

論理式の簡単化

■ AND-OR形論理式

- AND項を+ (OR記号) で結合

(例)

$$f = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$$

- 簡単化のポイント: 圧縮操作

$$xP + \bar{x}P = (x + \bar{x})P = 1 \cdot P = P$$

論理式の簡単化

■ AND-OR形論理式(例)

$$\begin{aligned}
 f &= \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \\
 &= (\bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3) \\
 &\quad + (x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3) \\
 &= (\bar{x}_1 + x_1) x_2 x_3 + x_1 (\bar{x}_2 + x_2) x_3 \\
 &= x_2 x_3 + x_1 x_3
 \end{aligned}$$

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

$$\begin{aligned} xP + \bar{x}P &= (x + \bar{x})P \\ &= 1 \cdot P = P \end{aligned}$$



繰り返し



Willard Van Orman Quine

Born: 25 June 1908 in Akron, Ohio, USA

Died: 25 Dec 2000 in Boston, Massachusetts, USA

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

<手順1>

論理関数 \Rightarrow 主加法標準形

(i) $f = 1$ の最小項を $+$ で結合

(ii) シヤノン展開

(iii) $(x_i + \bar{x}_i)$ を掛ける

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

<手順1の例>

$$\begin{aligned}
 f = & \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \\
 & + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \\
 & + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \\
 & + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4
 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

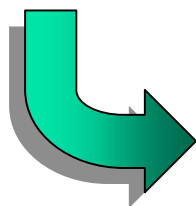
論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

<手順2a>

(1) 最小項⇒グループ

(例) $G_1 = \{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\}$



肯定型変数の個数

論理式の簡単化

- クワイン-マクラスキーの方法
＜手順2b＞

(2)隣接グループ⇒圧縮

$$xP + \bar{x}P = (x + \bar{x})P = P$$

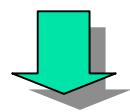
論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

(手順2の例)

$$xP + \bar{x}P = (x + \bar{x})P$$

組合せ



複数

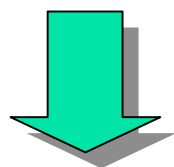
k	G_k	最小項	略号
0	G_0	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	M_1
1	G_1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	M_2
		$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	M_3
2	G_2	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	M_4
		$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	M_5
3	G_3	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	M_6
		$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	M_7
4	G_4	$x_1x_2x_3x_4$	M_8

論理式の簡単化

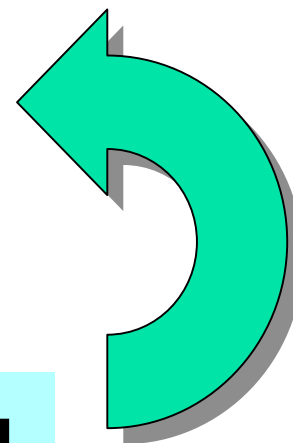
■クワイン-マクラスキーの方法

<手順3>

圧縮操作



用いた最小項⇒印



圧縮
可能

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

k	G_k	最小項	略号	印	$G_{k'}$	1次圧縮項	略号
0	G_0	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	M_1	●	$G_{0'}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$	$M_1 + M_2$
1	G_1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	M_2	●	$G_{1'}$	$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	$M_1 + M_3$
		$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	M_3	●			
2	G_2	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	M_4		$G_{2'}$		
		$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	M_5				
3	G_3	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	M_6				
		$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	M_7				
4	G_4	$x_1x_2x_3x_4$	M_8		$G_{3'}$		

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

k	G_k	最小項	略号	印	$G_{k'}$	1次圧縮項	略号
0	G_0	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	M_1	●	$G_{0'}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$	$M_1 + M_2$
1	G_1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$	M_2	●	$G_{1'}$	$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	$M_1 + M_3$
		$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	M_3	●		$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$M_2 + M_4$
2	G_2	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	M_4	●	$G_{2'}$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$M_3 + M_5$
		$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	M_5	●		$\bar{x}_1x_3x_4$	$M_4 + M_6$
3	G_3	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	M_6	●	$G_{3'}$	$\bar{x}_1x_2x_4$	$M_5 + M_6$
		$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	M_7	●		$x_2\bar{x}_3x_4$	$M_5 + M_7$
4	G_4	$x_1x_2x_3x_4$	M_8	●	$G_{3'}$	$x_2x_3x_4$	$M_6 + M_8$
						$x_1x_2x_4$	$M_7 + M_8$

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

$G_{k'}$	1次圧縮項	略号	印	$G_{k''}$	2次圧縮項	略号
$G_{0'}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$	$M_1 + M_2$		$G_{0''}$		
	$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	$M_1 + M_3$				
$G_{1'}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$M_2 + M_4$		$G_{1''}$		
	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$M_3 + M_5$				
$G_{2'}$	$\bar{x}_1x_3x_4$	$M_4 + M_6$		$G_{2''}$	x_2x_4	$M_5 + M_6 + M_7 + M_8$
	$\bar{x}_1x_2x_4$	$M_5 + M_6$	●			
	$x_2\bar{x}_3x_4$	$M_5 + M_7$	●			
$G_{3'}$	$x_2x_3x_4$	$M_6 + M_8$	●	$G_{3''}$		
	$x_1x_2x_4$	$M_7 + M_8$	●			

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

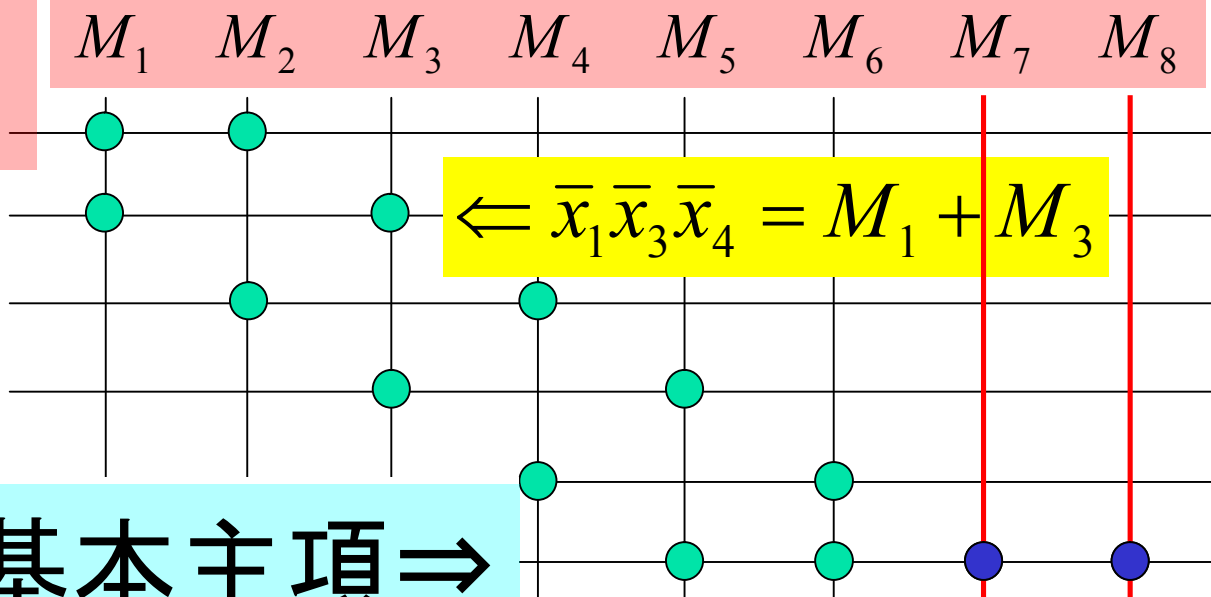
$G_{k'}$	1次圧縮項	略号	印	$G_{k''}$	2次圧縮項	略号
$G_{0'}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ $\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	$M_1 + M_2$ $M_1 + M_3$		無印		
$G_{1'}$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$M_2 + M_4$ $M_3 + M_5$		$G_{1''}$	主項	
$G_{2'}$	$\bar{x}_1x_3x_4$ $\bar{x}_1x_2x_4$ $x_2\bar{x}_3x_4$	$M_4 + M_6$ $M_5 + M_6$ $M_5 + M_7$	● ●	$G_{2''}$	x_2x_4	$M_5 + M_6 + M_7 + M_8$
$G_{3'}$	$x_2x_3x_4$ $x_1x_2x_4$	$M_6 + M_8$ $M_7 + M_8$	● ●	$G_{3''}$	最後に残った項	

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

<手順4> (1) 包含図

最小項



主項

$$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} = P_1$$

$$\overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} = P_2$$

$$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} = P_3$$

$$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} = P_4$$

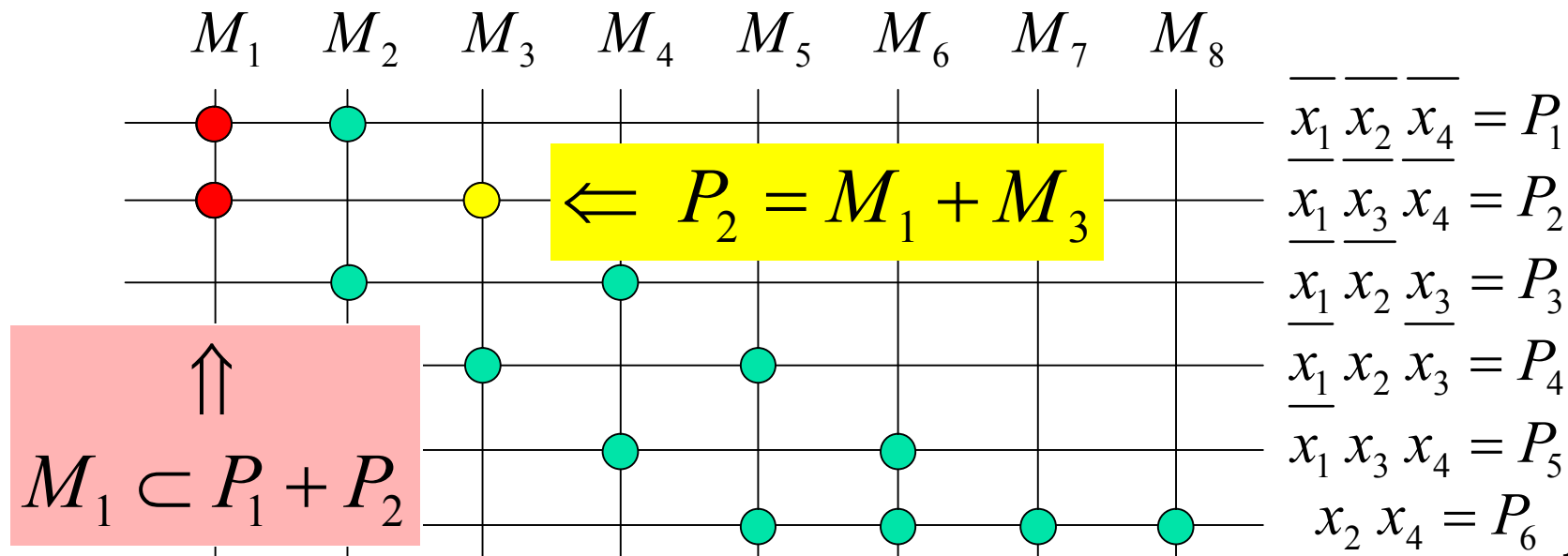
$$\overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} = P_5$$

$$x_2 x_4 = P_6$$

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

<手順4> (2a)主項の選択



論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

<手順4> (2b)主項の選択

$$M_1 \subset P_1 + P_2, \quad M_2 \subset P_1 + P_3,$$

$$M_3 \subset P_2 + P_4, \quad M_4 \subset P_3 + P_5,$$

$$M_5 \subset P_4 + P_6, \quad M_6 \subset P_5 + P_6,$$

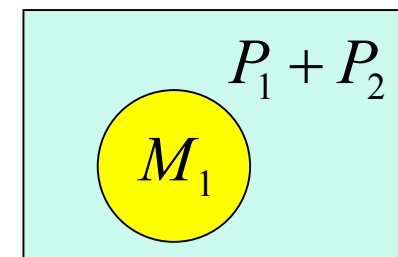
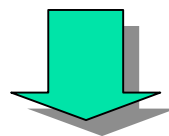
$$M_7 \subset P_6, \quad M_8 \subset P_6$$

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

<手順4> (2c)主項の選択

すべての最小項を含む



$$g = (P_1 + P_2)(P_1 + P_3)(P_2 + P_4)$$

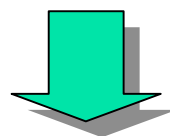
$$\cdot (P_3 + P_5)(P_4 + P_6)(P_5 + P_6)P_6P_6 = 1$$

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

<手順4> (2d) 主項の選択

$$g = P_2P_3P_6 + P_1P_2P_5P_6 \\ + P_1P_3P_4P_6 + P_1P_4P_5P_6 = 1$$



最簡

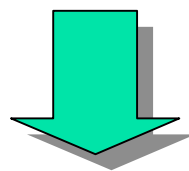
$$P_2P_3P_6 = 1$$

論理式の簡単化

■クワイン-マクラスキーの方法

<手順4> (2e) 主項の選択

$$P_2 P_3 P_6 = 1$$



主項の論理和

$$f = P_2 + P_3 + P_6 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_2 x_4$$