前回の講義の復習

- シャノン展開

C. E. Shannon

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

$$= \bar{x}_1 F(0, x_2, \cdots x_n) + x_1 F(1, x_2, \cdots x_n)$$

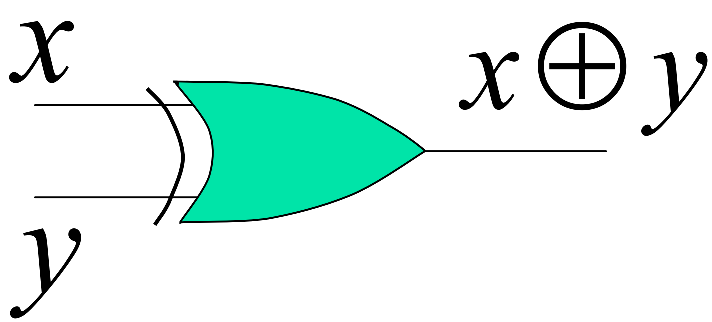
否定

肯定

論理関数の表現

- リード-マラー標準形
  - 1, AND, XOR

$$x \oplus y = \bar{x}y + x\bar{y}$$



x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

論理関数の表現

- リード-マラー標準形の導出

（1）全変数について，シャノン展開

$$F(x_1, x_2) = \bar{x}_1 F(0, x_2) + x_1 F(1, x_2)$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 F(0,0) + \bar{x}_1\, x_2 F(0,1) + x_1\, \bar{x}_2 F(1,0) + x_1 x_2 F(1,1)$$

論理関数の表現

- リード-マラー標準形の導出

（２）$x + y = x \oplus y \oplus xy$

$$F(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 F(0,0) \oplus \bar{x}_1\, x_2 F(0,1) \oplus x_1\, \bar{x}_2 F(1,0) \oplus x_1 x_2 F(1,1)$$

$$\because\ x_1\bar{x}_1 = 0, \quad x_2\bar{x}_2 = 0$$

論理関数の表現

- リード-マラー標準形の導出

（３）$\overline{x} = 1 \oplus x$

$$\overline{x}_1 \overline{x}_2 F(0,0) = (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2) F(0,0)$$

$$\overline{x}_1 x_2 F(0,1) = (1 \oplus x_1) x_2 F(0,1)$$

$$x_1 \overline{x}_2 F(1,0) = x_1 (1 \oplus x_2) F(1,0)$$

論理関数の表現

- リード-マラー標準形の導出

（4）$a(x \oplus y) = (ax \oplus ay)$

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2) = F(0,0) & \\
& \oplus x_1 \left[F(0,0) \oplus F(1,0) \right] \\
& \oplus x_2 \left[F(0,0) \oplus F(0,1) \right] \\
& \oplus x_1 x_2 \left[F(0,0) \oplus F(1,0) \right. \\
& \qquad \left. \oplus F(0,1) \oplus F(1,1) \right]
\end{aligned}
$$

論理関数の表現

- リード-マラー標準形(参考)

0 だけ　$0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 = 0$

1:偶数個　$1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 0 = 0$

1:奇数個　$1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 0 = 1$

$$0 \oplus x = x \oplus 0 = x$$

ブール代数の性質

- べき等則

(a) $x + x = x$

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0$$
$$x = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 1$$

(b) $x \cdot x = x$

$$x = 0 \Rightarrow 0 \cdot 0 = 0$$
$$x = 1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

ブール代数の性質

- 吸収則（1）

(a) $1 + x = 1$

$$x = 0 \Rightarrow 1 + 0 = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 1$$

(b) $0 \cdot x = 0$

$$x = 0 \Rightarrow 0 \cdot 0 = 0$$
$$x = 1 \Rightarrow 0 \cdot 1 = 0$$

$1 \Leftrightarrow 0$

$+ \Leftrightarrow \cdot$

双対性

ブール代数の性質

- 吸収則(2)

$$\text{(a)}\ x + x \cdot y = x$$

$$x + x \cdot y = x \cdot (1 + y) = x \cdot 1 = x$$

$$\text{(b)}\ x \cdot (x + y) = x$$

$$\begin{aligned} x \cdot (x + y) &= x \cdot x + x \cdot y \\ &= x + x \cdot y = x \end{aligned}$$

ブール代数の性質

- 相補則

$$\text{(a)}\ x+\overline{x}=1$$

$$x=0 \Rightarrow 0+\overline{0}=0+1=1$$

$$x=1 \ \Rightarrow \ 1+\overline{1}=1+0=1$$

$$\text{(b)}\ x\cdot\overline{x}=0$$

$$x=0 \Rightarrow 0\cdot\overline{0}=0\cdot 1=0$$

$$x=1 \ \Rightarrow 1\cdot\overline{1}=1\cdot 0=0$$

ブール代数の性質

- 二重否定

$$\overline{\overline{x}} = x$$

$$x = 0 \Rightarrow \overline{\overline{0}} = \overline{1} = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \overline{\overline{1}} = \overline{0} = 1$$

ブール代数の性質

- 双対関数
  - AND-OR⇒OR-AND

$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の双対関数

$$F^d(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)}$$

ブール代数の性質

- 双対関数
  - ド・モルガンの定理

$$\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}} = x + y$$

$$\overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}} = x \cdot y$$

$+ \Leftrightarrow \cdot$

双対関数

ブール代数の性質

- 双対関数の例

$$F(x_1, x_2, x_3) =$$

$$\bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

$+ \Leftrightarrow \cdot$

$$F^d(x_1, x_2, x_3) =$$

$$(\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + x_3)$$

$$\cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$$

ブール代数の性質

自己双対関数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F^d(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

自己反双対関数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{F^d(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

OR-AND形論理式

- OR項を・(AND記号)で結合

(例)

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x}_1 + x_3) \cdot (\overline{x}_2 + \overline{x}_3)$$

OR-AND形論理式

- 作り方

$$(1)\ F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow F^d(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$F^d(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})}$$

$$(2)\ F^d(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$+ \Leftrightarrow \cdot$$

OR-AND2段回路

- 3変数多数決

$$\overline{f} = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_3\overline{x}_1$$

⇓ 肯定⇔否定

$$f^d = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

⇓ ＋ ⇔ ・

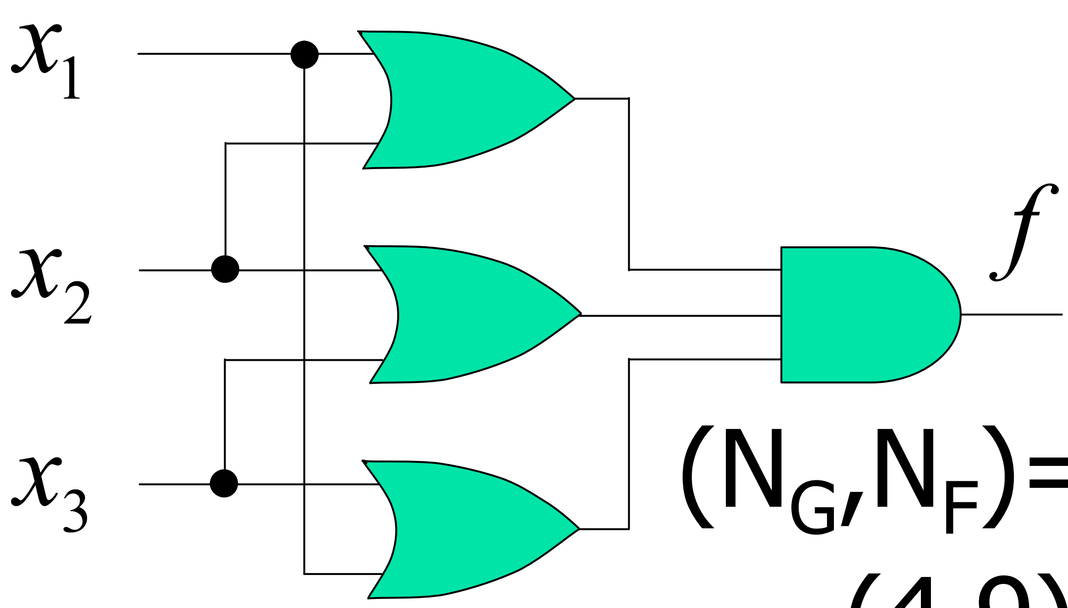
$$f = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)$$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

OR-AND2段回路

- 3変数多数決

$$f=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$$



$(N_G,N_F)=(4,9)$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1