2019 年度　附属校算数・数学授業研究会（技の習得）

附属校教育研究・研修センター

1 月 11 日（土)、2019 年度附属校算数・数学授業研究会（技の習得）を朱雀キャンパス 601 西において開催した。講師には龍谷大学・科学技術共同研究センターの四ツ谷晶二先生をお招きした。出席者は教職大学院の田中博先生を始め、長岡京 1、慶祥 2、大学院生 2 の計 6 名であった。以下報告する。

≪研修の記録≫

テーマ：楕円の内心・傍心の軌跡の不思議な関係

講　師：四ツ谷 晶二　先生

1　作業

講義の最初に，図１のような発砲スチロール板に画鋲を刺した模型を作成した。２つの画鋲を固定し，紐の長さが等しいことを利用して画鋲を刺して楕円（図１外側の画鋲）を作図した。

この模型をもとにして，三角形の１つの頂点が楕円上を動くときの内心や傍心の軌跡を予想することから講義が始まった。内心の軌跡（図１内側の画鋲）は楕円となるのではないかと推測した。目視で作成した模型をもとにすると傍心の軌跡（図１の右側縦の画鋲）は曲線を描くように予想したが，実際は直線になることをきいたときには，参加者全員が驚いた。

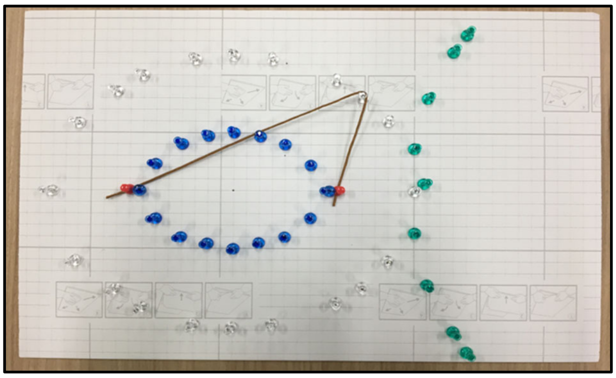

図１　画鋲を用いた内心・傍心の軌跡

2　三角形の内心・傍心の軌跡

三角形の１つの頂点 P が円周上を動くとき，内心 I や傍心 I_A，I_B，I_P の軌跡は図２のようになる。内心 I と傍心 I_A，I_B，I_P の軌跡は部分的に現れて，途中で途切れているが，すべてをつなげると２つの円になることの背後にあるものを調べていく。

軌跡に円ばかりが出てくるのは，線分 AB が円の弦となっている極めて例外的な場合のみである。一般には変な形ばかりでてきます。

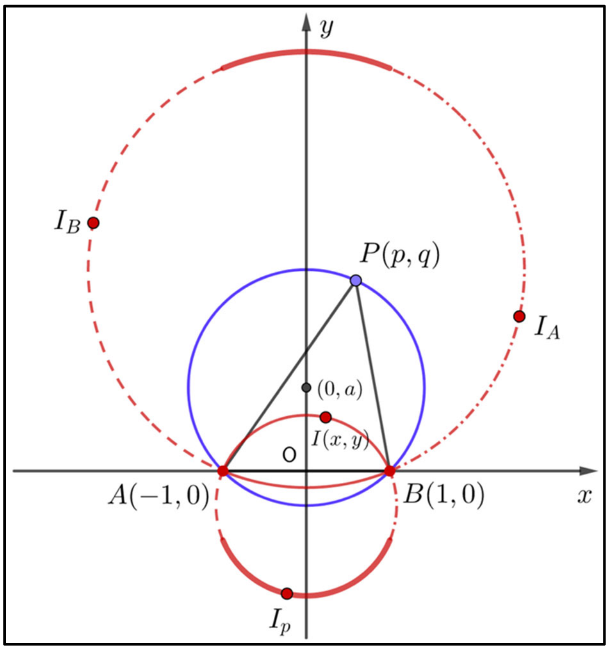

図２　内心・傍心の軌跡

（配布資料をもとに高岡作成）

3　証明の準備

内心と傍心の軌跡が途中で途切れることを理解するための準備として，次の内容を復習した。三角形の面積比／内心・傍心の位置ベクトル表示／楕円・双曲線の定義，楕円・双曲線の方程式の導出の方法と計算の確認，楕円・双曲線の媒介変数表示（パラメータ表示）／重心の軌跡の導出

４　三角形の内心・傍心の軌跡

２点 $A(-1,\ 0)$，$B(1,\ 0)$ を焦点とする楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$$

と表すことができる。ただし，a は定数で $a>1$

この楕円上に点 $P(p,\ q)$ をとり，ΔABP の内心と３つの傍心をそれぞれ I，I_A，I_B，I_P とする。

I，I_A，I_B，I_P の軌跡を求めると

内心 I は　楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{\frac{a-1}{a+1}}=1$

傍心 I_A は　直線 $x=a$

傍心 I_B は　直線 $x=-a$

傍心 I_P は　楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{\frac{a+1}{a-1}}=1$

以上の４点の軌跡を１つの座標平面にまとめると，図３のようになる。

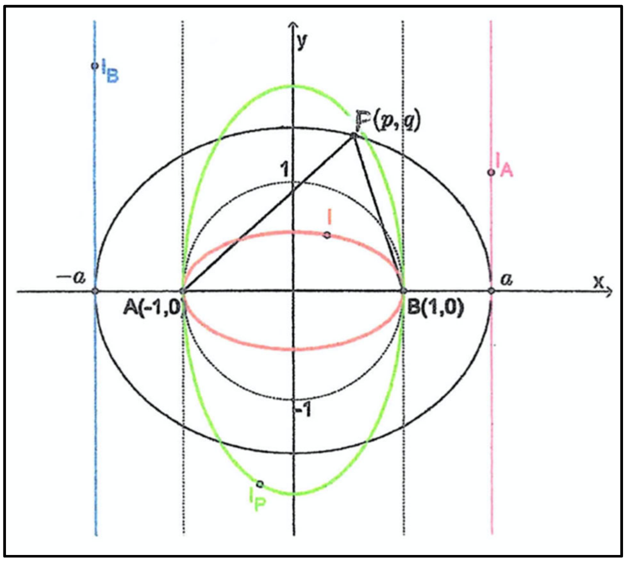

図３　内心 I と３つの傍心 I_A，I_B，I_P の軌跡

定数 a を $a>1$ を満たしながら連続的に変化させると楕円は座標平面全体を埋め尽くすので，点 P は線分 AB を除いた座標平面全体を動くことができる（図４）。

これに呼応して，内心・傍心の軌跡は連続的に変化して図５のようになる。このことは，楕円のパラメータ表示と内心・傍心のベクトル表示を利用して簡明に直接証明できる。

図５からわかるように，傍心 I_A，I_B の軌跡が動く領域は，単位円の両外側の領域（赤色部分と青色部分）を動く。このことから，図２のように途中で途切れる軌跡になることが理解できる。

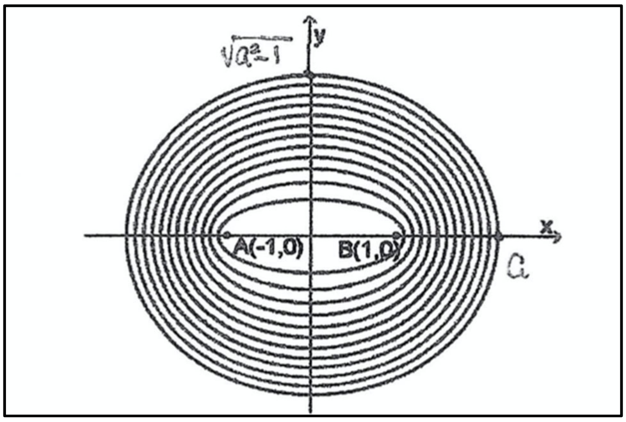

図４　楕円の変化の様子

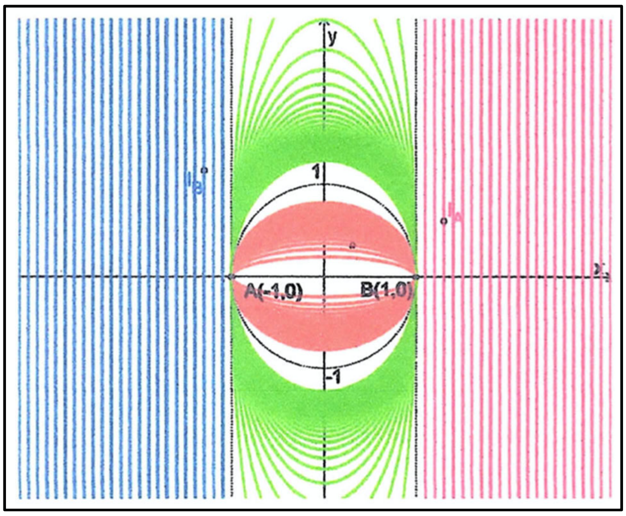

図５　内心 I と３つの傍心 I_A，I_B，I_P の軌跡の変化の様子

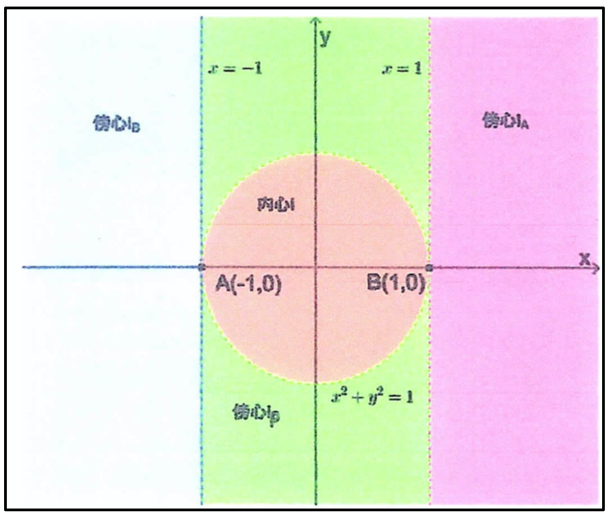

図６　内心 I と３つの傍心 I_A，I_B，I_P が存在する領域

a の値を $a > 1$ の範囲で動かすと，内心 I と３つの傍心 I_A，I_B，I_P が存在する領域は図６のようになる。厳密には，領域は単位円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $x = 1$，直線 $x = -1$ を除いた部分となる。

数学ソフトウェアを活用して，軌跡を求めたり，面白い軌跡を示すだけでなく，点 P を平面全体を動かすとどうなるかの視点をもつことが大切である。

５　頂点から内心・傍心への変換と逆変換

内心・傍心の位置ベクトル表示から，等式

$$\frac{-BP + AP + 2p}{BP + AP + 2} = \frac{2p}{BP + PA}$$

を利用して，式変形して，楕円や直線の媒介変数表示を導出されていた。この等式に気付くことはなかなかできないが，この等式を利用することで，高校の内容だけで簡明に証明することができる。

軌跡を求める際には逆変換を利用して間接的に求めるのが普通であるが，手計算では大変である。ただし，逆変換を求める困難さは式変形を工夫することで解消される。

四ツ谷先生は楕円の媒介変数表示（パラメータ表示）を利用した方法で極めて簡単に逆変換を導出されていた。実際，式

$$p = a\cos\theta\,,\ \ q = \sqrt{a^2 - 1}\sin\theta$$

$$X = \cos\theta\ \ ,\ \ Y = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sin\theta$$

から，a，θ を消去して，
p と q を X，Y を用いて表すことで，逆変換を簡単に求めることができる。

楕円の変化の様子（$a > 1$）を扱われていたが，双曲線の変化の様子（$0 < a < 1$）も大変興味深い結果となるようである。

≪記録　立命館大学大学院教職研究科高岡侑平≫

≪編集　附属校教育研究・研修センター　今宿純男≫