[ ] 内はヒントや注意.

§4.3

(A)

1. (1) $\pi/2$ (2) $\pi/2$ (3) $-1/4$ [例題 2.3.5(1) をヒントに] (4) 発散 [$1/(\sin x \cos x) = 2/\sin 2x > 2/2x$]

2. (1) $4 \cdot 2^{1/4}$ (2) 2 (3) $\log(2+\sqrt{3})$ (4) 発散

3. (1) $\pi/2$ [$t = \sqrt{x/(1-x)}$ とおいて，不定積分は $\int t\frac{dx}{dt}dt = tx(t) - \int x(t)dt$] (2) $\pi/2$ (3) 1/2 (4) 1 (5) $\pi/2$

4. (1) $3\log 2 - 2$ (2) $a, b \geq 0$ としてよい．$a, b > 0$ なら $1/\{ab(a+b)\}\pi/2$ ($a = b$ のときは計算は異なるが、答えは同じ．) $a = 0$ または $b = 0$ のときは発散.

(3) $a/(a^2+b^2)$ (4) $1 - \log 2$

5. [n が小さくなるように部分積分．]

6. [n が小さくなるように部分積分．]

(B)

1. [$x > 0$ では $e^x > x$]

3. (1) [e^x を テイラー展開して,$x > 0$ では $e^x > 1/(n+2)!x^{n+2}$] (3) [$A_n/n! = 1/n! + A_{n-1}/(n-1)!$]

5. [難しすぎる．略解：結論「どんな $\varepsilon > 0$ に対しても，十分大きなすべての x において $xf(x) < \varepsilon$」を否定すると，「ある $\varepsilon_0 > 0$ に対しては, $xf(x) > \varepsilon_0$ となるいくらでも大きな x がある」．$x_1 > a$ をそのようなものの一つとする．$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ を順次，$x_n f(x_n) > \varepsilon_0$，$x_n > 2x_{n-1}$ ととる．$\int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ の各積分区間では $f(x) \geqq f(x_k) \geqq \varepsilon_0/x_k$ であり，その積分区間の長さは $x_k - x_{k-1} > (1/2)x_k$. 故に各積分は $> \varepsilon_0/2$ であり，広義積分 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ は発散する．]