[ ] 内はヒントや注意.

§6.2

(A)

1. [結論は知っているはずだが、証明は？　前半は部分和を計算せよ。後半は、部分和と極限関数の差 $\leqq \left|x^{n+1}/(1-x)\right| \leqq a^{n+1}/(1-|a|)$. 別解：定理 6.2.4 を使え。]

2. (1) $0(x \neq 0$ のとき$)$, $1(x = 0$ のとき$)$ (2) 一様収束でない。[極限関数が不連続であるから]

3. 0 [$x=0$ のときと $x \neq 0$ のときに分けて考えよ。] 一様収束でない。[$y = f_n(x)$ を微分し、増減表を書いてみれば分かるように、$x = \pm 1/\sqrt{2n}$ で最大値を取り、その値は $\to \infty (n \to \infty$ のとき$)$. 別解：一様収束していれば、$[0,1]$ で定理 6.2.2 の結論が成り立つはず。]

4. (1) 一様収束 [$1/(n^2+x^2) \leqq 1/n^2, \sum 1/n^2$ は収束 (例題 6.1.1(2))] (2) 一様収束しない [極限関数が不連続。「定理 6.2.9 の条件を満たさないから」というのは証明としては不可。]

(B)

1. (1) 0 [(A)2 より] (2) 一様収束 [$y = f_n(x)$ を微分し、増減表を書いてみれば分かるように、$x = 1/n$ で最大値 $n/2$ を取る。]

2. 0 ($[0,1]$ で考えるように修正したので) [$0 < a < 1$ のとき $na^n \to 0$ は例えば、l'Hôpital の定理] (2) 一様収束しない [最大値 $\to 1/e \neq 0$]

3. [$x \neq 0$ では $|x/(1+n^2x^2)| \leqq |x/(n^2x^2)| = (1/|x|)(1/n^2)$. (2) では、これ $\leqq 1/n^2$]

4. (1) [$|\sin x| \leqq 1$] (2) [定理 A 3.2(1) に注意すると、左辺の部分和 $= a\sin x - a^{n+1}\sin(n+1)x + a^{n+2}\sin(n+2)x$] (3) [(2) の両辺を $1-2a\cos x+a^2$ で割り、$\sin mx$ をかけ、積分せよ。定理 6.2.5 が使えることに注意。] (4) [(2) の両辺を微分せよ。定理 6.2.6 が使えることを確かめよ。]