果を、図M8を用いて説明する。	円をより小さく描くと最終的にできる線分の長さはゼロになるので反射の基になる線は表出できない。しかし、曲線と線分が一致するためには線分の長さをゼロに描いた時にできる線分を反射の基にするというメタディスコース規則に従っている。	凝縮化 操作を続けていくと結果としてゼロになる動的プロセスと無理だがゼロとしての存在であるBCの静的プロダクトを結びつけていくための発話084「BCをゼロに等しくする。無理だけど。」086「そうやらないと無理」と反射の点が一致しないプロセスとしての図の表出。
授業番号9  図M9	091：教師：「何で円小さくするといいんだ？」 092：Mくん：「えっだって、その円の長さがゼロになるから、ゼロで書けるとしたらそれが、その垂直な線のもとだから。」 093：教師：「とすると、そっか、そっかこれさ、ちょっとピンと来た人いない？ピンと来た人いる？これさ、円ちっちゃくするとさ、これ例えば、こういう状態を考えているんですよね。緑色の円をたとえば。（グラフにさらに小さい半円を書き加えながら）こういう円を考えるんだよね。こういう円考えると、何が黒い円と違ってくるんだ？」 094：Fさん：「何か変化の割合っていうか、線分が、短くなる。」 095：Mくん：「つなげたときに、こうズレが小さくなる。（手でグラフの形状をつくる身振りを加えて）」 096：Uさん：「グラフに対するズレが小さくなるから。」	Mくんは、発話092で円を小さくすれば、やがて線分は結果ゼロになる操作的プロセスと、ゼロのときに表れると仮定した線分を基にすれば、反射した光は一点に集まるプロダクトを構造的にまとめたプロセスとプロダクトを図M9と共に表出させる。	円をゼロにした時にできる線分はグラフとの二交点を結んでできる線分ではなく長さはゼロになる。本来、描くことはできないが、求める線として描けたと仮定してできる線を反射の基になる線と見なす構造的なメタディスコース規則に従っている。	具象化 操作を続けていく結果としてゼロになる動的プロセスとゼロで書いたと仮定したときに表出する線の静的プロダクトの同時の発話092「円の長さがゼロになるから、ゼロで書けるとしたらそれが、その垂直な線のもと」と円がゼロでなくかつ反射の点が一致する図の表出。

M8 の反射線の交点の不一致），かつ反射の基になる線分は小さくなりやがてゼロに近づくので描くことができなくなる（発話 084,086）。そこで，本来はゼロには近づくがゼロには一致しない小円だが，ゼロになったと想定し（発話 092, 図 M9 の小円），反射の基になる線を見立てるという考え方を合理的に受け入れ（図 M9 の反射線の一致），創造することで課題解決に向かったといえる。これは，M くんが課題解決をするために操作的，動的に捉える見方から，構造的，静的に捉える見方を行った結果といえる。つまり，M くんは動的, プロセスとしての操作的表記から静的, プロダクトとして構造的表記を行い課題解決に向かったのであった。このプロセスに，M くんのメタディスコース規則の変更が同定できる。それは，M くんの発話（発話 053 ⇒発話 092）と描いた図（図 M5 ⇒図 M9）の変容に表出されている。

次に，M くんのメタディスコース規則の変更に伴う具象化による概念形成の過程を捉える。内面化における概念は，操作的に円を小さくすることで，反射の光線がある一点に近づくというメタディスコース規則に従っている。次に，凝縮化での概念は，操作的に円をどんなに小さく描いても反射の光線は一点に交わることがないので，円をゼロと仮定したときに, 現れると予想することで, 解決に結びつけるメタディスコース規則に従っている。そして，具象化の概念は操作的に円を小さくすることと現象としては，存在しないゼロの円を想定し，操作と仮想の二つを結びつけて，構造的に捉えるメタディスコース規則に従い，存在すると仮想した線を基に反射させることで課題解決に向かっている。これは，操作のプロセスと結果のプロダクトの両方に従うメタディスコース規則ともいえる。以上により，本事例における数学的なアイデアとは，現象としてあるものから，結果としてのあるものにみなすという存在論のアイデアとして同定される。

2　考察

M くんの概念形成の過程におけるメタディスコース規則の変更から，数学的なアイデアが創造された。創造された理由は, 具象化に伴うメタディスコース規則の変更による数学的ディスコースの発達といえる（Sfard,1991;2000;2001）。

本事例におけるメタディスコース規則の変更とは，操作的，現象的な見方から，あるものとして見なす構造的，概念的な見方への変更である。実践上では，語彙や図を操作的，動的に捉えた表出から構造的，静的に捉えた表出への変更である。この変更のプロセスは，観点の変更や場面構造の再構成であり概念形成に機能するので，着想としての数学的なアイデアが創造されたといえる。結果，数学的なアイデアが着想として働き，既習の知識である操作的，動的な見方と構造的，静的な新たな見方とつながりがついたといえる。そして，操作的，現象的な見方から，構造的，概念的な見方として対象を存在するものとして見なすという数学的なアイデアは，概念形成のプロセスを経ることで創造されていた。そのプロセスとは，よく知られた対象を全面的に新たな観点から見直す突発的な能力を要する存在論としての変更，つまり具象化（Sfard,1991,p.19）である。このプロセスは，観点を変更したり，場面構造を再構成することになるので，着想としての数学的なアイデアが創造されるといえる。

また，実践上では学習者の行動として，語彙や図を操作的，動的に捉えた見方から表出する活動を行った後，構造的，静的に捉えた見方で表出する活動を行うことを通して，数学的なアイデアは創造されるといえる。

Ⅳ　おわりに

わが国の学び及び学校数学の中学校と高等学校の教育課程編成の可能性を探るため，数学的なアイデアを同定し，極限概念の形成過程を実証的に検討した。結果，現行の高等学校の学習内容（コンテンツ）である「極限」が，コンピテンシーとして中学校の数学の授業で形成された。本事例では,「極限」「微分」などの数学用語は表出されてはいなかったが，ディスコースの発達の結果として，旧来から数学用語として存在する「極限」の概念の創出とその形成が示された。このことは，ブルーナーの「どの教科でも，知的性格をそのままにたもって，発達のどの段階の子どもにも効果

的に教えることができる」という仮説（ブルーナー, 1963,p.42）が示唆される。ここには，新たな学習指導要領の目指すコンピテンシーに基礎をおく授業実践が示唆される。本稿においては，あるべき教科内容の修得やそれらを通した思考活動をすること，つまりこれまでの教科内容（コンテンツ）としての「極限」の考え方の修得というより，本事例では学校段階を越えた縦断的な資質・能力（コンピテンシー）として，社会生活に汎用的な物事を捉える考え方の創造があったといえる。本稿の結果は，ある中学校段階の一つの事例であるが，中学校と高等学校数学科の教育課程を融合するコンピテンシーに基礎をおくブルーナーの「学問中心の教育課程」編成の可能性の視座として示唆された結果ともいえる。

本稿では，メタディスコース規則の変更による社会構成的，社会文化的な面から数学学習及びそのディスコースの発達を捉えた。本稿では，最初にクラスにアイデアを提出した生徒に着目したが，数学的なアイデア創造のための数学ディスコースの発達には，他の生徒との相互作用，教師の役割の検討も必要である。これを今後の研究課題とし，コンピテンシーを基礎におく教育課程編成への新たな知見に貢献したい。

謝辞

本研究に，快くご協力頂きました中等教育学校の生徒，先生の皆様に心より深く感謝申し上げます。また，本研究を遂行する上でご指導，ご助言を賜りました研究室の皆様，関係の皆様に厚く御礼申し上げます。

附記

本稿は，全国数学教育学会第 45 回大会口頭発表（2017 年 1 月 29 日）題目『「数学的なアイデア」の創造過程の検討 - 探究的な授業のディスコースにおける生徒の極限概念の認識に着目して - 』を加筆，修正した。また，2017 年度立命館大学人間科学研究所重点研究プログラム＜人間科学研究所プロジェクト B（対人援助の学融的研究）「キャリア発達の図化プロジェクト」＞による研究成果の一部である。

【註】

1）石井（2015）は，学習指導要領における議論の中で，資質・能力をコンピテンシーの用語で説明している。コンピテンシーとは社会的スキルや人格特性も含めた人が「何ができるか」を問うものとしている。また，中央教育審議会答申（2016,p.30）においても資質・能力とコンピテンシーを同義に扱っている。本稿では，この定義に従い改訂された学習指導要領における教育課程を考察するので，コンピテンシーの用語を積極的に用いている。

2）本稿では，ディスコースの意味を「相互作用を含む対話」あるいは「ひとまとまりの現実のことば」として場面や活動も含むものとしておく。

3）本稿における概念カテゴリーとは，学習指導要領では，「数学的な見方･考え方」「数学概念」に相当する。例えば，極限の「概念カテゴリー」は「極限の見方・考え方」「極限概念」等の名称で表現されているものである（高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編, pp.39-41)。一方で，本稿では数学的なアイデアの同定を目的としているため，違いを強調もしくは混乱を避ける意味で「概念カテゴリー」の名称を用いておく。

そして，本稿において取り上げた事例の概念カテゴリーは，極限概念に相当するものである。本稿の目的と照らし合わせた数学的なアイデアの導出としての概念カテゴリーは，数学もしくは学校数学において「極限」という名称が与えられているものなので，数学的なアイデアを考察する際，本稿では「概念カテゴリー」もしくは，場面によって「極限概念」という名称と使い分けて記述している。

4）図 4 は，「パラボラアンテナの原理と放物線の性質」.『高校数学の美しい物語～定期試験から数学オリンピックまで 800 記事～』（2015/02/05）. http://mathtrain.jp/antenna.（2016/9/27 閲覧）より引用した。

【引用文献】

石井英真（2015）.『今求められる学力と学びとは—コンピテンシー・ベースのカリキュラムの光と影—』，日本標準ブックレット No.14, 日本標準, 東京.

片桐重男（1988）.『数学的な考え方・態度とその指導 1 数学的な考え方の具体化』，明治図書, 東京.

川嶋太津夫（1994）.「ディスコース研究のディスコース：ディスコース研究の可能性を求めて」.『教育社会学研究』，第 54 集, pp.61-82.

Sfard, A.（1991）. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22（1）, pp.1–36.

Sfard, A.（2000）. Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel, & K. McClain（eds.）, *Symbolizing and communicating in* *mathematics classrooms: Perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design*, pp.37–98. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sfard, A.（2001）. Learning mathematics as developing a discourse. In R Speiser, C. Maher, and C. Walter（eds.）, *Proc. of 21st Conf. of PME-NA*, pp.23-44. Columbus, Ohio: PME.

Sfard, A.（2008）. *Thinking as communication: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York, NY: Cambridge University Press.

Sfard, A.（2012）. Introduction: Developing mathematical discourse–Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51–52*, pp.1–9.

中央教育審議会（2016）.『幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）平成 28 年 12 月 21 日』. http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/__icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902_0.pdf），2017 年 1 月 14 日取得.

Hughes-Hallett, Deborah., Andrew M. and McCallum, William Gordon（2007）. *Calculus: single variable.* デボラ・ヒューズ＝ハレット他著,（訳）永橋英郎（2010）. 概念を大切にする微積分 1 変数. 日本評論社，東京, pp.2-84.

中島健三（2015）.『復刻版　算数･数学教育と数学的な考え方』，東洋館出版社，東京.

長崎栄三（2007）.「数学的な考え方の再考」，長崎栄三・滝井章編著『算数の力を育てる③数学的な考え方を乗り越えて』，東洋館出版社，東京, pp.166-183.

ブルーナー（1963）.『教育の過程』，J.S. ブルーナー著 鈴木祥蔵 佐藤三郎訳，岩波書店，東京.

湊三郎（2007）.「PISA の出現が我々に告げる大切なこと」『日本数学教育学会誌』，89-3,p.5.

文部科学省（2008）.『中学校学習指導要領解説 数学編』，教育出版，東京.

文部科学省（2009）.『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』，実教出版，東京.

文部科学省（2017a）.『中学校学習指導要領解説 総則編』，http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/07/04/1387018_1_2.pdf,2017 年 7 月 20 日取得.

文部科学省（2017b）.『中学校学習指導要領解説 数学編』，http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/07/25/1387018_4_1.pdf,2017 年 7 月 20 日取得.