中学校の数学学習における図が媒介した学習過程の検討
――関数授業での極限の理解の過程に着目して――

Analysis of the Learning Process Mediated Using the Pictures
in a Mathematics Class of Junior High School:
Focusing on the Process of Understanding Limit Mathematical Idea
through Function Problem Solving

茂野　賢治
SHIGENO Kenji

Ⅰ　はじめに
1　数学学習の捉え方

近年、数学学習を個人の内的な成長と捉えるだけでなく、社会構成主義の立場からその発達を捉えようとする研究が見られる（e.g.Cobb et al., 1992.[1)];Cobb,2006.[2)]; Sfard,2006.[3)]）。スファードは、学習を個人のディスコース（discourse）の変容と捉え、数学を人が行っているコミュニケーションの一つの型としている（Sfard,2006.; 2008.[4)]）。ディスコースとは、「談話」「言説」などの和訳が存在するが、本稿では「談話」と表記して、その意味をコミュニケーションの一つの形式とする「ひとまとまりの言葉」と定義しておく。この定義は、数学学習とは、学習対象となる数学を正当化していく文脈のディスコースへの参加とするスファードの数学学習観を表すことができると筆者が考えたからである。また、スファードは、数学が言葉だけでなく、数学的な記号や視覚的媒介物からも正当化されることから、数学談話の発達を、例えば図や表などからも捉える必要性を指摘する（Sfard,2008.;2012.[5)]）。これは、社会文化的側面における談話やそこで用いられる道具によって学習は支援されるという学習の捉え方ともいえる（Cobb,2002.[6)];2006.）。このような数学学習の研究が盛んとなっている背景は、近年の数学学習において、既有の知識を持ち合わせ、それらを学習課題解決のために集団で議論し、相互作用を通して新たな知識を創造していく学習が必要とされるからである(Bereiter&Scradamalia,2010.)[7)]。また、これからの知識基盤社会を生きていく市民の育成のために、数学的リテラシーを学校教育や学校数学において具体化していく数学授業及び、その研究が求められているからでもある（清水, 2008.)[8)]。

2　数学学習における図の使用の効果と課題

数学の抽象性や形式性による生徒たちの理解のつまずきを克服する目的で、図が言葉とともに使用される場合がある。中原（2005)[9)]は図的表現を分類し、その活用原理を示している。生徒の数学的な理解のための図の表現、その表現方法の効果や有用性を明らかにしている。一方、課題として、中原はまた、図的表現は形相性、視覚性に富むことから、何らかの準備も必要であることも指摘している。ビショップ（1989)[10)]もまた、図的表現は多くの情報を含んでいるため、生徒たちが図を理解し、活用するためには「視覚的処理能力」「図的情報の解釈」が重要になることを指摘している。

このように、図的表現における他者の解釈は一様でないため、図を用いた生徒や教師の説明は数学的な理解を促進する目的で、使用されたとしても、ある生徒にとっては別の意味に捉えられ、数学的な誤概念となることも予想される。どんな図がいつ、どのように媒介すると生徒たちの数学的な理解につながっていくのかを検討することは、意義のあることといえよう。

3　数学的な考え方と図の役割

図を数学的な理解の共有ツールとして、図の生

成からその過程を描いた研究が存在する。河野(2007)[11] は、算数学習を対象事例として、日常のある現象（事例では、あるマスの目盛りをかさ水量）に見立てた図が、子どもたちの共通理解の基になっていることを指摘している。図が相互交渉の媒体として機能し、学習課題解決に至る知識構築の過程を描いている。そこでは、教師の意図した図ではなく、子どもたちの描いた図が、子どもたち同士の足場かけによって、数学的な理解の共有ツールとなることを図の理解過程の観点から明らかにしている。一方、この研究対象となる学習は算数の概念であり、抽象性の高い数学を対象とした知見とは異なる。なぜなら、先の事例では、ある程度、正確に算数の数量や数式の概念を、図によって置き換えることが可能であることが、前提となっているからである。しかし、抽象的な概念を扱うことの多い中学校以上の数学学習において、極限概念などは、動的、観念上の概念を数学的に合理化する。そのため、極限概念はグラフや図に表象できない場合、あるいは逆にグラフや図に表象すると正確な極限概念の表象にならない場合がある。従って、河野の算数学習で描いた図の役割を中学校以上の数学学習の教室で捉えていくことが課題といえそうである。学習内容を正の数のみを扱う算数学習から、実数に数を拡張し、曲線を解析する学習に広げることや中学校以上のクラスを対象として、生徒が数学的な考え方の理解をするための図の役割を探る課題が残されているといえる。

そこで、本稿では中学校における数学の課題解決過程で生徒の描く図が、談話の中で数学的な考え方の理解にどのような役割を果たしているかを検討することを目的とする。方法としては、数学の「極限」内容を扱った関数授業の参与観察を行い、その記録を分析する。

Ⅱ　事例の概要

1　対象としたクラスの概要と調査方法

授業参与したクラスは、某中等教育学校第3学年（中学校第3学年段階）クラスである。学習内容は、数学科関数領域における授業であり、参与期間約4ヶ月間延べ20時間の内、本事例となる授業は5時間分である。

事例対象とした学校は、日常的に協働的な学習を進めており、参与期間においてもクラス内で、小グループによる話し合い活動などが盛んに行われていた。対象としたクラスはホームルームクラスを、出席番号順に半数に分けた少人数クラス20名（女子10名、男子10名）である。指導教諭は教職歴20年以上の数学教師である。

調査方法として、授業中、ビデオカメラを窓側前方と後方に1台ずつ置き、ホワイトボード(WB)の記述と生徒の発話の様子を、映像として記録した。また、小グループの話し合い時に、1グループ4名の5グループに各1台の割合でICレコーダーを置き、全グループ記録した。教師にICレコーダーを小マイクで付け、音声として授業後の教師インタビューも記録した。生徒たちの使用したプリント及びノートの複写をして、生徒たちの記述を採取した。

分析手段として、ビデオテープ及びICレコーダーの記録、フィールドノーツ、生徒のノートとプリントの複写から毎時間ごとに解釈を修正しながら、中心となる理論的なカテゴリーを導出した。これと、生徒たちと教師の発話データをコード化したものと照らし合わせて、教室談話分析を行った[12]（以下、表中の発話の前の番号は発話コード番号を表す）。

2　極限の考え方とグラフや図の関係

本事例では、抽象性の高い学習内容である「極限」[13] を用いて、課題解決に至った事例を取り上げる。

「極限」とは、「関数 $y = f(x)$ において、x の値を限りなくある値に近づけていくと、$f(x)$ の値が一定の値に近づく場合に、その近づく値を極限値という数学的な考え方である。（図1）は、ある曲線のグラフ上の異なる2点をとって出来る線分ABは、グラフ上では、傾きと呼ばれているものを示している。（図2）は、点Aを固定して点Bを点Aに限りなく近づけていく。その時、現れるであろう線分ABは点Aとただ1点で交わる線の傾きを表すことを示している。この近づくであろう傾きの値を極限値（点Aにおける微

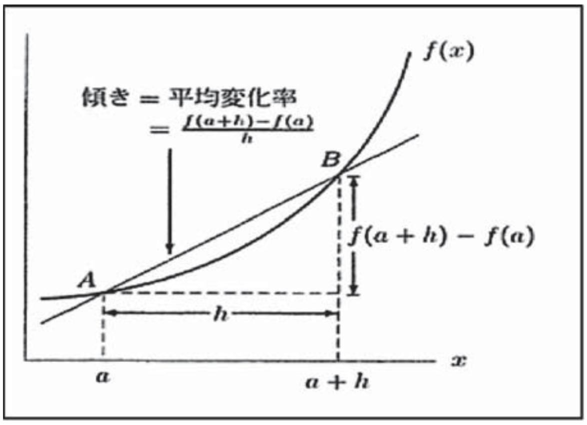


図 1[14)]：平均の考え方

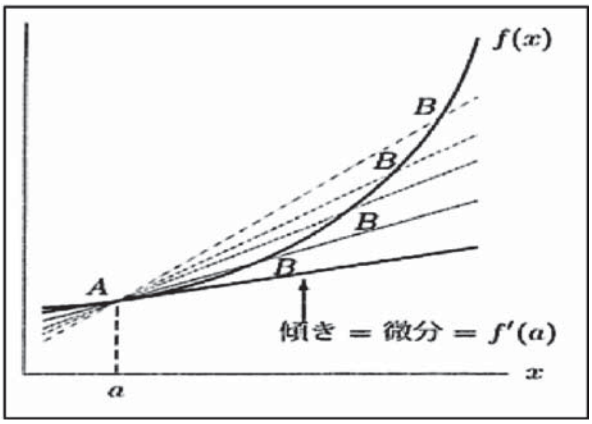


図 2[14)]：極限の考え方

分の値）というのである。

つまり、（図 1）の線分は視覚化されているのであるが、（図 2）の線は本来的には視覚化できない。なぜなら、「極限」とは、あるいは「限りなく近づけていく」とは観念上の考え方といえるので、限りなく近づく動的な物事は正確には視覚化ができないからである。ここが数学概念としての抽象性といえる。

（図 1）の「平均」とは操作的、物理的な現象を数学的な手法で別に表したものである。それは、日常にある現象をそのまま表象しているといえる。しかし、（図 2）の「極限」は「平均」を数学的、合理的に概念化し、数学を用いて創り上げた数学的な考え方である。それは、現象を動かしていく動的、プロセス的なものの結果を予想した概念といえる。従って、「平均」と「極限」では、数学的な段階として異なる概念である（デボラ・ヒューズ＝ハレット他、訳永橋、2010）[14)]。このような数学的に扱う概念の違いが、学習内容として日本では、算数学習における具体のある「平均」と数学学習における抽象のある「極限」の違いといえる。

3　学習課題の説明

本事例では、「極限」（以下本稿では、限りなく小さくする事例を扱うことから「無限小」[15)] と示す）の考え方を用いて課題を解決することをねらって、教師は学習課題を提示する。その課題とは「日常生活で見られるパラボラアンテナの反射の仕組みである光線が反射して一点に集まることを二次関数の学習内容にモデル化して、数学的に反射の仕組みを説明すること」であった。二次関数の曲線に反射する際に、基準となる直線を導くために「無限小」の考え方を用い、課題解決を通して、この抽象的な数学の考え方の理解を促す教師のねらいがあった（図 3[16)] 参照）。

そこで教師は、以下のような映像を生徒に見せて、反射の様子を関数のグラフに描くように伝え、学習課題解決の糸口を生徒たちに掴ませようとした（図 4 参照）。

その後、生徒たちは様々な図を用いながら、協働的にクラスで話し合い、学習課題解決の糸口を見出し、課題解決に向かっていく。
（表 1、表 2 を参照）

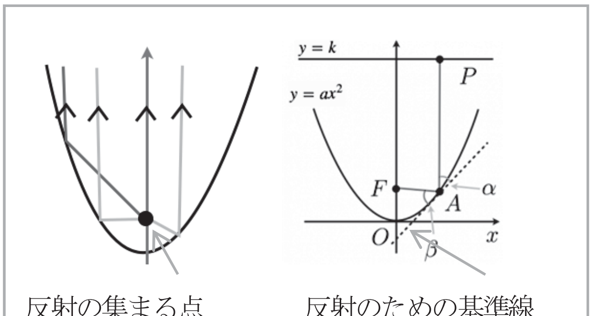


図 3：教師の無限小を活用した解決のイメージ図

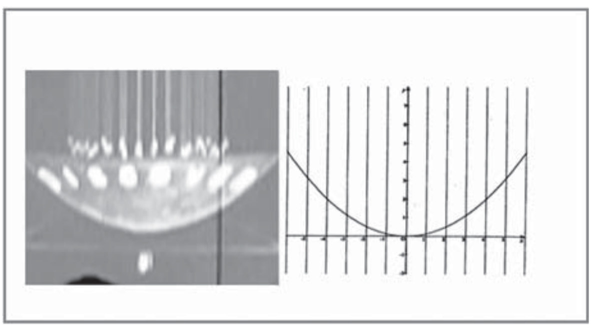


図 4：パラボラアンテナの反射映像とグラフ用紙

表１：学習課題解決に向かう教室談話と図の変容

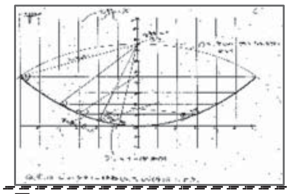
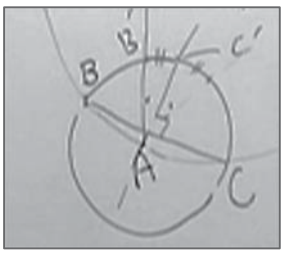
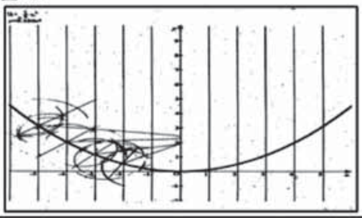
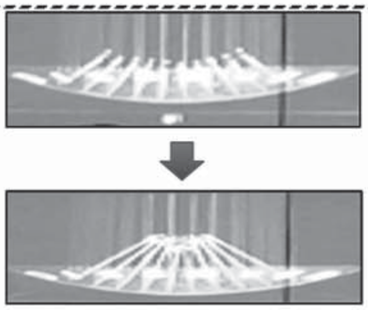
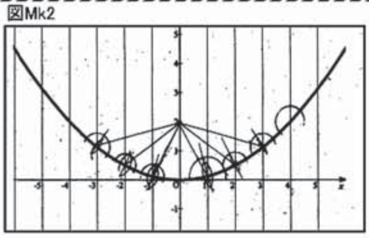
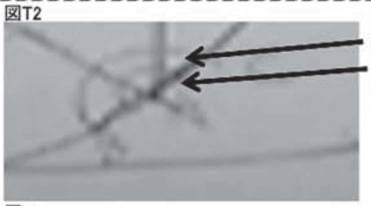
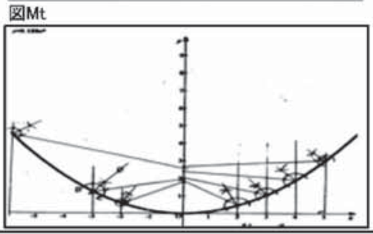
場面	主な教室談話	生徒が表象した図	生徒たちの様子
1	009:Dkくん:「集まる所がどこか分からない。」 010:Mkくん:「真ん中に反射した光線が集まる。」 011:Nmくん:「図で書いた方がいいよ。」	図Dk 	パラボラアンテナの断面に反射した光の様子を生徒たちは、各々グラフ用紙に図として描く。(左図はDkくんが描いた図Dk)
	013:Mkくん:「一点に集まるような作図が出来ない。」 018:Tyくん:「反射面が曲面なので、反射の基準となる線が見いだせないため作図をすると一点で集められない。」 112:Tyくん:「反射の角度が少しずつずれていく。」	図Ty 	実際のパラボラアンテナは断面で光が反射した後、光は一点に集まるはずだが、作図ではy軸に平行な線の反射の道筋を一点で集めると、反射の角度がズレていくことになるので正確に表せないという疑問が出てくる。(左図はTyくんがWBに示した図Ty)
	実際のパラボラアンテナでは、反射面に反射した光は一点に集まる。しかし、パラボラアンテナの反射面を二次関数グラフの曲線に理想化した時の作図による反射した線は、一点に集まるような作図ができないことが疑問点としてあがった。線が一点に集まらない理由として、二次関数のグラフは曲線であり、反射の基準とする線が見出せないため作図をすると一点で集められないもしくは、集まる根拠が見出せないことが疑問点として共有されていった。		
2	021:Nrさん：「グラフに直角をつくって反射させた。」	図Nr 	反射する線を生徒たちは描きたいのだが、曲線に対しての反射の基になる線の存在や線を見いだす根拠が分からず、Nrさんが代表して直角に反射する線をクラスに提示する。(左図はNrさんがWBに示した図Nr)
	022:教師:「なぜ、九十度で反射するのか？」という質問の後に、クラスで議論を重ね、反射する角度は九十度とは限らないが、反射するためには基準となる線が必要であることを、生徒たちは共有していった。		
3	033:教師：「反射のための線とは何か？」 034:Mtさん：「放物線の接線を引くこと。」 035:Pmくん：「接点を定めて垂線を引くこと。」 036:Mkくん：「グラフが曲がるから、完璧に線に沿った垂線が引けないから、何となくその線に沿うような垂線を引いた。」 037:教師：「じゃあ、Mkくん図を描いて説明してみて。」 038:Mkくん:「この線に垂直というか交わるようにしなくてはならないときは、こうなんか微妙にずらさないと(グラフに対して直線を黒い線で引く)この線が曲がっているから無理じゃないですか。だから、何となくこういう線を引く。」	図Mk 	現象である反射と数学との整合性を持たせるために思考した結果、曲線グラフに接する線を反射する線の基になる線として、MkくんがNrさんの描いた図に書き加え、クラスに提示する。(左図はMkくんがWBに示した図Mk)
	039:教師:「どういう風に、その線を引いたの？」という教師の質問に答えるように、Mkくんは前に出て、WBに図を描き、説明をする。		
4	041:Mkくん:「だから円っていうか。とるところ小さくすれば、大体同じ線が書ける。」 042:教師:「とるところ小さくするってどういうこと？」 043:Mkくん:「円を書いたときに、(手で円を書くようにしながら)」 045:Mkくん:「ここに中心を置いたときに、(接点Aを指して)こう円をとったときにここととここを結ぶんですよ。そうすると大体、沿った線が引けるじゃないですか。(円を書き、グラフのそれぞれの交点と接点を通る線を引く)だからこの円を小さくして、このグラフの太い線の中に、直線を引ければ、大体沿った線になる。やばい、ズレた。」	図Mk+ 	円を描くことでできる線分が大体、曲線グラフに沿った線分に見なすことができることとその線を反射の基とする線に見なすことをMkくんはさらに、図に書き加えクラスに提示する。(左図はMkくんがWBに示した図Mk+)
	この後、教師は図的表象としてクラス全体に提出されたMkくんの考え方をクラス全体に再提出する。そこでは、クラス全体にこの図の表象する意味の確認と疑問などを出す機会を作り、生徒たちはそれぞれ議論を交わした。		
5	051:Mkくん:「それを結ぶと、大体沿った、グラフに沿った直線が書けるじゃないですか。」 052:教師:「こう結ぶ。(BとCを結んで線分を作る)」 053:Mkくん:「で、その円の直径を段々小さくしていくと、そのズレる幅が小さくなるから大体グラフに沿ってくる。」 054:教師「この考えにしようと思ったことは、何かコメントない？」 055:Tyくん「とにかくその(Mkくんの書いた図を指しながら)曲がってるグラフに対して、何かしら直線を引かないと上手くいかないんですよ。それは点Aを中心にして、等距離の点を結ぶっていうのが、こうなんていうか書きやすくて分かりやすくって、円を小さくすれば誤差が減る。」	図T1 	円を小さく描くことで、線分BC（本稿では以後「円内の線分」という表記にする。）は、より曲線グラフに沿うという説明をMkくんが行った。それを共有し、作図による課題解決方法の確認をするために、教師は、Mkくんの指示した図を描きクラスに提示する。(左図は教師がWBに描いた図T1)

表２：学習課題解決のきっかけとなる教室談話と図の変容

場面	主な教室談話	生徒が表象した図	生徒たちの様子
6	生徒は、それぞれのグラフ図において先の話し合いで導き出した方法から円を描き、教室全体がコミュニティーの場として反射の基準となる線を導き出して反射の線を描いていく。Mkくんは円を描く大きさが大きいとグラフに沿う線分が離れてしまうので、円を小さく描くことがこの操作活動においては反射の交点を一致させるために必要であることをクラスで発話(053)した。しかし、クラスでは、Mkくんはじめ誰もが円をどんなに小さく描いても、反射の点が一致する図は作成できない。		
	053:Mkくん「円を小さくした方がやっぱ、正確。」	図Mk1 	小円を描くとある1点に近づくことはあるが、1点には集まることのないMkくんの描いた図Mk1
7	教師は、反射の映像を生徒たちが見ることで、図の操作活動の改善から考え方を改善する必要性に気づかせようとした。つまり、図による無限小の考え方の表出は、事象に近づける図にはできるが、正確には事象を表象できない。このことに、事象の映像と生徒たちが自ら作成した図との比較を通して、生徒たちに気づかせたい教師の意図があった。これは、数学学習において、操作活動だけに終始しない思考活動へ生徒たちを向かわせる教師の意図でもあった。		
	071:教師:「これ、ボールの実験では、うまくいってるんだよ。あなたたちのズレもきちんと書けば、うまくいくはずなんだよね。ってことは、この図の考えとしては納得してるんでしょ。ねえ、修正すべき所ある？」 072:Mkくん:「えーだから、間違えている確率を減らす。ズレてる確率を同じにする。」 073:教師:「あーズレてる確率を同じにしたい。なるほど。ズレ方の。」 074:Mkくん:「ぴったりは無理だから。」 075:教師:「おーいいね。いいね。そういう手もある。あとは、改善すべきとこない？」		生徒たちは、反射の映像(左は映像の一部)を見て、確かに事象として反射した光線が一点に集まることを確認した。
8	教師は、生徒たちが図の操作活動の修正、改善から思考活動の修正、改善へ移行していけるように、反射の基になる円内の線分が、なぜ円をさらに小さく描くことで、求める線に近づいていくのか生徒たちに議論させていった。		
	083:教師:「そうするとBCに対する垂線を引いたということは、この図からいけばいいんだよね。BCの垂線引けてる。より正確に引くことを考えたら改善する所ある？」 084:Mkくん:「BCをゼロに等しくする。無理だけど。」 085:Nmくん:「だけど、無理だろ。」 086:Mkくん:「だけど、そうやらないと無理じゃね。ぴったりするには。」 （中略） 089:Nmくん:「BCのこと消すんじゃないのか。」	図Mk2 	Mkくんが、円内の線分の長さをゼロにして、反射の交点を1点に集めた図Mk2
9	その後、生徒たちは、話し合いを参考に円をいろいろな大きさにして反射の様子をグラフ図に描く。円が大きいと一致しない操作活動と円を小さく描くと近づいていくが、一致することはない操作活動がきっかけとなり、そして教師が反射の基になる線について質問を繰り返したことで、再度、話し合いによる思考活動へクラス全体が移行した。		
	091:教師:「何で円小さくするといいんだ？」 092:Mkくん:「えっだって、その円の長さがゼロになるから、ゼロで書けるとしたらそれが、その垂直な線のもとだから。」 093:教師:「とすると、そっか、そっかこれさ、ちょっとピンと来た人いない？ピンと来た人いる？これさ、円ちっちゃくするとさ、これ例えば、こういう状態を考えているんですよね。緑色の円を例えば、(グラフにさらに小さい半円を書き加えながら)こういう円を考えるんだよね。こういう円考えると、何が黒い円と違ってくるんだ？」 094:Fmさん:「何か変化の割合っていうか、線分が、短くなる。」 095:Mkくん:「つなげたときに、こうズレが小さくなる。(手でグラフの形状をつくる身振りを加えて)」 096:Mtさん:「グラフに対するズレが小さくなるから。」	図T2  図Mt 	教師が説明のために(外側の黒い半円)の(内側に描いた緑色の半円)の図T2 Mtさんが、円内の線分の長さを限りなくゼロに近づけても、反射の交点が1点に集まらない図Mt
10	この後、生徒たちは円内の線分が小円を描くことで近づいていく線を基準とすることが、反射の基になることを理解し、課題を解決した。		

Ⅲ　事例の考察

1　図が媒介した学習過程

スファードの数学学習の概念では、思考とはコミュニケーションであり、そのコミュニケーションすなわち、数学談話に参加することが数学学習である。数学学習では、数学コミュニティーのメンバーになることが求められる。また、数学的な理解を数学談話の発達と捉え、その発達は談話の変化としている（Sfard,2008.;2012.）。本事例の対象とした教室においては、生徒たちが、図を媒介として数学コミュニティーのメンバーとなり、数学談話が発達して課題解決のきっかけを掴んだといえる。それは、特に（表1、場面4）では小円を描く理由や（表2、場面9）での小円をさらに小さくする理由をクラス全体で議論することで、生徒たちは数学談話のメンバーになっていったといえる。談話発達において、本事例では、二つの図の役割が存在する。一つは、「無限小」の考え方の創出を支援する役割である。学習課題解決のために、生徒個々が表出する図は様々であるが、ある生徒の描いた図をもとに、他の生徒たちがその図に書き加え、話し合うことで、数学的な考え方を修正し、課題解決の方策として「無限小」の考え方が創出された。そこには、二本の線を同一図に示すことによって「無限小」の考え方全体を図が表象した（表1、場面4の図Mk+）。その図が、生徒個々の持っている課題解決のためのイメージを集約したといえる。つまり、図が数学談話による他者との相互作用において媒介したことで、課題解決のための考え方が集約されるプロセスがそのまま「無限小」の創出のプロセスとなっていたといえる。

もう一つは、数学的な考え方が本人だけでなく、他者にも理解され、数学的な考え方が伝わることを支援する役割である。つまり、数学的には正確に図に表すことができない「無限小」を、本人が理解するだけでなく、他者にも理解してもらい、伝えるための役割である。

本来、「無限小」の考え方を表象すると、小円や円内の線分は視覚化された状態では存在しない。図Mk2は、「無限小」の考え方を正確に表象できていない矛盾のある図である。しかし、この図は「無限小」を表象するために、小円を描き円内の線分をゼロに近づけたプロセスと結果を同時に表象する図として、Mkくんは理解したといえる。それは、Mkくんの談話の変容（表2、場面7,072から場面8,084）である図の修正から考え方の修正を行ったことに見てとれる。そして、Nmくんも Mkくんに同意した談話に変容させたことから、理解したといえる（表2、場面8,085から089）。一方、Mtさんの描いた図Mtは、どんなに小円を描き円内の線分をゼロに近づけたとしても、反射の交点が一点に集まる図は表象できないことを示している。パラボラアンテナに反射した光線が一点に集まるという現実の事象の仕組みを、「無限小」の考え方を用いてグラフに表現することが困難であることをMtさんは感じていたといえる。

本事例において、現実の事象と「無限小」の考え方を用いたグラフ図による表象のそれぞれの矛盾に気づくことが、すなわち「無限小」の理解といえる。この教室においては、MkくんとMtさんともにお互い自分自身の最後に描いた図Mk2、図Mtに対して納得している。つまり、自分の描いた図が、表象として矛盾が生じていることを理解している（Mkくん:表2、場面8,086;場面9,092;Mtさん:場面9,096より）ので、「無限小」の理解につながったといえる。

ここには、「無限小」の考え方は図による表象が正確には困難であることと図Mk2に対して、数学的に抽象性の高い概念のプロセスと結果を同時に表象する図としての意味理解があったので、「無限小」の理解に至ったといえる。本来、人間の操作活動や視覚化できない「無限小」の考え方を図によって表象し、かつその表象は生徒たち個々によって異なるにもかかわらず、課題解決のために、その考え方の理解ができたのである。これは、生徒たちが図を「無限小」の考え方を表象するものとして捉えたのではなく、抽象性の高い概念は、図では正確に表象できないことを、まず理解できたからといえる。つまり、本事例においては、生徒たちの中で、図による表象が正確には困難であるという図の意味理解が行なわれ、そこから「無限小」という旧来からの数学で構築されている数学的な

考え方の理解になったといえる[17]。

本事例では、現実の事象としても、数学的な考え方としても同時には、正確に表象することができない図が、数学学習における談話の中で、生徒たちの相互作用に媒介することで、数学的に抽象性の高い概念の創出やその理解を支援する役割が示せた。

Ⅳ　おわりに

この教室では、生徒たちの個々に描く図の操作活動や他者の図の作成方法や操作活動を比較し、現実の事象の映像を観ることで、数学的な考え方を表象する図の刷新や更新が存在した。生徒たちはお互いに、図が媒介する談話を通して、「無限小」の創出及び、その考え方を理解したといえる。

事象や考え方を正確には表象できない図には、生徒たちの操作活動や体験を通した図そのものの意味理解を支援する役割があった。つまり、数学的に抽象性の高い概念の創出と理解を促進する学習過程では、図が表出した場合、生徒たちが正確には表象困難な図を操作し、出来上がった個々の図を見比べ説明することで、抽象性の高い概念理解が支援されるといえる。

本事例で、生徒たちが導き出した「無限小」の考え方は、対象としたクラスにとって日本の学習課程では、高等学校以上で学習する発展的な内容である[18]。しかし、図の媒介の仕方によっては、抽象性の高い概念を創出し、生徒たちはその考え方を理解することが明らかになった。一方、そこには既有知識との関係、つまり対象とする学年やそれまでの学習との関係を検討するための事例の蓄積の必要があるといえる。それによって、事象や概念を正確には表象できない図の役割がより精緻に捉えられ、この教室以外にも一般化されると考える。これを今後の研究課題としたい。

【註および引用文献】

1）Cobb,P.,Wood,T.,Yackel,E.,&Perlwitz,M.（1992）. A follow-up assessment of a second-grade problem-centered mathematics project. *Educational Studies in Mathematics,23*,pp.483-504.

2）Cobb,P.（2006）. Mathematics Learning as a Social Practice, J. Maasz, W. Schloeglmann（Eds.）, *New Mathematics Education Research and Practice, Sense Publishers*, pp.147-152.

3）Sfrd,A.（2006）. Participationist Discourse on Mathematics Learning, J. Maasz, W. Schloeglmann（Eds.）, *New Mathematics Education Research and Practice,Sense Publishers*, pp.153-170.

4）Sfrd,A.（2008）. *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

5）Sfrd,A.（2012）. Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research, *International Journal of Educational Research,* 51–52, pp.1–9.

6）Cobb,P.（2002）.Reasoning With Tools and Inscriptions. *The Journals of The Learning Sciences,11*（2&3）, pp.187-215.

7）Bereiter,C.&Scardamalia,M.（2010）.Can Children Really Create Knowledge? *Canadian Journal of Learning and Technology,36*（1）, pp.1-15

8）清水美憲.（2008）.「今日的数学的リテラシー論からみた学校数学の現状と課題」. 科学教育研究, *32*,4, pp.321-329.

9）中原忠男.（2005）.『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社, pp.232-250.

10）Bishop,A.J.（1989）.Review of Research on Visualization in Mathematics Education. *Focus on Learning Problem in Mathematics*,Vol.11,No1, p.11.

11）河野麻沙美.（2007）.「算数授業における図が媒介した知識構築の分析 -「立ち戻り」に支えられた子どもたち同士の足場がけに着目して -」. 質的心理学研究, 6,6, pp.25-40.

12）茂野賢治.（2014）.「質感の記述が、解釈によって現場の事実に勝ることはあるのだろうか」. 日本質的心理学会機関誌, 質的心理学フォーラム, 2014,Vol.6, pp.82-84. を参照し、教室の質感を保管しつつ、数学的な正確さを失わないように談話分析を行った。

13）志賀浩二.（2013）.『数学が生まれる物語 第 4 章 座標とグラフ』, 岩波現代文庫, pp.150-165. を参照し、本稿では極限のイメージを主に置く記述を行った。

14）デボラ・ヒューズ＝ハレット他, 訳永橋英郎.（2010）.『概念を大切にする微積分 1 変数』, 日本評論社, pp.2-84. を参照し図 1, 図 2 を引用した。

15）小島寛之.（2012）.『数学入門』, ちくま書房, pp.084-121. を参照し、本稿では「極限」を「無限小」と示した。

16）「パラボラアンテナの原理と放物線の性質」.『高校数学の美しい物語～定期試験から数学オリンピックまで 800 記事～』（2015/02/05）. http://mathtrain.jp/antenna.（2016/9/27 参照）より図 3 を引用した。

17）教師は、本事例において生徒たちが課題解決のために考えた方法を「無限小」、「極限」という数学的な専門用語として一切使用していない。

18）文部科学省.（2009）.『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』, p.39. によると「極限」は「数学Ⅲ」において履修することになっている。