知能科学：最適化

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

講義の流れ

1. 線形計画法
2. 線形同次不等式
3. 非線形最適化
4. まとめ

線形計画法

- 製品 A, B を二つの材料 P, Q から製造する．
- 材料 P が 15 Kg，Q が 24 Kg ある．
- 製品 A を 1 Kg 製造するために，P が 3 Kg，Q が 2 Kg 必要である．
- 製品 B を 1 Kg 製造するために，P が 1 Kg，Q が 3 Kg 必要である．
- 製品 A の価格は 1 Kg で 1 万円，製品 B の価格は 1 Kg で 1 万円である．

$$\Downarrow$$

売上を最大にするためには，製品 A, B をどれだけ製造すればよいか．

線形計画法

製品 A を x_1 Kg，製品 B を x_2 Kg 製造する．

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

材料 P が 15 Kg あるので

$$3x_1 + 1x_2 \leq 15$$

材料 Q が 24 Kg あるので

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

売上（単位：万円）

$$y = 1x_1 + 1x_2$$

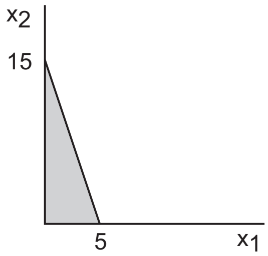
線形計画法

線形計画問題 (linear programming; LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & y = x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

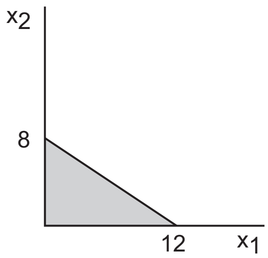
目的関数，制約式がすべて線形

線形計画法



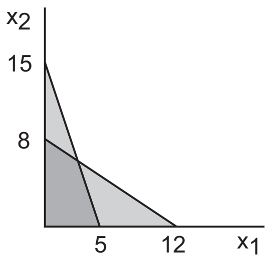
$$3x_1 + x_2 \leq 15$$

線形計画法



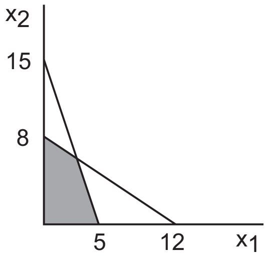
$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

線形計画法



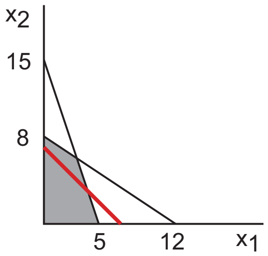
$$3x_1 + x_2 \leq 15$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

線形計画法



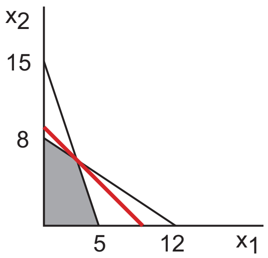
実行可能解 (feasible solution)

線形計画法



$x_1 + x_2 = 7$

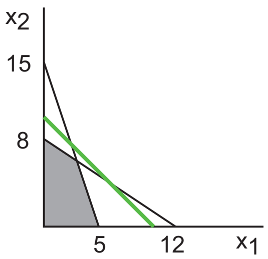
線形計画法



$x_1 + x_2 = 9$

最大値 ($x_1 = 3, x_2 = 6$)

線形計画法



$x_1 + x_2 = 10$

実行可能ではない

MATLAB

線形計画問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ &\text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

```
x = linprog(f, A, b)
```

Optimization Toolbox が必要
最小化 (minimize) であることに注意
maximize $f \implies$ minimize $-f$

MATLAB

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y = -x_1 - x_2 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB

```
f = [ -1; -1 ];
A = [ 3,  1;
      2,  3;
     -1,  0;
      0, -1 ];
b = [ 15; 24; 0; 0 ];
x = linprog(f, A, b);
x
```


MATLAB

実行結果

```
>> linprog_2D

Optimal solution found.

x =

    3.0000
    6.0000
```

実行可能性

条件式を満たす変数の値が存在しないとき

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & y = x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 3x_1 + x_2 \le 15 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\
 & -x_1 - x_2 \le -10 \\
 & x_1 \ge 0 \\
 & x_2 \ge 0
\end{array}
$$

実行可能性

```
f = [ -1; -1 ];
A = [ 3,  1;
      2,  3;
     -1, -1;
     -1,  0;
      0, -1 ];
b = [ 15; 24; -10; 0; 0 ];
x = linprog(f, A, b);
x
```


実行可能性

実行結果

```
>> example_non_feasible

No feasible solution found.
Linprog stopped because no point satisfies the constraint

x =

     []
```

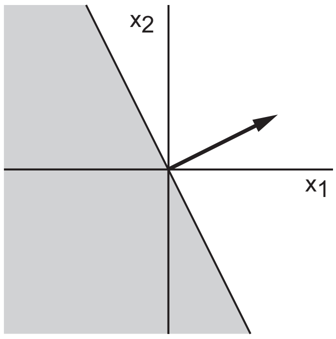

線形同次不等式

線形同次不等式

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\le 0 \\
-2x_1 + 2x_2 &\le 0 \\
2x_2 &\le 0
\end{aligned}
$$

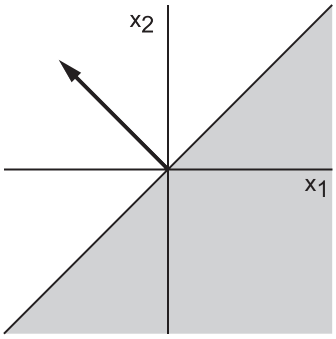
を満たす $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$（ただし $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$）が存在するか.
（この解を同次解とよぶ）

線形同次不等式



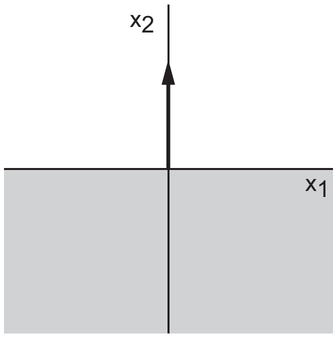
$2x_1 + x_2 \le 0$

線形同次不等式



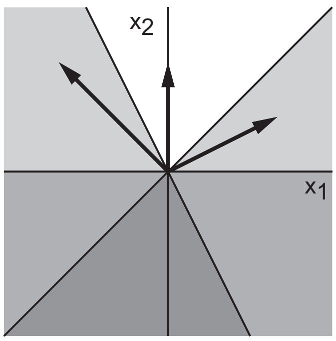
$-2x_1 + 2x_2 \le 0$

線形同次不等式



$2x_2 \le 0$

線形同次不等式



$\mathbf{0}$ 以外の解（同次解）が存在する.

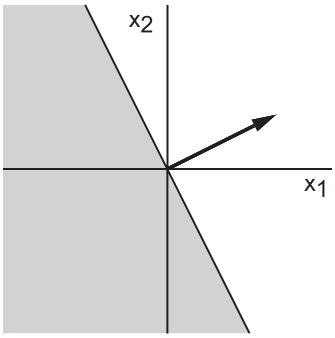
線形同次不等式

線形同次不等式

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\le 0 \\
-2x_1 + 2x_2 &\le 0 \\
-2x_2 &\le 0
\end{aligned}
$$

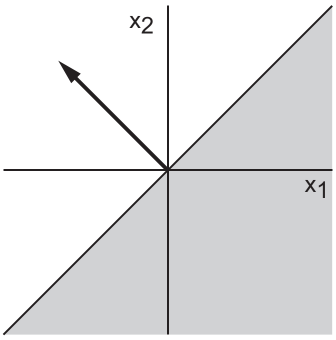
を満たす $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]^{\mathrm{T}}$（ただし $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$）が存在するか．

線形同次不等式



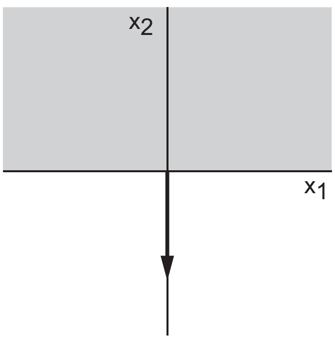
$2x_1 + x_2 \le 0$

線形同次不等式



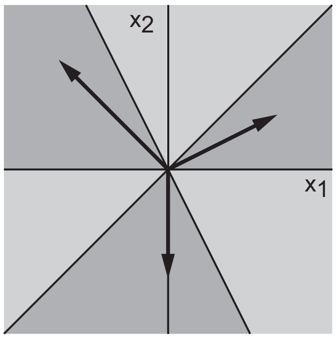
$-2x_1 + 2x_2 \le 0$

線形同次不等式



$-2x_2 \le 0$

線形同次不等式



$\mathbf{0}$ 以外の解（同次解）は存在しない．

線形同次不等式

線形同次不等式

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\le 0 \\
-2x_1 + 2x_2 &\le 0 \\
-2x_2 &\le 0
\end{aligned}
$$

の解は

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

に限られる．

判定法

線形同次不等式

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \le 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

を満たす $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するか否かを判定

Step 1
連立一次方程式

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

を満たす $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するか否かを調べる．
存在するときは，線形同次不等式を満たす $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ が存在すると判定し，終了．
存在しないときは Step 2 へ．

判定法

Step 2
線形計画問題

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} && y = \sum \lambda_i \\
&\text{subject to} && \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} + \lambda_i \le 0 \quad (i = 1, 2, \cdots) \\
& && \lambda_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

を解く．
y の最大値が正ならば線形同次不等式を満たす $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ が存在すると判定し，0 ならば存在しないと判定する．

判定法

Step 2 において，同次解が存在する

$$\Downarrow \quad \Uparrow$$

$\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} > 0$ となる条件式がある．このとき $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

$$\Downarrow \quad \Uparrow$$

$$\lambda_k > 0$$

$$\Downarrow \quad \Uparrow$$

$$y > 0$$

判定法

Step 2 において，同次解が存在しない

$$\Uparrow$$

$$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0,\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0,\ \cdots$$

$$\Uparrow$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \cdots$$

$$\Uparrow$$

$$y = 0$$

判定法

Step 2 において

$$\begin{aligned} y > 0 &\Longrightarrow \exists k,\ \lambda_k > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} < 0 \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ &\Longrightarrow \exists \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

Step 2 において $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)$ の解は $\boldsymbol{0}$ のみ

$$\begin{aligned} &\exists \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots) \\ \Longrightarrow\ &\exists k,\ \boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} < 0 \Longrightarrow \exists \lambda_k > 0 \Longrightarrow y > 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

Step 2 において

$$y > 0 \ \equiv \ \exists \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

判定法

Step 2 における不等式は同次式
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ が解 $\Longrightarrow$ $(\alpha \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{\lambda})$ が解（$\alpha > 0$）

$$\Downarrow$$

解がある場合，y は ∞ に発散する．

$$\Downarrow$$

発散を防ぐために，条件式

$$\sum \lambda_i \leq 1$$

を追加（追加しても解が存在するか否かは変わらない）

判定法

線形同次不等式

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &\leq 0 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

を満たす $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するか．

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & y = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \text{subject to} & \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + \lambda_1 & \leq & 0 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 + \lambda_2 & \leq & 0 \\ \lambda_1 & \geq & 0 \\ \lambda_2 & \geq & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \leq & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

判定法

最小化問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y = -\lambda_1 - \lambda_2 \\ \text{subject to} & \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + \lambda_1 & \leq & 0 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 + \lambda_2 & \leq & 0 \\ -\lambda_1 & \leq & 0 \\ -\lambda_2 & \leq & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \leq & 1 \end{array} \end{array}$$

変数ベクトル

$$\boldsymbol{q} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right]$$

判定法

$$\Downarrow$$

$$\text{minimize} \quad y = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \boldsymbol{q}$$

subject to

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -5 & 1 & \\ -2 & -1 & 5 & & 1 \\ \hline & & & -1 & \\ & & & & -1 \\ \hline & & & 1 & 1 \end{array} \right] \boldsymbol{q} \leq \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \right]$$

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
function stat=non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
    N = null(A);  sz = size(N);
    if (sz(2) > 0)
        stat = 1;
        return;
    end

    sz = size(A);
    m = sz(1); % number of inequalities
    n = sz(2); % dimension
    I = eye(m);
```

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
    C = [ A, I;
        zeros(m,n), -I;
        zeros(1,n), ones(1,m) ];
    b = [ zeros(m,1); zeros(m,1); 1 ];
    f = [ zeros(n,1); -ones(m,1) ];
    x = linprog(f, C, b);
    if (f'*x < 0)
        stat = 1;
    else
        stat = 0;
    end
end
```


non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
>> A
A =

     2     1
    -2     2
     0     2

>> non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
Optimal solution found.

ans =

     1
```


non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
>> A
A =

     2     1
    -2     2
     0    -2

>> non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
Optimal solution found.

ans =

     0
```


non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
>> A
A =

     2     1    -5
    -2    -1     5

>> non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)

ans =

     1
```


双対問題

線形同次不等式

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみである．

|||

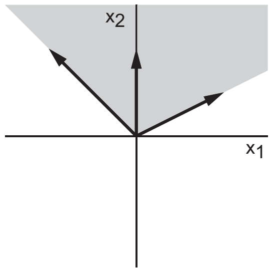
ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \sum_i c_i \boldsymbol{a}_i \quad (c_1, c_2, \cdots \geq 0)$$

が全空間をカバーする．

双対問題

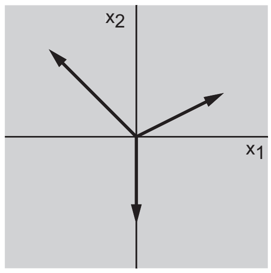
$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$\boldsymbol{x}$ は全空間をカバーしない．

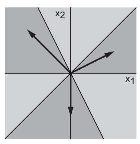
双対問題

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$



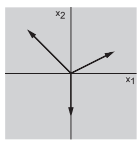
$\boldsymbol{x}$ は全空間をカバーする．

双対問題

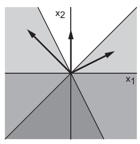


解は $\boldsymbol{0}$ のみ

|||

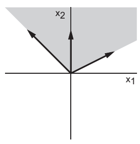


全空間をカバー



$\boldsymbol{0}$ 以外の解

|||



カバーしない

一変数関数の最小化

区間 $[-\pi, \pi]$ で関数 $\cos x$ の最小値を求める．

```
x = fminbnd(@cos, -pi, pi);
x

x =
   -3.1415
```


一変数関数の最小化

区間 $[-10, 10]$ で関数 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x$ の最小値を求める．

```
f = @(x) x.^4 - 3*x.^3 - 4*x;
x = fminbnd(f, -10, 10);
x

x =
    2.4207

x=-2:0.01:4;
plot(x,f(x));
```


非線形最適化

ローゼンブロック関数 (Rosenbrock function)

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

の最小値を数値的に求める．

MATLAB

ローゼンブロック関数を記述
ファイル Rosenbrock.m に保存

```
function f = Rosenbrock( x )
    x1 = x(1); x2 = x(2);
    f = 100*(x2 - x1^2)^2 + (1 - x1)^2;
end
```


MATLAB

ファイル Rosenbrock_minimize.m

```
xinit = [ -1.2; 1.0 ];  % initial value
[xmin, fmin] = fminsearch(@Rosenbrock, xinit);
xmin
fmin
```

変数の初期値：$[x_1, x_2]^T = [-1.2, 1.0]^T$

MATLAB

実行結果

```
>> Rosenbrock_minimize

xmin =
    1.0000
    1.0000

fmin =
   8.1777e-10
```


MATLAB

計算過程を表示する

```
xinit = [ -1.2; 1.0 ];  % initial value
options = optimset('Display','iter');
[xmin, fmin] = fminsearch(@Rosenbrock, xinit, options);
xmin
fmin
```


MATLAB

Iteration	Func-count	min f(x)	Procedure
0	1	24.2	
1	3	20.05	initial simp
2	5	5.1618	expand
3	7	4.4978	reflect
4	9	4.4978	contract out
5	11	4.38136	contract ins
6	13	4.24527	contract ins
7	15	4.21762	reflect
8	17	4.21129	contract ins
9	19	4.13556	expand
10	21	4.13556	contract ins
11	23	4.01273	expand
12	25	3.93738	expand
13	27	3.60261	expand
14	28	3.60261	reflect

MATLAB

```
    83          155       1.12293e-09         contract ins
    84          157       1.10755e-09         contract out
    85          159       8.17766e-10         contract ins

最適化が終了しました:
現在の x は 1.000000e-04 の OPTIONS.TolX を使って終了基準
を満たし、F(x) は 1.000000e-04 の OPTIONS.TolFun を使って
収束基準を満たします。

xmin =
    1.0000
    1.0000

fmin =
   8.1777e-10
```


制約付き非線形最適化

体積が一定で表面積が最小の直方体を求める．
体積：5^3
直方体の三辺の長さ：x, y, z

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & S(x,y,z) = 2(xy + yz + zx) \\ \text{subject to} \quad & xyz - 5^3 = 0 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{aligned}$$

MATLAB

目的関数 $S(x,y,z)$

```
function S = area ( q )
% 面積
    x = q(1); y = q(2); z = q(3);
    S = 2*(x*y+y*z+z*x);
end
```

ファイル area.m に保存

MATLAB

不等式制約 $-x \leq 0,\ -y \leq 0,\ -z \leq 0$
等式制約 $xyz - 5^3 = 0$

```
function [ ineq, cond ] = nonlcon( q )
% 制約条件
    x = q(1); y = q(2); z = q(3);
    ineq = [-x; -y; -z];
    cond = [ x*y*z - 5^3 ];
end
```

ファイル nonlcon.m に保存

MATLAB

ファイル area_minimize_under_nonlcon.m

```
qinit = [1;1;1];
[qmin,smin] = fmincon(@area, qinit, ...
            [], [], [], [], [], [], @nonlcon);
qmin
smin
```

Optimization Toolbox が必要

MATLAB

実行結果

```
>> rectangular_min_area_with_constant_volume
制約を満たす局所的最小値が見つかりました。
目的関数が最適性の許容誤差値の範囲内の実行可能な方向
において非減少であり、制約が制約の許容誤差値の範囲内で
満たされているため、最適化は完了しました。

<停止条件の詳細>

qmin =
    5.0000
    5.0000
    5.0000
smin =
  150.0000
```


まとめ

線形計画問題
線形目的関数と線形制約（等式，不等式）
linprog

線形同次不等式
非零の解があるか否かを判定
線形計画問題に帰着
双対問題

非線形最適化
fminsearch
制約付き最適化 fmincon

レポート

下記の問題に答え，pdf ファイルで manaba+R に提出する．

ファイル名：学籍番号（11 桁半角数字）名前（空白なし）.pdf
期限 12 月 25 日（月曜）午前 1 時

(1) 三角形の周囲長が 3 cm のとき，面積が最大になる三角形の各辺の長さと面積の値を，MATLAB を用いて求めよ．プログラムと実行結果を示すこと．

(2) 四角形の周囲長が 4 cm のとき，面積が最大になる四角形の各辺の長さと面積の値を，MATLAB を用いて求めよ．プログラムと実行結果を示すこと．

レポート

(1)　一辺の長さが a, b, c で与えられる三角形の面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

で与えられる．

`fmincon` は関数の最小値を求める．最大値を求めるときは，目的関数 f の逆 $-f$ の最小値を計算すれば良い．

$$\text{maximize} \quad f$$

$$\Downarrow$$

$$\text{minimize} \quad g = -f$$

(2)　四角形の辺の長さ a, b, c, d と，対角線 AC の長さ x を変数とする．