論理関数の表現

- 真理値表
- 論理式：変数を演算記号で結合

  ⤷ 変形可能

  ⇒ さまざまな表現

論理関数の表現

- **最小項**

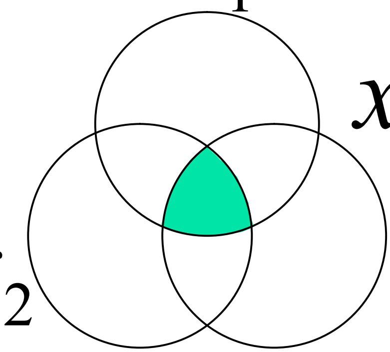
n個の変数 ⇒ n変数の論理**積**

変数:肯定, 否定 $\Rightarrow 2^n$ 個

（例）

3変数

$$x_1\bar{x}_2x_3\cdots x_n$$



論理関数の表現

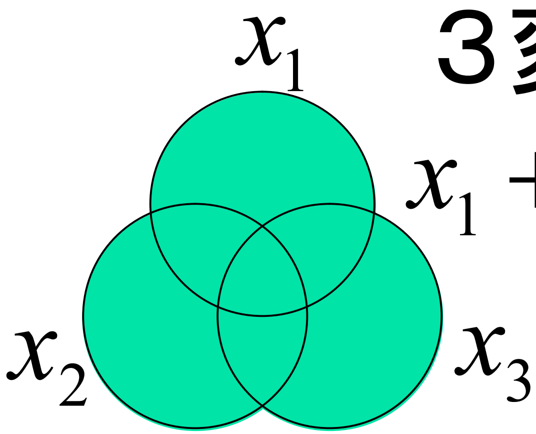
- 最大項

n個の変数 ⇒ n変数の論理和

変数：肯定，否定 $\Rightarrow 2^n$ 個

（例） ３変数

$$\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + \cdots + \overline{x}_n$$



$$x_1 + x_2 + x_3$$

論理関数の表現

■ 最小項

x_1	x_2	x_3	最小項	最大項
0	0	0	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	$x_1 + x_2 + x_3$
0	0	1	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	$x_1 + x_2 + \bar{x}_3$
0	1	0	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	$x_1 + \bar{x}_2 + x_3$
0	1	1	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$
1	0	0	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 + x_2 + x_3$
1	0	1	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	$\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$
1	1	0	$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$
1	1	1	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$

0 1 1

0 : 否定
1 : 肯定

$\bar{x}_1 x_2 x_3$

論理関数の表現

- 最小項と最大項

x_1	x_2	x_3	最小項	最大項
0	0	0	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	$x_1 + x_2 + x_3$
0	0	1	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	$x_1 + x_2 + \bar{x}_3$
0	1	0	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	$x_1 + \bar{x}_2 + x_3$
0	1	1	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$
1	0	0	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 + x_2 + x_3$
1	0	1	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	$\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$
1	1	0	$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$
1	1	1	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$

$\overline{\text{最小項}}$

ド・モルガンの定理

$$\overline{x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3} = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$$

論理関数の表現

- 主加法標準形

f=1に着目

最小項を＋で結合

$$f = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

論理関数の表現

- 主乗法標準形

f=0に着目

最大項を・で結合

$$f = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_2 + x_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + x_3)$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

論理関数の表現

- シャノン展開

C. E. Shannon

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n)$$
$$= \bar{x}_1 F(0, x_2, \cdots x_n)$$
否定
$$+ x_1 F(1, x_2, \cdots x_n)$$
肯定

論理関数の表現

- シャノン展開(証明)

(i) $x_1 = 0$ のとき

$$(\text{左辺}) = F(0, x_2, \cdots, x_n)$$

$$(\text{右辺}) = \overline{0} \cdot F(0, x_2, \cdots, x_n) + 0 \cdot F(1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= F(0, x_2, \cdots, x_n) = (\text{左辺})$$

論理関数の表現

- シャノン展開(証明)

(ii) $x_1 = 1$ のとき

$$(\text{左辺}) = F(1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$(\text{右辺}) = \overline{1} \cdot F(0, x_2, \cdots, x_n) + 1 \cdot F(1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= F(1, x_2, \cdots, x_n) = (\text{左辺})$$

論理関数の表現

- シャノン展開と主加法標準形

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

すべての変数について，

シャノン展開

論理関数の表現

- 主加法標準形への変換

x_i を含まない項

$(x_i + \overline{x}_i) = 1$ を掛ける

（例）$f = x_1 x_2 + x_2 x_3$

$= x_1 x_2 (x_3 + \overline{x}_3) + (x_1 + \overline{x}_1) x_2 x_3$

$= x_1 x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$

論理関数の表現

- シャノン展開と主乗法標準形

$$(1)\ \overline{F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

すべての変数について，

シャノン展開

$$(2)\ \overline{\overline{F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}}$$

ド・モルガンの定理を適用