数値計算　試験

1. 関数 $u(x)$ は，区間 $[\,0,\,L\,]$ で定義される．区間 $[\,0,\,L\,]$ を 4 等分し，$h = L/4$, $x_k = kh$ とおく．ここで，$u_k = u(x_k)$ と表し，$\boldsymbol{u}_\mathrm{N} = [\,u_0,\,u_1,\,u_2,\,u_3,\,u_4\,]^\mathrm{T}$ とする．積分

$$I = \int_0^L x \, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x$$

をベクトル $\boldsymbol{u}_\mathrm{N}$ を用いて表せ．(8 点)

2. 次の行列の射影行列を求めよ．(8 点)

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 観測値 $g_0,\,g_1,\,g_2,\,\cdots,\,g_7$ の高速フーリエ変換 $G_0,\,G_1,\,G_2,\,\cdots,\,G_7$ を計算する回路を図示せよ．(6 点)

4. 定積分

$$S = \int_0^3 \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

の値を，モンテカルロ法を使って求める手法を記せ．(6 点)

5. 質量 m の質点が $\mathrm{O} - xyz$ 空間内を運動する．ただし，質点の運動は，曲面 $R(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$（$a, b, c$ は正の定数）上に制約されている．制約式 R の変数 x, y, z に関する偏微分を R_x, R_y, R_z で表す．制約力の大きさを λ で表すと，質点の運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda R_x \\ m\ddot{y} &= \lambda R_y \\ m\ddot{z} &= \lambda R_z \end{aligned}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．(10 点)

(a) 制約安定化法を用いて，この制約付き微分方程式を標準形に変換せよ．
(b) 標準形における状態変数を示せ．
(c) 状態変数の値から状態変数の時間微分の値を計算する過程を示せ．

6. ピボット選択型 LU 分解を用いて，5 次の正方行列

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -6 & 2 \\ 1 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

の LU 分解を，4 次の正方行列 A_4 の LU 分解に変換する．行列 A_5 の一列目で，絶対値が最大の要素をピボットに選び，それにしたがって行を交換した結果を行列 A_5' で表す．行列 A_5' の LU 分解 $A_5' = L_5 U_5$ において，L_5 の対角要素の値を 1 とする．以下の問いに答えよ．(12 点)

(a) 行交換後の行列 A_5' を示せ．

(b) 下三角行列 L_5 の一列目を，列ベクトルの形で示せ．

(c) 上三角行列 U_5 の一行目を，行ベクトルの形で示せ．

(d) 4 次の正方行列 A_4 を示せ．

7. 長さ L の梁の上端と下端を固定する．梁の断面積 A，ヤング率 E，線密度 ρ は一定である．梁は重力により変形する．重力加速度を g で表す．梁の自然状態において上端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す．このとき関数 $u(x)$ は

$$\begin{aligned} &\text{min} && \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^L \{ -\rho A g\, u(x) \}\, \mathrm{d}x \\ &\text{subject to} && u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{aligned}$$

から求めることができる．区間 $[0, L]$ を 4 分割し，$h = L/4$ とする．有限要素法を用いて，上式を連立一次方程式に変換せよ．(10 点)