

数学解析 III 試験

1. 長さ L の梁の左端と右端を固定し, 中心点に一定の力 F を右端に向かって加える. 梁の断面積 A , ヤング率 E は一定である. 梁の自然状態において左端から距離 x の点における点の変位を $q(x)$ で表す. このとき, $q(x)$ は

$$\int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 dx - F q \left(\frac{L}{2} \right) \rightarrow \text{最小}$$

$$\text{ただし } q(0) = 0, \\ q(L) = 0$$

を満たす. 区間 $[0, L]$ を 4 分割し, 有限要素法を用いて, 上式を連立方程式に変換せよ.

注意 制約付き最小化問題

$$f(\mathbf{y}) \rightarrow \text{最小}$$

$$\text{ただし } g_0(\mathbf{y}) = 0, \\ g_1(\mathbf{y}) = 0$$

は, ラグランジュの未定乗数 λ_0, λ_1 を導入すると

$$J(\mathbf{y}, \lambda_0, \lambda_1) = f(\mathbf{y}) - \lambda_0 g_0(\mathbf{y}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{y}) \rightarrow \text{最小}$$

と制約無し最小化問題に変換できる.

2. 4 次の正方行列 A に以下の操作を行った.

- 2 行目から 1 行目の 2 倍を引く
- 3 行目から 1 行目の (-3) 倍を引く
- 4 行目から 1 行目の (-1) 倍を引く
- 3 行目から 2 行目の (-2) 倍を引く
- 4 行目から 2 行目の 2 倍を引く
- 4 行目から 3 行目の 1 倍を引く

その結果として上三角行列

$$U = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ & 1 & 3 & 1 \\ & & 2 & -1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

を得た. 行列 A の LU 分解を求めよ.

3. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

で定義される．ここで i は虚数単位である．二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ は， $f(x-\alpha) = g(x)$ を満たすとする．ここで α は定数である．関数 $f(x)$ ， $g(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ ， $G(\omega)$ で表すと，

$$\frac{G(\omega)}{F(\omega)} = e^{-i\omega\alpha}$$

が成り立つことを示せ．