確率微分方程式の弱解について

植西　千尋

立命館大学理工学研究科

目 次

要約

この論文の目的は Tsirel'son, Yor の結果を応用することにより, 強解にならない分布解をもつ確率微分方程式の例を豊富にすることである.

この論文は以下のように構成されている. 第 1 章では Tsirel'son の方程式について述べる. 1.1 節で汎関数型確率微分方程式の定義をし, 1.2 節で Tsirel'son の方程式を紹介する. 1.3 節では Tsirel'son の方程式を 2 次元に拡張した. 1.4 節には Tsirel'son の方程式の本質である Yor の結果を紹介する. 第 2 章では 1.4 節で紹介した Tsirel'son - Yor の方程式の一般化について述べた. 2.1 節で方程式の拡張の定義を行い, その設定でも 1.4 節と同様の結果が得られることを 2.2 節から 2.4 節までに示した. 2.5 節はそれまでの議論を連続型の方程式に応用する例を挙げている.

謝辞

学部生のときからこの論文を執筆するに至るまで多大なご指導をして頂いた赤堀次郎先生, 山田俊雄先生, 渡辺信三先生, 原啓介先生や多くの先生方, 院生の方々, 青木宏樹氏, 小林義明氏, 矢野孝次氏に謝辞を申し上げたい.

1 Tsirel'son 方程式

1.1 汎関数型確率微分方程式

$\boldsymbol{W}^N = C([0,\infty);\boldsymbol{R}^N)$ すなわち $[0,\infty)$ で定義され $\boldsymbol{R}^N$ に値をとる連続関数全体とする.

汎関数型確率微分方程式,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X.)\ dB_s + \int_0^t b(s, X.)\ ds \tag{1}$$

について考える. ここで $\sigma,\ b$ は,

$$\begin{aligned}\sigma &: [0,T] \times \boldsymbol{W}^N \to \boldsymbol{R}^N \otimes \boldsymbol{R}^m \\ b &: [0,T] \times \boldsymbol{W}^N \to \boldsymbol{R}^N\end{aligned}$$

で, それぞれ $\mathcal{B}(\boldsymbol{W}^N)$ 発展的可測とする.

定義 1 (弱解, 強解) ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ とその空間上のフィルトレーション $\mathcal{F}_t$ と $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動 B_t があって,

(i) X_t は $\mathcal{F}_t$ に適合した連続確率過程であり, $\sigma(t, X.)$, $b(t, X.)$ は発展的可測で,

$$\boldsymbol{P}\left(\int_0^T \{\|\sigma(t,X.)\|^2 + |b(t,X.)|^2\}\,dt < \infty\right) = 1 \tag{2}$$

ただし $\|\sigma\|^2 := \mathrm{tr}(\sigma^*\sigma)$

(ii) $\boldsymbol{P}$ (*(1)*がすべての t で成り立つ) $= 1$

であるとき (X_t, B_t), $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}; \mathcal{F}_t)$ は *(1)* の分布解であるという. さらに,

(iii) $X.$ がブラウン運動の軌道 $B.$ の可測関数として表せる, すなわち $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^B$

も成り立つとき (X_t, B_t) は *(1)* の強解であるという.

1.2 Tsirel'son 方程式

Tsirel'son[T] は強解ではない弱解を持つ確率微分方程式の例として次のようなものを考えた. $k \in -\boldsymbol{N}$ に対し $t_k > 0, \quad t_{k-1} < t_k, \quad t_k \to 0\ (k \to -\infty)$ であるような数列 $\{t_k; k \in -\boldsymbol{N}\}$ を用意して, $X \in \boldsymbol{W}^1$ に対し,

$$A(t, X.) = \sum_{k \in -\boldsymbol{N}} \kappa\left(\frac{X(t_k) - X(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right) 1_{[t_k,\ t_{k+1})}(t) \tag{3}$$

とおく. ただし $\kappa(x)$ は x の小数部分を表すものとする. このとき,

定理 1 ([T, Theorem.])

$$dX_t = A(t, X.)dt + dB_t, \quad X_0 = 0 \tag{4}$$

は強解を持たない.

Tsirel'son[T] はその証明の中で $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ における離散時間確率微分方程式,

$$\eta_k - \eta_{k-1} = \xi_k, \qquad k \in -\boldsymbol{N} \tag{5}$$

を定義した. ここで独立な σ-field の列 $\{\mathcal{A}_k\}$ と $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$-値 $\mathcal{A}_k$-可測確率変数 ξ_k が与えられていて η_k が未知変数である. (5) の強解とは $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$-値確率変数の列 $\{\eta_k\}$ で $\mathcal{F}_k = \vee\{\mathcal{A}_l; -\infty < l \leqq k\}$ としたとき $\mathcal{F}_k$-可測でかつ (5) を満たすものである. 定理の証明のための補題をあげておく.

補題 2 ([T, Lemma.]) *(5)* に強解が存在すれば, その解はある定数 $c_k \in \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の列を用いて,

$$\eta_k = c_k + (\xi_k - c_k + c_{k-1}) + (\xi_{k-1} - c_{k-1} + c_{k-2}) + \cdots \tag{6}$$

の形で表せ, これは確率 1 で収束する.

Tsirel'son は (4) が強解を持たないことを次のように証明した : 仮に (4) が強解 $X = \{X_t\}$ を持つとする. このとき,

$$\xi_k^0 = \frac{B_{t_k} - B_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}, \qquad \eta_k^0 = \frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \tag{7}$$

とおくと $[t_k, t_{k+1})$ 上で,

$$dX_t = \kappa(\eta_k^0)dt + dB_t$$

となり,

$$\eta_{k+1}^0 = \kappa(\eta_k^0) + \xi_{k+1}^0$$

となる. $j : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ を自然な準同型写像とし,

$$\xi_k = j(\xi_k^0), \quad \eta_k = j(\eta_k^0)$$

とすると,

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \xi_{k+1} \tag{8}$$

となる. $\mathcal{A}_k = \sigma(\{B_t - B_s \mid t_{k-1} \leqq s \leqq t \leqq t_k\})$ とおくと ξ_k は $\mathcal{A}_k$-可測 であり, η_k は $\vee\{\mathcal{A}_l \mid -\infty < l \leqq k\}(= \mathcal{F}_{t_k}^B)$-可測であるので $\{\eta_k\}$ は (8) の強解である. 故に補題 2 より $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の定数列 $\{c_k\}$ をうまく選べば (6) は確率 1 で収束する. ところが ξ_k^0 は分散 $\dfrac{1}{t_k - t_{k-1}}$ の正規分布に従うので, どのような d_k に対しても $\xi_k - d_k$ が 0 に確率収束することはありえない. よって概収束もしない.

1.3 Tsirel'son の方程式の 2 次元への拡張

Tsirel'son の例が強解を持たないという定理はいくつかの別証明が与えられている. Ikeda-Watanabe における証明 ([I-W] Example 4.1.) は次のように応用できる:

$S = \boldsymbol{R}^2,\ G = SO(2)$ とし, $A : [0,\ \infty) \times (\boldsymbol{R}^2)^{[0,\ \infty)} \to SO(2)$ を,

$$A(t, X.) = \sum_{k \in -\boldsymbol{N}} \theta\left(\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}\right) 1_{[t_k,\ t_{k+1})}(t) \tag{9}$$

で定義する. ここで $\theta : \boldsymbol{R}^2 \to SO(2)$ を,

$$\theta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

と定義する. ただし $\theta(0) = E_2$ としておく. このとき,

定理 3 2次元ブラウン運動 $B=\{B_t\}$ に対し, 確率微分方程式,

$$X_t = \int_0^t A(s, X.)\ dB_s \tag{11}$$

は強解を持たない.

＜証明＞ $X=\{X_t\}$ が (11) の解であるとするとき,

$$\xi_k = \frac{B_{t_k} - B_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}, \qquad \eta_k = \frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \tag{12}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\theta(\eta_{k+1}) &= \theta(\theta(\eta_k)\xi_{k+1}) \\ &= \theta(\eta_k)\theta(\xi_{k+1})\end{aligned}$$

である. $SO(2)$-値 確率変数 $\tau=(\tau_{ij})$ に対し,

$$\overline{\boldsymbol{E}}\left[\tau\right] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}\left[\tau_{11}\right] & \boldsymbol{E}\left[\tau_{12}\right] \\ \boldsymbol{E}\left[\tau_{21}\right] & \boldsymbol{E}\left[\tau_{22}\right] \end{pmatrix}$$

とおくと, 独立な確率変数 $\tau_1,\ \tau_2$ に対し $\overline{\boldsymbol{E}}\left[\tau_1\tau_2\right] = \overline{\boldsymbol{E}}\left[\tau_1\right]\overline{\boldsymbol{E}}\left[\tau_2\right]$ となる. 従って X が強解であるとすると構成法から η_k と ξ_{k+1} は独立であるので,

$$\overline{\boldsymbol{E}}\left[\theta(\eta_{k+1})\right] = \overline{\boldsymbol{E}}\left[\theta(\eta_k)\right]\overline{\boldsymbol{E}}\left[\theta(\xi_{k+1})\right] = O \tag{13}$$

である. ここで,

$$\mathcal{B}_l^{k+1} = \sigma(\{B_t - B_s; t_{k-l} \leqq s < t \leqq t_{k+1}\}) \tag{14}$$

とおくと, $X_u\ (u \leqq t_{k-l})$ は $\mathcal{B}_l^{k+1}$ と独立なので,

$$\overline{\boldsymbol{E}}\left[\theta(\eta_{k+1})|\mathcal{B}_l^{k+1}\right] = \overline{\boldsymbol{E}}\left[\theta(\eta_{k-l})\right]\theta(\xi_{k-l+1})\cdots\theta(\xi_{k+1}) = O \tag{15}$$

となる.

$$\bigvee_{l=0}^{\infty} \mathcal{B}_l^{k+1} = \mathcal{F}_{t_{k+1}}^B \supset \mathcal{F}_{t_{k+1}}^X \tag{16}$$

なので Lévy の 'Upward Theorem' ([W] 14.2. 等) を各成分に適用することにより,

$$\lim_{l\to\infty} \overline{\boldsymbol{E}}\left[\theta(\eta_{k+1})|\mathcal{B}_l^{k+1}\right] = \overline{\boldsymbol{E}}\left[\theta(\eta_{k+1})|\mathcal{F}_{t_{k+1}}^B\right] \quad \text{a.s.}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\theta(\eta_{k+1}) &= \overline{\boldsymbol{E}}\left[\theta(\eta_{k+1})|\mathcal{F}_{t_{k+1}}^B\right] \\ &= \lim_{l\to\infty} \overline{\boldsymbol{E}}\left[\theta(\eta_{k+1})|\mathcal{B}_l^{k+1}\right] \\ &= O \quad \text{(a.s.)}\end{aligned}$$

となるが, これは矛盾である.

＜証明終＞

1.4 Yor の離散時間方程式

Yor[Y] は Teirel'son の方程式 (5) に関連して方程式,

$$\eta_k = \xi_k + \kappa(\eta_{k-1}), \qquad k \in -\boldsymbol{N} \tag{17}$$

について研究している．Tsirel'son が定義した方程式 (5) と異なり両辺が実数値であることに注意する. 方程式 (17) の意味は次のように定義される．ξ_k の法則 μ_k が与えられたとする．法則の列 $\mu = \{\mu_k; k \in -\boldsymbol{N}\}$ に対する (17) の解とは $\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{N}}$ 上の確率測度 $\boldsymbol{P}$ で $\eta_k(\omega) = \omega(k)$, $\xi_k = \eta_k - \kappa(\eta_{k-1})$, $\mathcal{F}_k = \sigma\{\eta_n; n \leqq k\}$, $\mathcal{E}_k = \sigma\{\xi_n; n \leqq k\}$ としたとき $\boldsymbol{P}$ の下で,

$$\text{すべての } k \text{ に対し } \xi_k \text{ は } \mathcal{F}_{k-1} \text{ と独立で } \mu_k \text{ を分布に持つ} \tag{18}$$

が成り立つもののことであるとする．

このような $\boldsymbol{P}$ 全体を $\mathcal{P}_\mu(T)$ で表す．また各 k で $\mathcal{F}_k = \mathcal{E}_k$ を満たすときこの解は強解，そうでないときは弱解ということにする．

全ての $n \geqq 0$ と $k \in -\boldsymbol{N}$ に対し,

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k-n} \vee \mathcal{E}_k \tag{19}$$

であり, よって $\mathcal{F}_k = \cap_n(\mathcal{F}_{k-n} \vee \mathcal{E}_k)$ であるが, 多くの場合,

$$\mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{E}_k = (\cap_n \mathcal{F}_{k-n}) \vee \mathcal{E}_k$$

は $\mathcal{F}_k$ に真に含まれる.

解が一意のとき, すなわち $\mathcal{P}_\mu(T)$ が 1 点のみの集合のとき,

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{E}_k \vee \sigma(\kappa(\eta_k))$$

であり ($\kappa(x)$ は x の小数部分), $\mathcal{F}_{-\infty}$ は自明な σ-field(よって $\mathcal{E}_k = \mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{E}_k$) である．また $\kappa(\eta_k)$ は $(0,1]$ 上一様に分布し, $\mathcal{E}_k$ と独立である．一見するとこのことは (19) と食い違い興味深い.

なおこの節では [Y] の結果の紹介だけを行い証明はしない. 次章でより一般的な場合の結果に証明を与えるからである.

次の定理は解集合 $\mathcal{P}_\mu(T)$ の端点[1] と漸近的 σ-field $\mathcal{F}_{-\infty}$ の関係を特徴付けている.

定理 4 ([Y, Theorem 1.]) $\boldsymbol{P} \in \mathcal{P}_\mu(T)$ とする. このとき,

[1]可測空間 $(M, \mathcal{M})$ に凸構造を導入するとは, $\mathcal{M}$ 上の各確率測度 ν に対し M の点 P_ν （ν の重心と呼ぶ）を対応させることである．このとき $(M, \mathcal{M})$ は凸可測空間であるという．P が δ_P を除くどの測度 ν の重心でもないとき, P は M の端点であるという [D].

(1) $\mathcal{F}_{-\infty}$ は $\boldsymbol{P}$-零 集合を除いて $\{\zeta_{k,p}\ ;\ k \in -\boldsymbol{N},\ p \in \boldsymbol{Z}^*\}$ から生成される σ-*field* と一致する. ただし,

$$\zeta_{k,p} = \lim_{n\to\infty} \exp(2i\pi p\eta_{k-n}) \prod_{j=k-n+1}^{k} \varphi_j(p)$$

ここで $\varphi_j(p) = \int \exp(2i\pi px)\ \mu_j(dx)$. また極限は $\boldsymbol{P} - a.s.$ 存在する.

(2) $\boldsymbol{P}$ が $\mathcal{P}_\mu(T)$ の端点 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_{-\infty}$ が $\boldsymbol{P}$ で自明な σ-*field.*

問題はどのような条件のときに解が存在しそれが弱解となるのかということであるが, どんな法則の列 μ に対しても (17) の弱解は少なくともひとつ必ず存在する. より正確には,

定理 5 ([Y, Theorem 2.]) $\mathcal{P}_\mu(T)$ の中に以下を満たす確率測度 $\boldsymbol{P}_\mu^*$ がただひとつ存在する *:* $\boldsymbol{P}_\mu^*$ の下で,

- 各 k に対し $\kappa(\eta_k)$ は $[0,1)$ 上一様分布.
- $\kappa(\eta_k)$ は $\sigma\{\xi_j; j \in -\boldsymbol{N}\}$ と独立.
- $\kappa(\xi_j)$ が一様分布ならば $\{\kappa(\eta_j); j \in -\boldsymbol{N}\}$ は独立.

解の存在をはっきりさせたら次は一意性の議論をするのが自然であるが, もし法則の意味で一意的な解があればその解は強解ではない. さらに言えば, もし強解がひとつでもあれば無数の強解が存在する. よって方程式は, 強解を持つ, 一意の弱解を持つ, 一意性のない弱解を持つ, の 3 通りに分類される. 次の 2 つの補題がその分類を決めるカギとなる.

補題 6 ([Y, Proposition 2.]) $\forall p \in \boldsymbol{Z},\ \forall k \in -\boldsymbol{N},\ \forall P$*:(17)* の解 に対し,

$$\boldsymbol{E}\left[\exp(2i\pi p\eta_k)|\mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{E}_0\right] = \delta_p \exp(2i\pi p\eta_k) \tag{20}$$

ただし,

$$\delta_p = \begin{cases} 0, & \forall k',\ \lim_{n\to\infty} \prod_{j=k'-n}^{k'} \boldsymbol{E}\left[\exp(2i\pi p\xi_j)\right] = 0 \\ 1, & \text{上以外} \end{cases}$$

補題 7 ([Y, Proposition 3.]) $\boldsymbol{Z}_+(\mu) := \{p \in \boldsymbol{Z}\ ;\ \delta_p = 1\}$ は $\boldsymbol{Z}$ の部分群. すなわち,

$$\boldsymbol{Z}_+(\mu) = p_\mu \boldsymbol{Z} \tag{21}$$

となる $p_\mu \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ が選べる.

今, (17) の解は補題 7 で決まる p_μ によって次のように分類される:

定理 8 ([Y, Theorem 3,4,5.]) 次はそれぞれ同値である.

I–1) $p_\mu = 0$.

I–2) $\mathcal{P}_\mu(T)$ の元は $\boldsymbol{P}^*_\mu$ ただひとつ.

I–3) $\boldsymbol{P}^*_\mu$ は $\mathcal{P}_\mu(T)$ の端点.

I–4) $\boldsymbol{P}^*_\mu$ の下で $\kappa(\eta_k)$ は $\mathcal{F}_{-\infty}$ と独立, $\forall k \in -\boldsymbol{N}$.

II–1) $p_\mu = 1$.

II–2) $\mathcal{P}_\mu(T)$ は強解を（無数に）含む.

II–3) 任意の $\boldsymbol{P} \in \mathcal{P}_\mu(T)$ の下で $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{E}_k,\ \forall k \in -\boldsymbol{N}$.

II–4) $\mathcal{P}_\mu(T)$ の端点は強解.

II–5) $\boldsymbol{P}$ が強解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{P}$ が $\mathcal{P}_\mu(T)$ の端点.

III–1) $p_\mu > 1$.

III–2) $\mathcal{P}_\mu(T)$ は強解を含まず, 法則の意味の一意性ももたない.

2 Tsirel'son - Yor 方程式

2.1 定義

Yor の方程式 (17) を次のように拡張する. S を局所コンパクト位相空間とし, G をコンパクト位相群とする. $\psi : S \times G \to S$ を $x \in S,\ u \in G$ に対し $\psi(\psi(x,u), u^{-1}) = x$ となるものとする. 以後 $\psi(x,u) =: u(x)$ と書くことにする.

また θ を S から G への可測な全射で $x \in S,\ u \in G$ に対し $\theta(u(x)) = u\theta(x)$ となるものとする. このとき負の離散時間確率微分方程式,

$$\eta_k = \theta(\eta_{k-1})(\xi_k) \tag{22}$$

を考える. 方程式の意味は Yor の方程式 (17) と同様に定義する. すなわち ξ_k の法則 μ_k が与えられたとき, 法則の列 $\mu = \{\mu_k; k \in -\boldsymbol{N}\}$ に対する (22) の解とは $S^{-\boldsymbol{N}}$ 上の確率測度 $\boldsymbol{P}$ で $\eta_k(\omega) = \omega(k),\ \xi_k = (\theta(\eta_{k-1}))^{-1}(\eta_k),\ \mathcal{F}_k = \sigma\{\eta_n; n \leqq k\},\ \mathcal{E}_k = \sigma\{\xi_n; n \leqq k\}$ としたとき $\boldsymbol{P}$ の下で,

$$\text{すべての } k \text{ に対し } \xi_k \text{ は } \mathcal{F}_{k-1} \text{ と独立で } \mu_k \text{ を分布に持つ} \tag{23}$$

が成り立つもののことであるとする. 各 k で $\mathcal{F}_k = \mathcal{E}_k$ を満たすときこの解は強解, そうでないときは弱解ということにする. また与えられた法則の列 μ に対し (22) の解全体からなる集合をやはり $\mathcal{P}_\mu(T)$ とする.

2.2 解の存在定理

この設定でも [Y] の Theorem 2 と同様の結果が得られる.

定理 9 *$\boldsymbol{P}^*_\mu \in \mathcal{P}_\mu(T)$ で以下を満たすものがただひとつ存在する: $\boldsymbol{P}^*_\mu$ の下で,*

(1) 任意の $k \in -\boldsymbol{N}$ で $\theta(\eta_k)$ の分布は G 上 Haar 測度.

この定理の証明のために次の補題を準備する.

補題 10 *U を G に値をとる確率変数, X を S に値をとる確率変数で U と独立なものとする.*

このとき U が一様分布, すなわち U の分布が G 上 Haar 測度であれば, $U(X)$ と X は独立であり, $\theta(U(X))$ の分布はまた G 上 Haar 測度になる.

＜補題の証明＞

η を X の分布とする. X と U が独立であることより S 上の任意の有界可測関数 f_1 と G 上の任意の有界可測関数 f_2 に対し,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}\left[f_1(X)f_2(\theta(UX))\right] &= \iint_{S\times G} f_1(x)f_2(\theta(u(x)))\ \eta(dg)\nu(du) \\
&= \int_S \left(f_1(g) \int_G f_2(u\theta(x))\ \nu(du) \right)\ \eta(dg) \\
&= \int_S f_1(g)\ \eta(dg) \int_G f_2(u)\ \nu(du) \\
&= \boldsymbol{E}\left[f_1(X)\right] \boldsymbol{E}\left[f_2(U)\right] = \boldsymbol{E}\left[f_1(X)\right] \boldsymbol{E}\left[f_2(\theta(U(X)))\right].
\end{aligned}$$

＜証明終＞

＜定理 9 の証明＞証明は Kolmogorov の拡張定理による.

$(\Omega',\ \mathcal{F}',\ P')$ を確率空間とする. η を G -値確率変数で分布が G 上 Haar 測度となるものとし, ξ'_k $(k \in -\boldsymbol{N})$ はそれぞれ μ_k を分布に持つ S -値確率変数で η とは独立であるものとする. ここで $\eta'_k = \eta(\xi'_k)$, $\eta'_{k+1} = \theta(\eta'_k)(\xi'_{k+1}), \cdots, \eta'_{-1} = \theta(\eta'_{-2})(\xi'_{-1})$ とおき, $(\eta'_{-1}, \cdots, \eta'_k)$ の $\boldsymbol{R}^k$ 上の分布を P^k とする. 補題 10 より $\theta(\eta(\xi'_{k-1}))$ は ξ'_{k-1} と独立でその分布は G 上 Haar 測度であるので $\theta(\eta(\xi'_{k-1}))(\xi'_k)$ と $\eta(\xi'_k)$ は同分布となる. ゆえにこの P^k は Kolmogorov の整合性条件を満たし, Kolmogorov の拡張定理より $\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{N}}$ 上確率測度 $\boldsymbol{P}$ で筒集合 $A_{-1} \times \cdots \times A_k \times \boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{N}}$ の測度が $P^k(A_{-1} \times \cdots \times A_k)$ であるものが存在する. この $\boldsymbol{P}$ が題意を満たす一意解であることはすぐにわかる.

＜証明終＞

2.3 解集合と端点

以後 G は可換であるとし, $\widehat{G}$ を G の双対群[2] とする. このとき,

補題 11 $S^{-\boldsymbol{N}}$ 上の確率測度 $\boldsymbol{P}$ が $\mathcal{P}_\mu(T)$ の元である必要十分条件は、 $\boldsymbol{P}$ の下で $\{\eta_k\ ; k \in -\boldsymbol{N}\}$ が次のような（非斉次の）マルコフ性をもつことである*:* 任意の有界ボレル関数 $f : S \to \boldsymbol{R}$ に対して*,*

$$\boldsymbol{E}\left[f(\eta_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] = \int f(\theta(\eta_{k-1})(y))\ d\mu_k(y)\ .$$

＜証明＞容易に分かる.

$\mathcal{B}(\mathcal{P}_\mu(T))$ を $\mathcal{P}_\mu(T)$ 上の σ-field で,

$$H_F(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}(F)\ :\ \mathcal{B}(\mathcal{P}_\mu(T))\text{-可測}, \quad \forall F \in \mathcal{F}_0 \tag{24}$$

となるものとする. このとき $\mathcal{B}(\mathcal{P}_\mu(T))$ 上の確率測度 ν の重心 $\boldsymbol{P}_\nu$ を,

$$\boldsymbol{P}_\nu(F) = \int_{\mathcal{P}_\mu(T)} \boldsymbol{P}(F)\ \nu(d\boldsymbol{P}) \tag{25}$$

で定義すると, $\mathcal{P}_\mu(T)$ は凸可測集合になる. ここで [Y] の Theorem 1 と同様に端点と漸近的 σ-field $\mathcal{F}_{-\infty}(= \cap \mathcal{F}_k)$ の関係を特徴付けた次の定理が得られる.

定理 12 $\boldsymbol{P} \in \mathcal{P}_\mu(T)$ とする. このとき*,*

[2] G をコンパクトで可換な位相群, $S^1 = \{z \in \boldsymbol{C}\ ;\ |z| = 1\}$ とする. このとき連続かつ準同型な写像 $\chi : G \to S^1$ を G の（準）指標という. $\chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_1 \circ \chi_2$ で演算を定義すると指標全体はまた群になる. この群を双対群とよび $\widehat{G}$ と書くことにする. $\widehat{G}$ は $L^2(G)$ の正規直交基底を成す. $G = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ のとき $\widehat{G} = \{\exp(2i\pi px)\ ;\ p \in \boldsymbol{Z}\}$ である.

(1) $\boldsymbol{P}$ *が* $\mathcal{P}_\mu(T)$ *の端点* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_{-\infty}$ *が* $\boldsymbol{P}$ *で自明な* σ*-field.*

<証明>

(1) $\mathcal{P}_\mu(T)$ の端点 $\boldsymbol{P}$ に対し $0 < \boldsymbol{P}(A) < 1$ なる $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$ が存在すると仮定する. $P(B) > 0$ なる $B \in \mathcal{F}_{-\infty}$ に対し確率測度,

$$P_B(\cdot) := \frac{\boldsymbol{P}(\ \cdot\ \cap B)}{\boldsymbol{P}(B)}$$

を定義すると補題 11 より $P_B \in \mathcal{P}_\mu(T)$ である. よって,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(A)P_A + \boldsymbol{P}(A^c)P_{A^c}$$

であることから $\boldsymbol{P}$ が端点であることに矛盾するので $\mathcal{P}_\mu(T)$ の端点 P に対して $\mathcal{F}_{-\infty}$ は自明な σ-field である.

逆に $\mathcal{F}_{-\infty}$ を自明な σ-field にする $\boldsymbol{P}$ は $\mathcal{P}_\mu(T)$ の端点であることを示す. そのためには $\boldsymbol{P}$ と同値な確率測度 $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{P}_\mu(T)$ は $\boldsymbol{P}$ に等しいことをいえば十分であるが, それは次の補題よりすぐにわかる.

<証明終>

補題 13 $\boldsymbol{P} \in \mathcal{P}_\mu(T)$ とし D を正で $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数で $\boldsymbol{E}[D] = 1$ なるものとする. $\dfrac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}} = D$ で $\boldsymbol{Q}$ を定義するとき,

$$\boldsymbol{Q} \in \mathcal{P}_\mu(T) \Leftrightarrow D : \mathcal{F}_{-\infty}\text{-可測}\ .$$

<証明> $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{P}_\mu(T)$ とする. $\mathcal{V}_k = \sigma\{\eta_k, \cdots, \eta_{-1}\}$ とおくと補題 11 より任意の有界で $\mathcal{V}_k$-可測な確率変数 V_k に対し,

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Q}}[V_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[V_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]$$

である. $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{k-1} \vee \mathcal{V}_k$ であるので単調族定理を使って任意の非負 $\mathcal{F}_0$-可測確率変数 X に対し,

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Q}}[X \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[X \mid \mathcal{F}_{k-1}]$$

を得る. この等式を $\boldsymbol{P}$ と D を用いて表すと,

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[XD \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[X \mid \mathcal{F}_{k-1}]\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}[D \mid \mathcal{F}_{k-1}]$$

であり, この式から全ての k で $D \in L^1(\mathcal{F}_{k-1}, \boldsymbol{P})$ となる. よって $D \in L^1(\mathcal{F}_{-\infty}, \boldsymbol{P})$ である. 逆に D が $\mathcal{F}_{-\infty}$-可測を仮定すると補題 11 から $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{P}_\mu(T)$ はすぐにいえる.

<証明終>

2.4 双対群と強解の存在

強解の有無に関しても [Y] と同様の方法が可能である.

補題 14 $\forall\chi \in \widehat{G},\ \forall k \in -\boldsymbol{N},\ \forall P$:*(22)* の解に対し,

$$\boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\eta_k) \mid \mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{E}_0\right] = \delta_\chi \chi \circ \theta(\eta_k) \tag{26}$$

ただし,

$$\delta_\chi = \begin{cases} 0, & \forall k',\ \lim_{n\to\infty} \prod_{j=k'-n}^{k'} \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\xi_j)\right] = 0 \\ 1, & \text{上以外} \end{cases}$$

＜証明＞

解の定義より η_k は $\xi_{k+1}, \cdots, \xi_{-1}$ と独立なので (26) の左辺は,

$$\boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\eta_k) \mid \mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{E}_k\right]$$

と等しいことに注意する.

(1) $\delta_\chi = 0$ の場合

まず $m \in -\boldsymbol{N}$ に対し,

$$\boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\eta_m) \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] = 0 \tag{27}$$

を示す. χ が準同型であることより,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[\chi \circ \theta(\eta_m) \mid \mathcal{F}_{-\infty}] &= \boldsymbol{E}\left[\chi(\theta(\theta(\eta_{m-1})(\xi_m))) \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \\ &= \boldsymbol{E}\left[\chi(\theta(\eta_{m-1})\theta(\xi_m)) \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \\ &= \boldsymbol{E}\left[(\chi \circ \theta(\eta_{m-1}))(\chi \circ \theta(\xi_m)) \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \\ &= \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\xi_m)\right] \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\eta_{m-1}) \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \end{aligned}$$

である. この作業を繰り返すことにより, 各 n に対し,

$$\boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\eta_m) \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] = \prod_{j=m-n}^{m} \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\xi_j)\right] \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\eta_{m-n-1}) \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \tag{28}$$

を得る. この両辺で $n \to \infty$ とすれば $\delta_\chi = 0$ より (27) が従う. 今の結果から,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}[\chi \circ \theta(\eta_k) \mid \mathcal{F}_{-\infty} \vee \sigma(\xi_{k-n}, \cdots, \xi_k)] \\ &\quad = \boldsymbol{E}\left[(\chi \circ \theta(\eta_{k-1}))(\chi \circ \theta(\xi_k)) \mid \mathcal{F}_{-\infty} \vee \sigma(\xi_{k-n}, \cdots, \xi_k)\right] \\ &\quad = \chi \circ \theta(\xi_k) \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\eta_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{-\infty} \vee \sigma(\xi_{k-n}, \cdots, \xi_k)\right] \\ &\quad = \cdots \\ &\quad = \chi(\theta(\xi_k)\theta(\xi_{k-1}) \cdots \theta(\xi_{k-n})) \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\eta_{k-n-1}) \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right] \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

となり, $n \to \infty$ とすれば,

$$\boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\eta_k) \mid \mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{E}_k\right] = 0$$

が得られる. これで $\delta_\chi = 0$ の場合は示せた.

(2) $\delta_\chi = 1$ の場合
このとき k' を十分小さくとれば,

$$\prod_{j=-\infty}^{k'} \left|\boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\xi_j)\right]\right| > 0$$

とできる. $k' < k$ ととってよい. $\chi \circ \theta(\eta_k)$ を,

$$\chi \circ \theta(\eta_k) = \chi(\theta(\eta_{k'}))\chi(\theta(\xi_{k'+1}) \cdots \theta(\xi_k))$$

と表し, $\chi(\theta(\eta_{k'}))$ が $\mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{E}_0$-可測であることを示す.

$$\Phi_n = \frac{\chi(\theta(\xi_{k'-n}) \cdots \theta(\xi_{k'}))}{\displaystyle\prod_{j=k'-n}^{k'} \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\xi_j)\right]} \tag{29}$$

$$\Psi_n = \chi \circ \theta(\eta_{k'-n-1}) \left(\prod_{j=k'-n}^{k'} \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\xi_j)\right] \right) \tag{30}$$

とおく. $\chi(\theta(\eta_{k'})) = \Phi_n \Psi_n$ であり, 有界マルチンゲール収束定理より Φ_n は $\mathcal{E}_{k'}$-可測な確率変数に概収束する. よって Ψ_n も概収束し, その極限確率変数は $\mathcal{F}_{-\infty}$ 可測である.

＜証明終＞

補題 15 $K := \{\chi \in \widehat{G}\ ;\ \delta_\chi = 1\}$ とおくと K は $\widehat{G}$ の部分群.

＜証明＞

$\chi^{-1}(g) = \overline{\chi(g)},\ g \in G$ より $\boldsymbol{E}\left[\chi^{-1} \circ \theta(\xi_j)\right] = \overline{\boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\xi_j)\right]}$ であるので, $\chi \in K \Leftrightarrow \chi^{-1} \in K$ は自明. また $1_{\widehat{G}} \in K$ も明らかである. よって, $\chi_1,\ \chi_2 \in K \Rightarrow \chi_1\chi_2 \in K$ を示せばよい.

$\varphi_j(\chi) = \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\xi_j)\right]$ とおく. 定義より十分小さな k に対し,

$$\prod_{j=-\infty}^{k} |\varphi_j(\chi_1)| > 0, \qquad \prod_{j=-\infty}^{k} |\varphi_j(\chi_2)| > 0$$

となる. (29) の φ_n と同様,

$$\varPhi_n(\chi_i) = \frac{\chi\left(\theta(\xi_{k-n})\cdots\theta(\xi_k)\right)}{\displaystyle\prod_{j=k-n}^{k}\varphi_j(\chi_i)} \qquad i=1,\ 2$$

は複素数値確率変数で確率 1 で 0 でないもの, に概収束する. よって,

$$H_n = \varPhi_n(\chi_1)\varPhi_n(\chi_2) = \frac{(\chi_1\chi_2)(\theta(\xi_{k-n})\cdots\theta(\xi_k))}{\left(\displaystyle\prod_{j=k-n}^{k}\varphi_j(\chi_1)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=k-n}^{k}\varphi_j(\chi_2)\right)} \tag{31}$$

も収束する. したがって,

$$\lim_{\substack{m<n\\m\to\infty}}\frac{H_n}{H_m} = \lim_{\substack{m<n\\m\to\infty}}\frac{(\chi_1\chi_2)(\theta(\xi_{k-n})\cdots\theta(\xi_{k-m-1}))}{\left(\displaystyle\prod_{j=k-n}^{k-m-1}\varphi_j(\chi_1)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=k-n}^{k-m-1}\varphi_j(\chi_2)\right)} = 1 \quad \text{a.s.}$$

であり, $\{H_n/H_m\ ;\ 0 \leqq m \leqq n < \infty\}$ は一様有界であるので,

$$\lim_{\substack{m<n\\m\to\infty}}\boldsymbol{E}\left[\frac{H_n}{H_m}\right] = 1$$

すなわち,

$$\lim_{\substack{m<n\\m\to\infty}}\frac{\displaystyle\prod_{j=k-n}^{k-m-1}\varphi_j(\chi_1\chi_2)}{\left(\displaystyle\prod_{j=k-n}^{k-m-1}\varphi_j(\chi_1)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=k-n}^{k-m-1}\varphi_j(\chi_2)\right)} = 1 \tag{32}$$

となる. この左辺で φ_j を $|\varphi_j|$ で置き換えても結果は同じであり, また K の定義より,

$$\lim_{\substack{m<n\\m\to\infty}}\prod_{j=k-n}^{k-m-1}|\varphi_j(\chi_1)| = 1, \qquad \lim_{\substack{m<n\\m\to\infty}}\prod_{j=k-n}^{k-m-1}|\varphi_j(\chi_2)| = 1$$

であるので,

$$\lim_{\substack{m<n\\m\to\infty}}\prod_{j=k-n}^{k-m-1}|\varphi_j(\chi_1\chi_2)| = 1$$

となり, よって m を十分大きくとれば,

$$\prod_{j=-\infty}^{-m}|\varphi_j(\chi_1\chi_2)| > 0 \tag{33}$$

＜証明終＞

補題 15 より K は $\widehat{G}$ の部分群であり, この K によって [Y] と同様の解の分類ができる.

定理 16 *1.* $K=\{1_{\widehat{G}}\}$ のとき, またそのときに限り解は一意. さらに, その解は弱解である.

2. 強解が存在 $\Leftrightarrow$ $K=\widehat{G}$.

<証明>

1. $K=\{1_{\widehat{G}}\}$ を仮定する, すなわち補題 14 より $\forall\chi\neq 1_{\widehat{G}}$ に対し,

$$\boldsymbol{E}\left[\chi\circ\theta(\eta_k)\mid\mathcal{F}_{-\infty}\vee\mathcal{E}_0\right]=0$$

となるとする. このとき任意の L^2-有界 な関数 f に対しフーリエ展開[3] することにより

$$\boldsymbol{E}\left[f\circ\theta(\eta_k)\mid\mathcal{F}_{-\infty}\vee\mathcal{E}_0\right]=\int_G f(g)\ \nu(dg)$$

が得られる. ここで ν は G 上 Haar 測度である. この式より $\theta(\eta_k)$ は $\mathcal{F}_{-\infty}\vee\mathcal{E}_0$ と独立でありその分布は G 上 Haar 測度に従う. 定理 9 よりこのような $\boldsymbol{P}\in\mathcal{P}_\mu(T)$ は一意的であり, また弱解であることも明らかである.

逆に解が一意であることを仮定すると, 定理 9 よりその解は $\boldsymbol{P}^*_\mu$ であり, $K=\{1_{\widehat{G}}\}$ であることは自明である.

2. $K=\widehat{G}$ を仮定する, すなわち $\forall\chi\in\widehat{G}$ に対し $\delta_\chi=1$ であるとする. このとき補題 14 より,

$$\boldsymbol{E}\left[\chi\circ\theta(\eta_{k-1})\mid\mathcal{F}_{-\infty}\vee\mathcal{E}_k\right]=\boldsymbol{E}\left[\chi\circ\theta(\eta_{k-1})\mid\mathcal{F}_{-\infty}\vee\mathcal{E}_0\right]=\chi\circ\theta(\eta_{k-1}),\quad\forall\chi\in\widehat{G}$$

であるので $\eta_k=\theta(\eta_{k-1})(\xi_k)$ は $\mathcal{F}_{-\infty}\vee\mathcal{E}_k$-可測. すなわち,

$$\mathcal{F}_k=\mathcal{F}_{-\infty}\vee\mathcal{E}_k$$

である. 定理 12 より $\mathcal{P}_\mu(T)$ の端点 $\boldsymbol{P}$ で測ると $\mathcal{F}_{-\infty}$ は自明な σ-field であり, 故に $\mathcal{F}_k=\mathcal{E}_k$ である.

<証明終>

[3] L^2-有界関数 f は $f(h)=\sum_\chi a_\chi\chi(h),\ a_\chi=\int_G f(g)\overline{\chi(g)}\ dg$ とフーリエ展開される.

2.5 連続型への埋め込みの例

以上の議論を連続型の Tsirel'son 方程式の拡張とその分類に応用することが究極の目標である. ここではその例として $SO(n)$ の部分群に対する分類についてコメントする.

$S = \boldsymbol{R}^n$ とする. G を $SO(n)$ の可換部分群とし, $\theta : S \to G$ が 1.1 節の性質を満たしているとする. このとき Tsirel'son の例と同様に数列 $\{t_k : k \in -\boldsymbol{N}\}$ で $t_{k-1} < t_k,\ t_k \to 0\ (k \to -\infty)$ なるものを用意し, $A : [0,\ \infty) \times (\boldsymbol{R}^n)^{[0,\ \infty)} \to G$ を,

$$A(t, X.) = \sum_{k \in -\boldsymbol{N}} \theta\left(\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}\right) 1_{[t_k,\ t_{k+1})}(t) \tag{34}$$

で定義する. このとき n 次元ブラウン運動 $B = \{B_t\}$ に対し, 確率微分方程式,

$$X_t = \int_0^t A(s, X.)\ dB_s \tag{35}$$

について考える. $X = \{X_t\}$ が (35) の解であるとする. このとき,

$$\xi_k = \frac{B_{t_k} - B_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}, \qquad \eta_k = \frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \tag{36}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} X_{t_{k+1}} - X_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \theta\left(\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}\right)\ dB_s \\ &= \theta\left(\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}}\right)(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \end{aligned}$$

であるので,

$$\eta_{k+1} = \theta(\eta_k)\xi_{k+1} \tag{37}$$

となる. $\prod_j \boldsymbol{E}\left[\chi \circ \theta(\xi_j)\right] = 0,\ \forall \chi \neq 1_{\widehat{G}}$ であるなら X は強解ではない.

参考文献

[Y] Yor, M. "Tsirel'son's equation in discrete time" *Probab. Theory Relat. Fields* **91** (1992), 135–152.

[T] Tsirelson, B. "An example of a stochastic differential equation that has no strong solution." *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **20** (1975), 427–430. [原論文はロシア語. 英訳は *Theory Probab. Appl.* **20:2** (1975), 416–418].

[D] Dynkin, E. B. "Sufficient statistics and extreme points." *Ann. Probab.* **6** (1978), 705–730.

[W] Williams, D: *Probability with Martingales.*,Cambridge.

[I-W] Ikeda, N. and Watanabe, S: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.*, North Holland-Kodansha, Amsterdam and Tokyo, 1981.