コント ：リカちゃん方程式

登場人物：

A 某大学講師
B: 某芸能社専務兼企画部長
C,G: 野次馬

A: 今日は、少し変わった、というか 真面目話をやりたいと思います.

B: ほー。。。真面目でっか。まじめというても、わしらが思うとる真面目とセンセの真面目はだいぶちゃうんと。。。。

A: たしかに、ちょっと、あるいはかなり高度な専門的な話になります。しかし、大学院で数学を専攻してきた B 氏におかれては、昔習った知識を少し思い出して、あらためて勉強してもらうことで、如何なる話をしているか理解されるのではないかと思います。。。。たしか 非線形微分方程式で修士学位をとりましたね。

B: もうずっと昔のことで、くわしことは ほとんどわすれましたけど、特殊な形の微分方程式の解の構造を分類したといったような。。。。。

A: 微分方程式は、科学全体の基礎といった位置付けですね。こどほど左様に、ニュートンとライプニッツ、それを引き継いだオイラーの偉大さにあらためて思いいたされます。。。。

B: 宇宙の星の運行から、天気予報、株式予想、。。。。。もうなんでも 微分方程式なしではすまされん世の中になってきとるようでんな。

A: ポアンカレ予想を非線形微分方程式をつかって解決したのには驚きましたね。トポロジーの問題を微分方程式という解析の武器を使って解くのは違反ではないかという意味のことを、あるところで 発言したところ, たとえ トポロジー本来の手法で証明が実現したとしても、2 番煎じになってしまうと。わたしには、そうは思えないですがね。しゃにむに解けばよいというようなものではないだろうと。。。。。。

B：わしらトーシローからみたら、数学ちゅう学問を専門とするだけでも大変やのに、その中で先陣争いで凌ぎをけずるチュウのは一体全体どういう

こっちゃと。。。。

A: ともかく、本題に入りましょう。世の中に、子供（女の子）相手に, リカちゃんなんとかというのがあるようで。

B: ありまんな。「リカちゃん人形」というのが典型で。リカちゃんと微分方程式でっか。なんか「ハンジモン」でんな。

A: そうです。今回のテーマは、ずばり「リカちゃん方程式」です。大学の２年くらいの数学の知識で習う微分方程式の科目でもでてくるやつです。みかけは簡単な 1 階微分方程式です。たぶん、習ったことがあると思いますがね。

B: そうでっか。。。。。

A: ともかく、少し思い出していただくということで。必要なのは 1 変数関数の 微分積分のほんの入り口だけです。関数 $y = f(x)$ を考えて、変数 x を微小な量 h だけ 変化させて、それの変化率というのが微分です：式で書くと;

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \frac{df}{dx} \tag{1}$$

これが、いわゆる「導関数」とよばれるものです。これは、x の関数だから、さらにこれを微分すると高次の導関数が得られていきます。最終的に、ある関数を冪級数に展開するときに、無限回の導関数がでてきます。。。。。

B: 思い出しました。テーラー展開でんな。

A: 図で示すと、（もったいぶった言い方をすると）幾何学的的には、曲線のうえのある点で、接線を引いたときのその傾きという意味です。うえの式に観点を変えてみる。つまり,

『ある関数 $g(x)$ を微分したものが、$f(x)$ になる $g(x)$ を求めよ』

という問題を設定する. （まあ、数学（科学）が発展した現代のことゆえ、こんな気楽なことをいえますが、ニュートン、ライプニッツの時代では、このような発想をできる者（数学者）はいなかった）。式で表すと

$$\frac{dg}{dx} = f(x) \tag{2}$$

$$\text{答え} = \int f(x)dx \tag{3}$$

(正確には、不定積分ですが、まあこまかいことはおきましょう) うえの二つの式 (1) と (3) が微分および 積分です。

(2) と (3) の関係は、未知の関数 $g(x)$ に関する方程式と、その解ということがわかるでしょう。

B: 微分方程式というには 単純すぎまんな。ただの積分を言い換えただけでんがな。

A: その通りです。これは あまりに直接的ですが、もっと複雑な微分が入り込んできた場合の微分方程式でもその解のことを、「積分」という言い方をします。

B: そうでしたかな。。。。。。

A: という次第であらためて、ことごとしく定義することもないですが、「未知の関数に関する微分が含んだ方程式全般を微分方程式とよぶ」ということになりますか。

B: そうでしたな。れから、それから いま思い出したので、変数が２つ以上の関数: 多変数関数というものに、対しても微分方程式がおましたな。ともかく、えらく一般的でんな。

A: よくご存知で。偏微分を扱いますから 偏微分方程式といいます。たしかに, 一般的です。微分方程式を１００個列挙せよという学生レポートを出すと、面白いかも。

B: たしかに、ある関数（たち）を与えて、それの方程式をつくれという問題は じきできますけど、ちょっと考えただけで、解けへんのとちゃいます？

A: なかなかポイントをついてきましたね。そのとおりです。大学２年あたりでやったことを思い出すと、ある型で分類して解き方を教える.

G: いうなれば、数学ちゅうてくさ、分類をやっとるわけですたい.

A: ちなみに、微分方程式ではなく、代数方程式となると, これは 中学 高校の数学の華である、２次方程式のはるかなる拡張ですが、５次以上の方程式は、代数的解法が存在しないというアーベルの定理が確定され、それをさ

らに一般的にしたガロア理論というものがあり、群論で統制できることがわかっています。ただし、いまでも専門家以外には近付き難い理論ではありますがね。

B: 代数というと, 微積に比べて簡単にみえるが、全然ちがう難しさがあるんでんな。

A: ガロア群というものの正体が わからない。現今では、アーベル群といういちばん簡単なものがやっと、理解できるようになったというところです（これは かの高木貞治の受け売りです）．だんだんと、リカちゃんからはなれていきます。そろそろ、本論に行きましょう。つまり、数学者のとる正統的考え方として；ある方程式が与えられたときに、その解を特徴付ける全体的構造というものが研究の対象となるというわけです。その意味で、当該微分方程式に、「よい研究対象」が含まれているかどうかということになりますか。

B: へー。。。方程式のランクずけでんな。

A: ただし、研究内容の良し悪しは、結局研究者自身がきめるものです。どんな複雑奇怪な形をしていても, 計算機で数値シミレーションをして 現象に合わせることができれば、それは役にたつことで、意味のあることだと評価されるべきでしょう.

さて、リカちゃんにいきますが、じつのところ, 実に簡単なものです。。。。それをいう前に、一番簡単な微分が 1 回の方程式の復習をやります。

$$(y' \equiv)\frac{dy}{dx} = y \tag{4}$$

これは, (2) で $f(x)$ を y で置き換えたものです. 未知関数 y が、入り込んでくるのが 違うところです。(3) と同じ手口で、単純に, $\int y dx$ とはいかない.

B: いま 思い出しましたぜ. 大学 1 年のときに, 数学演習というのがあって, テキストにある問題の好きなやつを早いものガチで解く。それで、3 つ解くと単位がもらえるというので、いただきとばかりこの問題をやりましたがな。やりかたは,

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int 1 \cdot dx \tag{5}$$

積分を実行して

$$\int \frac{dy}{y} = \log y = x + C \tag{6}$$

これから、

$$y = c \exp x$$

がでてきま。これをみて、担当の教師が このやりかたは違反だといわれてがっくりきました。なぜかいうと, y はゼロという値を取るかもしれないではないか。ゆえに, $\frac{1}{y}$ は具合が悪いと。 なるほど 一本取られました。そこで、まとも にみえるやりかたを考えたあげく, やっと 気がつきました。どうやるかというと, $y = f(x)\exp(-x)$ とおくと, $f(x)$ に対する方程式は、$f'(x) = 0$ なって, これから、$f(x) = c$ がでてくる。これを次回に 再度発表したところ、これが正解だと褒められましたがな。

A: じつは, その置き換えは 物理の問題でよくやる手法ですね。指数関数のところを 虚数におきかえると、かのオイラーの公式から、3角関数になって、振動をあらわす。そこで、振動が変調するという問題を考えるとき, 主要な振動数をもった波動のまわりで、波が歪むとき、その歪みの部分を f として, $y = f\exp[ikx]$ と書きます。

B: オイラーの公式：

$$\exp[ix] = \cos x + i\sin x$$

なつかしでんな。ところで、k ってなんでんの.

A: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ で, λ は波長をあらわす。 k は 波数とよびます。読んで字のとおり, 単位の長さ（いまの場合は, 2π ）あたりの波の数をあらわします。

ちなみに, 波といえば、それと対をなす振動があります。

B: 波の場合は、波長やったが、振動のときは 振動数でしたな。

A: そのとおりです。ちなみに、振動を表す方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 \tag{7}$$

物理（力学）の問題では、独立変数 x のかわりに、時間 t を使うのが普通です。つまり,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \tag{8}$$

この型を一般にすると

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{9}$$

の形になります。係数 a, b が定数だとすると, この解はいっぺんに求められます。つまり, $y = \exp[\lambda x]$ とおきます。すると 未知数 λ の２次方程式に帰着：$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$。根が２つでてくるが、これが ２階の微分方程式が独立な解が２個あるということを示している。このあたりのことは 先刻ご存知であるかと。

ここで、さらに一般化する方法として ２つの方向があります．ひとつは、係数 a, b を定数ではなく, 独立変数　x の関数にとる。 そうなると 指数関数という具合にはいかない。いっぺんに複雑になる。(注釈：２階常微分方程式は、数学のなかで、ひときわ壮麗な体型をつくっている。確定特異点理論、リーマン・ヒルベルト問題、保形関数を生成するフックス方方程式などなど枚挙にいとまがないくらいである。。。。）これが、数学の不思議なところです。もうひとつの道は 微分の階数をあげることです。

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1x}} + \cdots a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \tag{10}$$

G: 係数 a_n も x の関数にとることもできるでネエスカ。それから、右辺を一般の関数 $F(x)$ とおいてもよかとじゃろか。

A: そのとおりです。G さんがいっぺんに片付けてくれました。つまり (10) の右辺を $F(x)$ とおいたものが、線形常備分方程式のもっとも一般化されたものです.

C: なんでも, よかですばってん、リカちゃんが一向に出てこんばい。

A:　すみません。このあと登場します。ここまで 説明してきたことは、決して面白おかしく開陳しただけでないことは了解いただきたく。 これからの話の準備になります.

A: （冷めた紅茶をすすりながら）さて リカちゃん登場です：**みなさん 万雷の拍手でお迎えいたしましょう**：

$$\frac{dy}{dx} + a + by + y^2 = f(x) \tag{11}$$

（リカでーす．よろしーく。。。。。。!!!! ）

ここで, リカちゃん (11) で, y の項をおとしたもの（これは、平方完成で消去できる）

$$\frac{dy}{dx} + E + y^2 = f(x) \tag{12}$$

を考えることにします。以下ではこれを考えます.

C. G: 大山鳴動ねずみ一匹ちゅう例えでなか　??? 。アホみたいタイ。

B: 微分が 1 階であるさかい そない見えるが、y^2 が曲者でんな。

A: ともかく リカちゃんを、少し可愛くして, 「リカッチ」(山田くんを, ヤマッチとよぶノリで) という呼び名もいいですね。じつは、そのものずばり, Ricatti (リカッチ) equation という正式な名称で知られています。

それは さておき, このスカタンみたいにみえるという感覚の根拠をさぐってみるに、(4) の 右辺の一次式 y を , 「一般に」 y の２次式に置き換えただけではないか, という印象からくるのではないかと。しかし、考えてみてください。１次式から２次式に移るには、ものすごい飛躍があった。直線から曲線（放物線）を処理する手法をあみだしたのがとりもなおさず、微積分の発見を促したのです。なにはともあれ、積分する（解をもとめる）ことを考える。どうでしょうか。

B,C,G 一様に 沈黙

B: $f(x) = 0$ の場合は、一発でんな：

$$\int \frac{dy}{a+by+y^2} = \int dx = x + C$$

左辺の積分は、数学公式でてるので 実行できま. ところが、f があると、「手も足も出ん」というとこでっか。

A: そうなのですね。これが、「非線形」のやっかいなところです。いままで言わなかったですが、線形と非線形：線形は、すべての高階の微分に関して１次式でかける。非線形は, 微分に関して（０階もふくむ、つまり, y そのもの）２次以上の式がふくまれる。ゆえに、リカちゃんは、いちばん簡単な非線形方程式というわけです。

ここで、また 話を線形にもどして、リカちゃんを（いいネーミングがないですね：梨花ちゃんにして）

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x) \tag{13}$$

にすると、少し捻ると 答えがでてきます. そのまえに、言い忘れていましたが、用語の説明をします。一般に右辺が、０のときを、「同次」、そうでないときを、「非同次」とよびます。線形微分方程式の非同次の場合の特別な解を求める手法というのがあるのです。それをやります。まず、同次の場合の一般解をもとめておきます。

それは うえでやったように, $y = C\exp[-x]$ です。 ただし、C は任意の定数です。つぎに どうするかというと。G さんどうです。ヒントは 係数 C に細工をします。

G: （しばらく考えて） ううん。 C を x の関数にするくらいしか。。。。

A: それでいいのです。 特別の解として, $y = C(x)\exp[-x]$ とおいて、もとの非同次に代入すると

$$\frac{dC}{dx} = f(x)\exp[-x]$$

がでて、これから $C(x) = \int f(x')\exp[-x']dx'$ と求められます. これが、いわゆる、定数変化法というやつです。(その威力は、ディラックの輻射理論で最大限に発揮されます)

B: リカッチの場合は、そないなうまい具合にいかんのでっか。

A: 定数係数の線形の場合は、指数関数で書かれているという特殊性があって、うまくいくということもありますね。さて リカッチの場合；その特殊性から、以下のような「変換」をします。

$$y = \frac{d}{dx}\log u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \tag{14}$$

B,C,G 一同；なにやこれ、なんだべ、これってなんなら ?????!!!!!

A: そうですね。天から降ったという印象をもつでしょう。さて, (14) を (12) に　代入すると $y' + y^2 = \frac{u''}{u} - (\frac{u'}{u})^2 + (\frac{u'}{u})^2 = \frac{u''}{u}$　から

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (f(x) - E)u \tag{15}$$

A: いかがですか。線形の場合とまったく、異なった風景をみたという印象をもったと思いますが。。。。。

B,C, G: (一様に) y と y^2 で月とスッポンのたとえデンナ。。。。参りましたですタイ。。。。この方程式は 最近どこかでみたのでネエカなと。バッテン、なんであったか。。。。。

A: そうです。これは $f(x)$ を 1 次元ポテンシャルとみたときの シュレーディンガー方程式そのものです。つまり、正確に書くと

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + V(x)u = Eu \tag{16}$$

とかけば、そのまま対応することがわかります。E がエネルギーの固有値です。ただし、境界条件の設定というのが必要ですが。

B: どうも、カマセ 入れられた感を拭えんでんな。 だいたい 話が逆やおまへんか。2階方程式を1階に直すところを、1階を2階にする。。。しかし、非線形を線形にした代償が2階になったんということやろな。。。。

A: その通りです。非線形の問題の線形化するというひとつの典型的問題ということになりますか。有名なものでは 逆散乱法というのあります。KdV 方程式という非線形偏微分方程式のソリトン解が、シュレーディンガー方程式のポテンシャルに変換されるという話です。リカちゃんは、そんな遠大な話ではないですがね。

A: タネあかしではないですが、実は、リカちゃんは、シュレーディンガー方程式の波動関数を書き直して でてきます。それは、$u = \exp[\int y dx]$ とおいて、(15) に代入するとリカちゃんに帰着します。。この手法は、じつは、シュレーディンガー方程式の近似法である WKB 近似と関連してでてくるものです。 **問題：やってみてください.**

B: まあ、いずれにしても、シロト判断やけど、おそらく y^2 の特殊性でんな。y^3 や y^4 など, もってきてもなんにも うまいものは 出てけえへん思う。

A: なかなか、厳しいですね。たしかに、いまの場合、2でうまくいったから、3、4も。。。という具合にはいかないのは明らかですね. リカッチは、おそらく動機があって リカちゃん方程式を考えたのでなく 一番簡単な非線形方程式を, いわば道楽で作ってみせたという程度のものだったかも。彼の活動した時代には量子力学などなかった。

B: 結局、微分方程式も、つくるのは簡単やが、物理にでてくるような 意味のある方程式は、ごくごく特殊だということデンナ。

A: そういう観点から、リカちゃんの、私なりの展望を語らせていただくことで、お開きにさせていただきます。
いま、考えているテーマのひとつとして、リカちゃんを「ランダム系」として扱うというのものです。ずばり、右辺の関数 f をランダム分布をさせた場合に、y の変動に関する確率分布方程式はどうなるかというものです。関連する問題は、ひとつの分野を形成しているようで、決して孤立したテーマではないようです。(じつは、この問題、アイデアを一言いうと、それだけ. で, この種の問題を考えている専門家に, いっぺんに解かれるというくらいのもので「用心」しないといけないのですが)。

以上、しまらない話を披露させていただきましたが、これにて、閉会い

たします。

完

付録：

微分を含んだ、非線形微分方程式の例として２つあげておく：

１： $(\frac{dy}{dx})^2 = 1 - y^2$ この解は

$$y = \sin x, \cos x \tag{17}$$

2: $(\frac{dy}{dx})^2 = 4g_1 - g_2 y - g_3 y^3$. 解は、ワイエルシュトラスのペー関数でパラメトライズされた形

$$y = \mathcal{P}(x), \frac{dy}{dx} = \mathcal{P}'(x) \tag{18}$$