

[] 内はヒントや注意 .

§4.1

積分定数 + C を省略する。

(A)

1. (1) $(1/4)x^4(\log|x| - 1/4)$ **絶対値は不要** (2) $(x+1)^{3/2} - x^{3/2}$
(3) $\log(e^x + e^{-x})$ (4) $(1/10)(x^2 - 2)^5$ [$x(x^2 - 2)^4$ を展開しては大変 .]
2. (1) $(2/27)(3x - 2)(3x + 1)^{1/2}$ [$t = 3x + 1$] (2) $-\sqrt{a^2 - x^2}$
[$t = a^2 - x^2$ または $x = a \sin t$] (3) $(1/3)(\log x)^3$
3. (1) $\log|\sin x|$ [$\cot x = (\sin x)'/\sin x$] (2) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$ [$\sin^{-1} x = 1 \cdot \sin^{-1} x$ と問 2(2)] (3) $(1/2)(\log x)^2$ (4) $(3/28)(4x + 3)(x - 1)^{4/3}$
4. (1) $\alpha \neq -1$ のとき $\{a(\alpha + b)\}^{-1}(ax + 1)^{\alpha + b}$, $\alpha = -1$ のとき $(1/a) \log|ax + b|$ (2) $x \sin x + \cos x$ (3) $-(1/3)x^2 \cos 3x + (2/9)x \sin 3x + (2/27) \cos 3x$
(4) $-(1/x)(1 + \log x)$
5. (1) $x \tan^{-1} x - (1/2) \log(x^2 + 1)$ [例題 4.1.1 のアイデアと例題 4.1.5(2) の結果] (2) $(x^2 - 2x + 2)e^x$ [例題 4.1.1 のアイデア]
(3) $x \log(x^2 + 1) - 2x + 2 \tan^{-1} x$ (4) $(1/2)(x^2 \tan^{-1} x - x + \tan^{-1} x)$
6. (1) $-(1/2) \log|x| - (1/6) \log|x + 2| + (2/3) \log|x - 1|$
(2) $\log|(x+1)/(x+2)| - (x+1)^{-1}$ (3) $(1/4) \log|(x-1)/(x+1)| - (1/2) \tan^{-1} x$
[$1/(t^2 - 1) = (1/2)\{1/(t-1) - 1/(t+1)\}$ を 2 度使え .]
(4) $(1/2) \log(x^2 + 1) - \log|x| - (1/2)x^{-2}$
7. (1) $\tan^{-1}(x/2) - x/\{2(x^2 + 4)\}$ [例題 4.1.1(3) の結果を使う .]
(2) $(1/2)x^2 + x + 2 \log|x - 1| - 2/(x - 1)$ (最後の項が抜けていた)
(3) $(1/5)(x - 1)(2x + 3)^{3/2}$ (4) $(x + 1) \log(x + 1) - x$
8. (1) $\log|\log x|$ (2) $-\sqrt{2/3} \tan^{-1}(\sqrt{2/3} \sqrt{(3-x)/(x-2)})$
[$t = \sqrt{(3-x)/(x-2)}$ とおくと $x = 2 + 1/(t^2 + 1)$.] (3) $\tan^{-1} e^x$
(4) $(1/3) \log|x - 1| - (1/6) \log(x^2 + x + 1) + (1/\sqrt{3}) \tan^{-1}\{(2/\sqrt{3})(x + 1/2)\}$
9. (1) $-(1/4)(x/(x^4 - 1)) + (3/16) \log|(x+1)/(x-1)| + (3/8) \tan^{-1} x$ [大
変な計算 . $1/(t^2 - 1)^2 = 1/\{(t-1)^2(t+1)^2\} = (1/4)\{1/(t+1)^2 + 1/(t+1) + 1/(t-1)^2 - 1/(t-1)\}$ を 2 度使えば少しは楽 . また、例題 4.1.1 (3) も使う .]
(2) $(1/3) \log|x + 1| - (1/6) \log|x^2 - x + 1| + (1/\sqrt{3}) \tan^{-1}\{(2/\sqrt{3})(x - 1/2)\}$
[「8(4) と同様に」 でも良いが、 $t = -x$ とおけば 8(4) に帰着 .]
(3) $2/(x+1) - \log|x+1| + (1/2) \log(x^2 + 1) + \tan^{-1} x$ (4) $(1/2)\{\tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) - \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1)\}$ [与式 = $A/(x + 1) + (Bx + C)/(x^2 + 4x + 3)$ とした
のでは $1/(x + 1)^2$ の項が出ない .]

(B)

1. (1) $(2/\sqrt{3}) \tan^{-1}\{(2/\sqrt{3})(\tan(x/2) + 1/2)\}$ [p.136 F[1].]
 (2) $-(x + 1/\tan x)$ [(1)と同じ変換でも良いが、 $t = \tan x$ の方が容易.]
 (3) $(1/2) \log\{\sin^2 x/(1 + \sin^2 x)\}$ [(1)と同じ変換でも良いが、 $t = \sin x$ の方が容易.]
2. (1) $\tan(x/2)$ [標準的な変換 $t = \tan(x/2)$ でも簡単だが、下の(3)のヒントを使うともっと簡単.] (2) $\log|\tan(x/2) + 1|$ (3) $x \tan(x/2) = x \sin x/(1 + \cos x)$ [倍角公式 (定理 A.3.4) より、 $x/(1 + \cos x) = x/(2 \cos^2(x/2)) = x(\tan(x/2))'$, $\sin x/(1 + \cos x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)/(2 \cos^2(x/2)) = \tan(x/2)$].
 なお、分母、分子に $1 + \cos x$ をかけ、分子を展開し、 $x = x \cos^2 x + x \sin^2 x$ を使って、答えの第二式を得ることも出来る.]
3. (1) $\tan x - x$ [$t = \tan(x/2)$ とおくと計算量は膨大になる. $t = \tan x$ とおくと楽. $\tan^2 x = 1/\cos^2 x - 1 = (\tan x)' - 1$ を使えばもっと楽.]
 (2) $(1/2) \log|(\cos x + \sin x)/(\cos x - \sin x)|$ (3) $\log|(\sqrt{x^2 + 1} + x - 1)/(\sqrt{x^2 + 1} + x + 1)| = \log|1 - 2/(\sqrt{x^2 + 1} + x + 1)|$
4. (1) $x(\sin^{-1} x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \sin^{-1} x - 2x$ [$t = \sin^{-1} x$. また、与式 = $1 \cdot (\sin^{-1} x)^2$ と見て部分積分し、問 A.2(2)の結果を使ってもう一度部分積分するという方法もある.] (2) $2\sqrt{x + 1} \sin^{-1} x + 4\sqrt{1 - x}$
 (3) $x/2 - \tan^{-1}(3 \tan(x/2))$
5. (1) $\tan^{-1} \sqrt{(x-1)/(2-x)} - 1/(2-x) \cdot \sqrt{(x-1)/(2-x)}$
 $[t = \sqrt{(x-1)/(2-x)}, \text{ 求めるもの} = \int t(dx/dt)dt = tx - \int x(t)dt.]$
 (2) $(1/3)\{2\sqrt{x^3 + 1} + \log|(\sqrt{x^3 + 1} - 1)/(\sqrt{x^3 + 1} + 1)|\}$
 (3) $(4/3)x^{3/4} + 8x^{1/4} + 2x^{1/4}/(1 - x^{1/2}) - 5 \log|(x^{1/4}) + 1/(x^{1/4}) - 1|$
6. (1) $\log|x + \sqrt{x^2 + 1}|$ [$\sqrt{x^2 + 1} = t - x$.] (2) $(1/2)\{x\sqrt{x^2 + 1} + \log|\sqrt{x^2 + 1} + x|\}$ [「(1)と同様に」でも良いが、(1), (2)の積分を I_1, I_2 とおくと $I_2 = \int 1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx = \dots = x\sqrt{x^2 + 1} - I_2 + I_1$]
8. [問 B.4(1)を復習せよ.]