確率微分方程式の強い解

—「確率過程論と数理ファイナンス」における一つの話題 —

赤堀次郎
立命館大学理工学部助教授
渡辺信三
立命館大学理工学部客員教授

On the Strong Solutions of Stochastic Differential Equations: a note on stochastic calculus applied to mathematical finance

Jirô Akahori
Associate Professor of Department of Science and Engineering,
Ritsumeikan University
&
Shinzo Watanabe
Visiting Professor of Department of Science and Engineering,
Ritsumeikan University

確率微分方程式の強い解

—「確率過程論と数理ファイナンス」における一つの話題 —

赤堀次郎*　渡辺信三†

【要旨】

近代経済学の発展に数学や，数理統計学は重要な役割を果たしてきたが，近年，数理ファイナンスと呼ばれる新しい金融の理論においては，**確率解析学（Stocahstic calculus)** という比較的新しい数学が基本的な方法を提供している．そこでは，市場の数学モデルとして，株式等の証券の価格の時間変化のモデルが確率過程として定式化され，**確率微分方程式**を中心とする確率解析の方法を用いて研究が行われている．

確率過程を数学的に構成する方法はいくつかあるが，数理ファイナンスの理論においては確率微分方程式の理論が有用である．数理ファイナンスの理論において，市場の完備性を考察する際には，確率過程の与える情報系—「filtration」や，その filtration に関する martingale（と呼ばれる確率過程）全体の集合の構造を知ることが基本的に重要になるが，その集合＝空間の構造を調べる方法としては，確率微分方程式の方法がもっとも優れているからである．

本稿では，まず，その確率微分方程式の理論を概観する．とくにその「弱い解」と「強い解」の相違について注意を喚起し,「強い解」の存在についての新しい結果を述べる．この結果は**確率的流れ (stochastic flow)** を先に構成し，そこから確率微分方程式の「強い解」を与える，という点で既存の方法とは異なる新しい手法である．

その新しい理論の数理ファイナンスへの直接の応用についてはいまだ研究成果は出ていないが，結びでいくつかの注意を喚起しておく．

【キーワード】

確率解析学，数理ファイナンス，フィルトレーション，確率微分方程式, 強解，確率的流れ

*立命館大学理工学部助教授

†立命館大学理工学部客員教授

1. 序

確率微分方程式は確率過程の構成における一方法として生まれた．確率過程の理論は，1920年代から 1930 年代にかけて飛躍的に発展しその面目が一新されたが，それは P. Lévy, A. N. Kolmogorov, N. Wiener といった偉大な先駆者たちの研究の賜物である．Kolmogorov [Ko] は，天体運動のような力学法則に従う系，即ち，現時点の状態を与えると未来の状態が完全に予測出来る決定的な系に対比して，現在の状態を与えても未来の状態はいろいろ可能で一意的に定まらず，その可能な状態の確率が与えられているような系を考え，これを「確率的に定義されている系」と呼んでその数学的記述の方法を論じた．これが今日 Markov 過程と呼ばれる最も代表的で重要な確率過程で，Kolmogorov はその推移確率系の満たす基本方程式として「Kolmogorov の方程式」を導いた．そこで確率過程を構成するにはその Kolmogorov の方程式を積分すればよいが，その方法として関数解析学における「Hille-吉田の半群理論」が有効に用いられた．さらに今日では，対称な Markov 過程の場合に「Dirichlet 形式」を用いる理論が福島正俊によって開発され，確率過程を構成し解析するための重要な方法になっている．

Hille-吉田の半群理論や，福島の Dirichlet 形式の理論は，Markov 過程論における代表的な確率過程を構成するための解析的方法であるが，伊藤清 [I] によって確立された確率微分方程式の理論は，その代表的な確率論的方法である．力学法則に従う決定的な運動は，ニュートン以来，微分方程式によって記述され，その解析が出来る．それと同様に，偶然的な運動のモデルである確率過程も，確率微分方程式によって記述，解析され，それを解くことによってその構成が出来る．確率微分方程式は「ノイズ」を伴った微分方程式であり，ノイズとしては Wiener 過程，あるいは本質的に同じ意味であるが別の言い方で，Gaussian white noise が用いられる． その際， Wiener 過程に基づく「確率積分」の概念と，この概念を用いて与えられる確率過程のクラス（伊藤過程と呼ばれることが多い）に対する基本的な変換公式，所謂「伊藤の公式」，が理論の根幹をなす．尚，Wiener 過程は，顕微鏡で観察される水中の花粉粒子の Brown 運動の数学モデルとして，N. Wiener や P. Lévy によって導入され研究された基本的な確率過程であり，それの指数関数である「幾何的 Brown 運動」は，Samuelson [S] によって株価変動のモデルとして導入され，Black と Scholes によるオプションの価格理論 [BS] によって金融の理論界と実務界の両方で広く知られるようになっている．

その Black=Sholes のオプション価格公式に対して，Merton [M] は，確率解析を用いてその数学的基礎付けを行った．今日から見れば，そこではマルチンゲール表現定理が本質的であることが暗示されているが，その後，Harrison，Kreps，Pliska の一連の研究 [HK], [HP] によって，そのことがはっきり理論化された．彼らの理論は，標語的にいえば,「同値マルチンゲール測度による期待値＝無裁定価格」であり,「無裁定価格がただひとつに定まる＝市場が完備＝同値マルチンゲールがただひとつに定まる」ということである．これらの標語的事実は，もはやアカデミックな世界のみならず，実務界でもほぼ常識となっている．

しかし，マルチンゲール性というのは確率過程の持つひとつの側面にすぎず，モデルを現実に合うように構成するには，マルコフ性などを通じて，確率過程を「具体的」に構成する必要がある．ところが数理ファイナンス理論においては，市場のモデルである確率過程を Kolmogorov の方法に従い，その推移確率を通して有限次元分布の系を与えて決定するという方法では不十分である．数理ファイナンス理論では，確率過程の生成する「filtration」や，その filtration に関する martingale の空間の構造を知ることが基本的に重要にであるためである．市場の無裁定性や完備性はこうした filtration に関する問題と本質的に関わる．確率微分方程式を用いる確率過程研究の方法は，特にこの点において有効である．

確率微分方程式は，その定義において，ノイズである Wiener 過程が付随しているが，確率微分方程式を用いて，その解の生成する filtration が，Wiener 過程が生成する filtration と一致する，あるいは Wiener 過程の生成する filtration に「martingale 埋め込み」されていることが多くの場合に示され，従って解の生成する filtration が判るのである．このような問題に関して，確率微分方程式の解における「強い解」（及び，対立概念としての「弱い解」）の概念が重要になる．

この小論において，確率微分方程式の強い解の概念の解説を行い，最後に既存の理論でカバーされない強い解の一意的存在に関する一つの結果を与える．その際の基本的アイデアは，確率微分方程式の定義する「確率的流れ」(stochastic flow) の概念を用いる点にある．上で述べたように，確率微分方程式は Kolmogorov の方程式に従う確率過程を構成する目的で導入されたが，確率微分方程式の解はそのような確率過程よりさらに精密な構造をもった数学的対象を定義する．それが確率的流れと言われるもので ([Ku] 参照)，常微分方程式が定義する状態空間上の一径数変換群 (数学でいう力学系，あるいは，流れ (flow)) に対応するものである．このような，より複雑で興味ある対象を生み出す点も，確率微分方程式による方法がもつ利点の一つであると言える．

2.　確率微分方程式の強い解

$\sigma(x), \gamma(x)$ は実直線 $\mathbf{R}$ 上で定義された Borel 可測関数とし，次の確率微分方程式 (stochastic differential equation, しばしば SDE と略記する) を考える．

$$dX_t = \sigma(X_t)dw(t) + \gamma(X_t)dt, \quad X_0 = x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

一般次元の場合や時間に依存する場合（即ち，σ, や γ が $\sigma(t,x), \gamma(t,x)$ のように時間 t に依存する場合）の方程式も勿論考えられるが，ここでは１次元の時間に依存しない場合に限って議論する．実直線 $\mathbf{R}$ の場合と共に，半直線 $[0,\infty)$ の場合も考えるが，このときの解は反射壁過程に限ることとし，方程式は次の **Skorohod 型**のものを考察する．

$$dX_t = \sigma(X_t)dw(t) + \gamma(X_t)dt + dl(t), \quad X_0 = x \in [0,\infty). \tag{2}$$

定義 1. (1) SDE (1) の解とは，ある filtration $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ （即ち，事象のなす σ-field の増大系）を伴った確率空間上で定義された $\mathbf{R}$-値，$\mathbf{F}$-適合，連続過程 $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ であって，条件

$$\int_0^t \sigma^2(X_s)^2 ds + \int_0^t |\gamma(X_s)| ds < \infty, \text{ a.s.}, \quad \forall t > 0, \tag{3}$$

を満たし，さらにある $\mathbf{F}$-Wiener 過程 $w = \{w(t)\}$ に対し，方程式

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dw(s) + \int_0^t \gamma(X_s) ds. \tag{4}$$

を満たすものをいう．

(2) SDE (2) の解 $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ の定義も同様になされるが，この場合 $\mathbf{X}$ は，$[0, \infty)$-値の $\mathbf{F}$-適合連続過程であって，条件 (3) と共に次の条件

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[X_s = 0]} ds = 0, \text{ a.s.}, \quad \forall t > 0, \tag{5}$$

を満たし，さらにある $\mathbf{F}$-Wiener 過程 $w = \{w(t)\}$ と，$\mathbf{F}$-適合連続増加過程 $l(t)$ で，$l(0) = 0$, かつ X_t が境界点 0 にあるときのみ増加するもの，即ち条件

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[X_s = 0]} dl(t) = l(t), \text{ a.s.}, \quad \forall t > 0, \tag{6}$$

を満たすものが存在して，方程式

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dw(s) + \int_0^t \gamma(X_s) ds + l(t), \tag{7}$$

が満されるものをいう．

以後，主に方程式 (1) について議論するが，同様のことはそのまま方程式 (2) についてもなりたつ．解の存在に関しては，例えば，係数 σ や γ が連続で，$|x| \to \infty$ のとき ”線形増大度 ”，即ち，$O(|x|)$ の増大度をもつとき，方程式 (1) について，(方程式 (2) については，例えばさらに $\sigma(0) > 0$ の条件を課せば），任意の初期値 x に対して，方程式の解は存在する．もし増大度の仮定を落とすと，解は一般には局所的にしか存在しない．

一般に，方程式の任意の解の確率過程としての法則が，その初期値 x から一意的に定まるとき，”分布（法則）の意味の一意性が成り立つ ”という．例えば，係数 σ や γ が連続で，さらに，ある定数 $C > 0$ に対し，$\sigma(x) \geq C$ となっていれば，分布の意味の一意性が成り立つことが知られている．

確率微分方程式 (1) または (2) の解 $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ に対し，$t \geq 0$ を与えたとき，確率変数系 $\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$ によって生成される σ-field を $\mathcal{F}_t^X$ と表す．これより filtration $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$

が得られるが，これを "$\mathbf{X}$ に固有の filtration "，あるいは "$\mathbf{X}$ から生成される filtration " という．また，確率微分方程式に現れる Wiener 過程 w に対し，$t \geq 0$ を与えたとき，確率変数系 $\{w(s) - w(0); 0 \leq s \leq t\}$ によって生成される σ-field を $\mathcal{F}_t^{dw}$ と表すと， filtration $\mathbf{F}^{dw} = \{\mathcal{F}_t^{dw}\}_{t \geq 0}$ が得られる．

定義 2. 確率微分方程式 (1) または (2) の解 $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ が，**強い解** であるとは，$\mathbf{F}^X \subset \mathbf{F}^{dw}$，即ち，任意の $t \geq 0$ に対し，$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^{dw}$ が成り立つことを言う．

確率微分方程式が強い解をもつか否かを考えることは，確率微分方程式を考える際の興味ある問題であり，上に述べたように数理ファイナンス理論とも関わる．確率微分方程式の解が存在するとして，たとえ分布の意味の一意性が成り立つとしても，強い解であるとは限らない．確率微分方程式論の創始者である伊藤清は，主に係数 σ や γ が Lipschitz 連続である場合を考えた．この条件のもとでは，方程式の解の Picard 逐次近似が方程式の解に収束し，そのことより解が強い解であることが示される．必ずしも Lipschitz 連続でない一般の場合で強い解の存在を考えるときには，山田 · 渡辺 [YW] によって導入された "道ごとの一意性 (pathwise uniqueness) "の概念が重要になる．

定義 3. 確率微分方程式 (1) または (2) において，任意に与えられた $\mathbf{F}$-Wiener 過程 w に対する，同じ初期値をもつ二つの解は，その見本関数が確率 1 で一致するとき，解の **道ごとの一意性** が成り立つという．

山田 · 渡辺は，解が存在し，さらに道ごとの一意性が成り立つとき，分布の意味の一意性が成り立ち，さらに解は必ず強い解であることを示した [YW], [IW]．道ごとの一意性を保証する係数の条件については，山田 · 渡辺によって得られた 1 次元の場合の結果，さらにそれでカバーされない場合の中尾や Le Gall の結果などが知られている [IW], [N], [L]．

3. 確率的流れ (stochastic flows)

確率微分方程式 (1) または (2) において，任意に与えられた初期値に対する解が存在し，さらに道ごとの一意性が成り立つと仮定する．上では，時間は 0 から始まるとしたが，勝手な時間 $s \in \mathbf{R}$ から始まるとしてよい．そこで，初期条件 $X_s = x$ を満たす (1) または (2) の解 $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \geq s}$ を考え，$X_t = X_{s,t}(x)$ と表す．また写像 $x \mapsto X_{s,t}(x)$ を $X_{s,t}$ で表す．このとき，道ごとの一意性の仮定から，次の重要な性質（この性質を flow property という）が成り立つことが判る：(写像の合成を $\circ$ で表して)，各 s に対し，$X_{s,s} = \mathrm{id}$ （恒等写像）であり，

$$X_{s,u} = X_{t,u} \circ X_{s,t}, \quad \text{即ち，} \quad X_{s,u}(x) = X_{t,u}\left(X_{s,t}(x)\right), \quad s \leq t \leq u. \tag{8}$$

時間 $s < t$ を固定して，確率変数系 $\{X_{s,u}(x); s \leq u \leq t, x \in \mathbf{R}\}$ （方程式 (2) の場合は，$x \in [0, \infty)$ ）によって生成される σ-field を $\mathcal{F}_{s,t}^X$ と表す．また，確率微分方程式に現れる

Wiener 過程 w に対し，$s < t$ を与えたとき，確率変数系 $\{w(u) - w(s); s \le u \le t\}$ によって生成される σ-field を $\mathcal{F}_{s,t}^{dw}$ と表す．強い解ということから，$\mathcal{F}_{s,t}^{X} \subset \mathcal{F}_{s,t}^{dw}$ となる．このことより，次が容易に結論出来る：

$$t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \quad \text{に対し，} \mathcal{F}_{t_{i-1},t_i}^{X},\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{は互いに独立.} \tag{9}$$

さらに，係数 σ や γ が時間に依存しないことから，次が成り立つことが容易に示される：

$$s < t \quad \text{と} \quad h \quad \text{に対し，} X_{s,t} \quad \text{と} \quad X_{s+h,t+h} \quad \text{は同法則.} \tag{10}$$

定義 4.　一般に，写像の空間に値をとる確率変数の系 $\{X_{s,t}\}_{s \le t}$ が (8), (9), (10) の性質を満たすとき，**確率的流れ** であるという．

従って，道ごとの一意性が成り立つ確率微分方程式の解は，確率的流れを定義する． 方程式 (1) の場合で，係数 σ や γ が十分滑らかで（２回連続的微分可能であれば十分），１階微分 σ', γ' が有界のときは，勿論，道ごとの一意性が成り立ち，解は global に存在するので，確率的流れ $\{X_{s,t}\}_{s \le t}$ が定義されるが，このとき，写像 $x \mapsto X_{s,t}(x)$ は，確率 1 で，全ての $s \le t$ に対して，直線 $\mathbf{R}$ の順序を保つ同相写像 (homeomorphism) となることが知られている ([Ku])．従って，$x \ne y$ とするとき，時刻 s で，それぞれ x および y から出発する解は，決してぶっつかることはない．しかし，道ごとの一意性が成り立つ場合でも，一般には，異なる点から出る解の衝突 (coalescence) は起こり得る．そのような衝突の起こる確率的流れは，”合流型の確率的流れ ”(coalescing stochastic flow) といわれる． どのような場合に，非合流型の確率的流れ，即ち，同相写像のなす流れになるか，あるいは合流型の確率的流れになるか，についての精密な判定条件が，山田 · 小倉 ([YO]) によって得られている．

半直線 $[0, \infty)$ 上の方程式 (2) の場合には，係数がどのように滑らかであっても，それが定義する確率的流れは，必ず，合流型となる．それは，$x > 0$ から出発する解は，原点 0 に到達するまでには，必ずその点より左にある点，即ち $0 \le y < x$ を満たす点 y，より出発する解と衝突するからである．この合流型確率的流れを，”反射壁確率的流れ ”，あるいは方程式の係数を明示して，” (σ, γ)-反射壁確率的流れ ”と呼ぶ．(σ, γ)-反射壁確率的流れ $\{X_{s,t}\}_{s \le t}$ に対し，時刻 s に点 x から出発する見本関数 $t \in [s, \infty) \mapsto X_{s,t}(x)$ が始めて原点 0 に到達する時間を $\tau^{s,x}$ と表して，

$$X_{s,t}^{-}(x) = X_{s,t \wedge \tau^{s,x}}(x)$$

と置く．このとき，写像 $x \mapsto X_{s,t}^{-}(x)$ は一つの確率的流れを定義することは容易に示される．これを ”(σ, γ)-吸収壁確率的流れ ”と呼ぶ．この直感的描像は，反射壁確率的流れに従って動く粒子を原点 0 に到達した瞬間に，直ちに原点 0 に吸収させ，それ以後動かずに原点 0 に留めるというものである．

4.　強い解の存在に関する一結果

半直線 $[0,\infty)$ 上の方程式 (2) を考える．係数 σ, γ に次の仮定を置く．

(i) $\sigma(x) > 0$, $x \in (0,\infty)$.
(ii) $\sigma(x)$, $\gamma(x)$ は $(0,\infty)$ 上，十分滑らかで（２回連続的微分可能であれば十分），１階微分 σ', γ' が $[1,\infty)$ 上，有界である．
(iii)

$$\int_{0+}^{1} \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp\left\{ -\int_x^1 \left(\frac{2\gamma}{\sigma^2}\right)(y)dy \right\} dx + \int_{0+}^{1} \exp\left\{ \int_x^1 \left(\frac{2\gamma}{\sigma^2}\right)(y)dy \right\} dx < \infty. \quad (11)$$

(iv)　$\widehat{\gamma}(x) = \sigma(x)\sigma'(x) - \gamma(x)$ と置いて，(11) に於いて γ を $\widehat{\gamma}$ で置き換えた条件が成り立つ．

(iii) と (iv) の条件は，$(0,\infty)$ 上の２階微分作用素 (Feller 作用素) L と $\widehat{L}$ を，

$$L = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \gamma(x)\frac{d}{dx} \quad \text{及び} \quad \widehat{L} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \widehat{\gamma}(x)\frac{d}{dx} \quad (12)$$

で定めるとき，境界点 0 が，L 及び $\widehat{L}$ について，Feller 或いは Itô-McKean ([IM]) の意味で正則 (regular, entrance and exit とも言う) であることを意味する．このとき，次の結果が成り立つ．

定理．　係数 σ, γ が上の条件 (i) $\sim$ (iv) を満たすとき，方程式 (2) の解の道ごとの一意性が成り立ち，強い解が存在する．

以下で証明の基本的考えを説明する．

第１段　$x > 0$ として，時刻 s に x を出発する（即ち，$X_s = x$ を満たす）解 X_t は，X_t が区間 $(0,\infty)$ 内にある限り，一意的に存在するが，境界点 0 が作用素 L の正則境界点であることから，有限な時刻 $\tau^{s,x} > s$ が存在して，$\lim_{t\to\tau^{s,x}} X_t = 0$ となる．そこで，$t \geq s$ に対し $X_{s,t}^-(x)$ を，

$$X_{s,t}^-(x) = \begin{cases} X_t, & t \in [s, \tau^{s,x}) \\ 0, & t \geq \tau^{s,x} \end{cases}$$

によって定めると，$t \in [s,\infty) \mapsto X_{s,t}^-(x) \in [0,\infty)$ は連続である．また，$X_{s,t}^-(0) = 0$, $t \geq s$, と置く．これより，各 $s \leq t$ に対して，写像 $x \in [0,\infty) \mapsto X_{s,t}^-(x) \in [0,\infty)$ が得られたが，この写像の系が確率的流れを定義することは，容易に確かめられる．従って，$\{X_{s,t}^-\}_{s\leq t}$ は，(σ,γ)-吸収壁確率的流れを定義する．このように，吸収壁確率的流れの構成は比較的簡単に行うことが出来る．

第２段　第１段で構成した (σ,γ)-吸収壁確率的流れ $\{X^-_{s,t}\}_{s\geq t}$ については，次の性質がある：$s<t$ のとき，確率１で，$X^-_{s,t}(x)$ は，x の関数と考えて，ある $x_0>0$ が存在して，$0\leq x<x_0$ で $X^-_{s,t}(x)=0$ であり，$x_0<x<\infty$ では，連続な狭義単調増加関数になる．この事を厳密に示すには，$\varepsilon>0$ を任意に固定して，関数 σ,γ を $[\varepsilon,\infty)$ の外へ，$\mathbf{R}$ 全体の上で滑らかでかつ，１階微分が有界となるように拡張する．そのように拡張された関数を，それぞれ，$\widetilde{\sigma},\widetilde{\gamma}$ と記す．上で述べたように，$\widetilde{\sigma},\widetilde{\gamma}$ を係数とする $\mathbf{R}$ 上の確率微分方程式は，$\mathbf{R}$ の同相写像よりなる確率的流れ $\{\widetilde{X}_{s,t}\}_{s\geq t}$ を定めるが，解の一意性から，$\{\widetilde{X}_{s,t}\}$ と $\{X^-_{s,t}\}$ は，局所的に一致する；すなわち，$x>\varepsilon$ より出発するそれぞれの解曲線 $t\in[s,\infty)\mapsto\widetilde{X}_{s,t}(x)$ と，$t\in[s,\infty)\mapsto X^-_{s,t}(x)$ は，点 ε に到達するまで一致する．このことより，上に述べた写像 $x\mapsto X^-_{s,t}(x)$ の性質は容易に導かれる．尚，便宜上この写像は右連続になるように，$x_0>0$ での値は $X^-_{s,t}(x_0+)$ と定めておく．

第３段　ここで述べることは半直線 $[0,\infty)$ 上の確率的流れに関する一般論である．$\{X_{s,t}\}_{s\geq t}$ は $[0,\infty)$ 上の確率的流れで，$s<t$ のとき，確率１で，写像 $x\in[0,\infty)\mapsto X_{s,t}(x)\in[0,\infty)$ は右連続，非減少，かつ $\lim_{x\to\infty}X_{s,t}(x)=\infty$ を満たすとする．この写像の不連続点の集合を $D(X_{s,t})$ で表す：即ち，$D(X_{s,t})=\{\ y\mid X_{s,t}(y-)\neq X_{s,t}(y)\ \}$（但し，$X_{s,t}(0-)=0$ と置く：従って，$X_{s,t}(0)>0$ のとき，$0\in D(X_{s,t})$ である）．また，ある $0\leq y<z$ に対して，$X_{s,t}(y)=X_{s,t}(z)$ となるような $X_{s,t}(y)$ の値全体の集合を $R(X_{s,t})$ と表す．そして，$s\leq t\leq u$ のとき，確率１で，$R(X_{s,t})\cap D(X_{t,u})=\emptyset$ であると仮定する．

このような性質をもつ $[0,\infty)$ 上の確率的流れ $\{X_{s,t}\}_{s\geq t}$ が与えられたとする． 関数 $x\to X_{s,t}(x)$ の右連続逆関数を $x\to X^{-1}_{s,t}(x)$ で表す： 即ち，$X^{-1}_{s,t}(x)=\inf\{\ y\mid X_{s,t}(y)>x\ \}$. $s\leq t\leq u$ のとき，$R(X_{s,t})\cap D(X_{t,u})=\emptyset$ より，$(X_{s,u})^{-1}=X^{-1}_{s,t}\circ X^{-1}_{t,u}$ が成立つ．従って，$X^*_{s,t}$ を

$$X^*_{s,t}=(X_{-t,-s})^{-1},\quad s\leq t$$

によって定義するとき，$\{X^*_{s,t}\}_{s\geq t}$ も $[0,\infty)$ 上の確率的流れとなる．これを，流れ $\{X_{s,t}\}$ の**双対確率的流れ** (dual stochastic flow) という.，$\{X^*_{s,t}\}_{s\geq t}$ もこの段落の前半で述べた諸性質をもち，その双対確率的流れ $\{(X^*_{s,t})^*\}$ を考えることが出来るが，これは $\{X_{s,t}\}$ と一致することも容易に判る．

第４段　第１段で構成した (σ,γ)-吸収壁確率的流れ $\{X^-_{s,t}\}_{s\geq t}$ については，第３段の前半で述べた諸性質はすべて満たされ，その双対確率的流れ $\{(X^-_{s,t})^*\}$ が定義される．これを $\{\widehat{X}^+_{s,t}\}$ と表そう．$\mathcal{F}^{X^-}_{s,t}=\mathcal{F}^{dw}_{s,t}$ であるので，双対確率的流れの定義より，$\mathcal{F}^{\widehat{X}^+}_{s,t}=\mathcal{F}^{d\widehat{w}}_{s,t}$ となることが判る．ここで，$\widehat{w}(t)=w(-t)$ と置いた．従って，$\widehat{w}$ も１次元 Wiener 過程である．

次の事実が証明の鍵となる：「$\widehat{X}_t:=\widehat{X}^+_{0,t}(x)$ と置くとき，$\{\widehat{X}_t\}_{t\geq 0}$ は，(2) において γ を $\widehat{\gamma}$ に置き換え，Wiener 過程 w を $\widehat{w}$ に置き換えた確率微分方程式の解である.」 この事

実は次のような考察を積み重ねて示される． $\widehat{X}_t$ は，確率的流れ $\{\widehat{X}^+_{s,t}\}$ の時間 0 に x から出発する運動として，Markov 過程であり，その推移半群が Feller 半群となることから，強 Markov 過程である．次に，確率的流れ $\{\widehat{X}^+_{s,t}\}$ は，確率的流れ $\{X^-_{s,t}\}_{s\geq t}$ の双対確率的流れであるから，第 2 段で導入された $\mathbf{R}$ 上の同相写像よりなる確率的流れ $\{\widetilde{X}_{s,t}\}$ の双対確率的流れ $\{\widetilde{X}^*_{s,t}\}$ と局所的に一致する． $\{\widetilde{X}^*_{s,t}\}$ については，次のことが良く知られている： $\{\widetilde{X}^*_{s,t}\}$ は，係数を $\widetilde{\sigma}$ かつ $\widetilde{\gamma}^\wedge := \widetilde{\gamma} - \widetilde{\sigma}\cdot\widetilde{\sigma}'$ で置き換え，Wiener 過程 を $\widehat{w}$ で置き換えた $\mathbf{R}$ 上の確率微分方程式 (1) の解が定める確率的流れである（例えば [Ku], p.131, [IW], p.265 を見よ）．このことより， $\widehat{X}_t$ は，区間 $(0,\infty)$ に留まっている限り，係数 γ を $\widehat{\gamma}$ で置き換え，Wiener 過程 を $\widehat{w}$ で置き換えた確率微分方程式 (2) の解であること，また，強 Markov 過程としての $\widehat{X}_t$ は，Feller 作用素 $\widehat{L}$ に従う区間 $[0,\infty)$ 上の拡散過程で，それは境界 0 における Feller の境界条件より定まることが判る．そして，この境界条件が反射壁条件であることが，写像 $x \mapsto \widehat{X}^+_{s,t}(x)$ が，写像 $x \mapsto X^-_{-t,-s}(x)$ の逆関数になる，その形をみて判る．このようにして，$\{\widehat{X}_t\}$ は，作用素 $\widehat{L}$ に従う $[0,\infty)$ 上の反射壁拡散過程となり，その法則が定まる．このことを用いれば，$\{\widehat{X}_t\}$ は,（局所的には既に判っていたが）大域的にも，係数 γ を $\widehat{\gamma}$ で置き換え，Wiener 過程 を $\widehat{w}$ で置き換えた確率微分方程式 (2) の解であることを標準的な議論で示すことが出来る．以上で鍵になる事実が示された．

確率的流れ $\{\widehat{X}^+_{s,t}\}$ について，$\mathcal{F}^{\widehat{X}^+}_{s,t} = \mathcal{F}^{d\widehat{w}}_{s,t}$ となることを上で注意した．これより，$\{\widehat{X}_t\}$ は Wiener 過程 $\widehat{w}$ に関する強い解であることが判る．またその方程式の解の法則は，作用素 $\widehat{L}$ に従う $[0,\infty)$ 上の反射壁拡散過程のそれとして一意的に定まるから，解の分布の意味の一意性が成立つ．この二つの事実より，係数 γ を $\widehat{\gamma}$ で置き換え，Wiener 過程 を $\widehat{w}$ で置き換えた確率微分方程式 (2) について，解の道ごとの一意性が成立つことを結論づけることは，難しいことではない．以上を総合して，結局，係数 γ を $\widehat{\gamma}$ で置き換え，Wiener 過程 を $\widehat{w}$ で置き換えた確率微分方程式 (2) について，定理の主張が示せたことになる．従って，本来の定理の主張を得るには，最初に，Wiener 過程として $\widehat{w}$ をとり，関数 γ の代わりに $\widehat{\gamma}$ をとって，上の議論を行えば良い．以上で証明は完結する．

最後に次の注意を与えておきたい．この定理においては，係数の σ や γ は，開区間 $(0,\infty)$ で滑らかと仮定しているから，方程式の解が区間 $(0,\infty)$ に留まっている範囲での解の一意性は明らかであるが，区間 $[0,\infty)$ 上では，係数は必ずしも連続でも，有界変動でもない．従って， 大域的な強い解の一意的存在を既存の結果より導くことは，出来そうにない．また，証明の方法も，道ごとの一意性を始めに示すのでなく，吸収壁確率的流れを Wiener 過程の汎関数としてまず構成し，その双対確率的流れを汎関数の変換として構成すると，求める強い解が自然と出来ているのである．道ごとの一意性はむしろこの強い解の存在から従うので，通常の方法とは全く逆の道筋をたどっている．

5. 結び

以上で，確率微分方程式の強い解の存在証明の新手法について述べてきた．数理ファイナンスとの関連で言えば，市場に完備性をあらかじめ仮定するようなモデルでは，マルチンゲール表現定理が成り立てばよいので，必ずしも確率微分方程式の強い解を必要としない．しかし，非完備市場のモデルを構成するときには，資産価格の確率過程を与えるときに，その分布のみを与えるのでは本質的に不十分である．このことは赤堀の研究 [A] によって示唆されている．ただし，確率微分方程式の強い解と弱い解のあいだのギャップがそれに関連するかどうかについては十分に解明されているとはいえない．

本稿で述べた新しい手法は，そのように数理ファイナンス理論にとって重要である，確率微分方程式の強い解と弱い解との間の関連の研究に対して，ひとつの方法を提供するものになることが期待される．

参考文献

[A] J. Akahori, Asymptotics of hedging errors in a slightly incomplete discrete market. preprint.

[BS] F. Black and M. Sholes, The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy **81** (1973), 637–654

[HK] L. Harrison and D. Kreps, Martingales and arbitrage in multi period securities market. Journal of Economic Theory **20**(1979), 381–408

[HP] L. Harrison and S. Pliska, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. Stochastic Processes and Their Applications **11**(1981), 215–260

[IW] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Second Edition, North-Holland/Kodansha, Amsterdam·Oxford·New York/Tokyo, 1988

[I] 伊藤清，Markoff 過程ヲ定メル微分方程式，全国誌上談話会，**244**(1942), 1352-1400, *English translation*: Differential equations determining a Markoff process, *in Kiyosi Itô Selected Papers, D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan, eds.* Springer, New-York/Berlin/Hedelberg/London/Paris/Tokyo, 1987, 42-75,

[IM] K. Itô and H. P. McKean, Jr., *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer, Berlin, 1965, Second Printing 1974, in *Classics in Mathematics*, 1996

[Ko] A. N. Kolmogoroff, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math.Ann.**104**(1931), 415-458

[Ku] H. Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations,* Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[L] J. F. Le Gall, Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles, *Sém. Prob. XVII*, **LNM 986**, Springer, Berlin (1983), 15-31

[M] R. Merton, "The theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics and Management Science **4**(1973), 141–183

[N] S. Nakao, On the pathwise uniqueness of solutions of stochastic differential equations, Osaka J. Math. **9**(1972), 513-518

[S] P. Samuelson, Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. Review of Economics and Statistics **51** (1969), 239–246

[YO] T. Yamada and Y. Ogura, On the strong comparison theorems for solutions of stochastic differential equations, Z. Wahrsch. verw, Geb.**56**(1981), 3-19

[YW] T. Yamada and S. Watanabe, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math.Kyoto Univ.**11**(1971), 553-563

On the Strong Solutions of Stochastic Differential Equations: A note on stochastic calculus applied to mathematical finance

Jirô Akahori[1]

&

Shinzo Watanabe[2]

abstract

Mathematics including statistics has been an indispensable tool for Economics. It is widely recognized that for *mathematical finance*, the newly and rapidly developing research area, *stochastic calculus* is especially important mathematical tool. In mathematical finance, fluctuations of the prices of underlying assets are modeled as *stochastic processes*, and stochastic calculus is used as a basic mathematical tool.

Though there are several ways to construct stochastic processes, they are often constructed through *stochastic differential equations* in mathematical finance. This is because it has some advantages to study the space of martingales of a natural filtration of the constructed stochastic process. Fundamental theorem of asset pricing theory tells us that structure of that space determines the completeness of the market.

In this paper, we briefly review the theory of stochastic differential equations, giving a stress on the types of their solutions: *the strong one* and *weak one*. Our main result is on the existence of strong solutions. They are constructed through *stochastic flows*, which approach have never been taken in the existing researches.

Though our result has no direct application to mathematical finance, we make a remark on some related topics in the conclusion.

keywords

stochastic calculus, mathematical finance, filtration, stochastic differential equation, strong solution, stochastic flow

[1] Associate Professor, Department of Science and Engineering, Ritsumeikan University

[2] Visiting Professor, Department of Science and Engineering, Ritsumeikan University