

数学解析 III 試験

1. 長さ L の梁の上端と下端を固定する. 梁の断面積 A , ヤング率 E , 線密度 ρ は一定である. 梁は重力により変形する. 梁の自然状態において上端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す. このとき $u(x)$ は

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_0^L \frac{1}{2}EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L \rho Ag u(x) dx \\ \text{s.t.} \quad & u(0) = 0, \\ & u(L) = 0 \end{aligned}$$

を満たす. 区間 $[0, L]$ を 6 分割し, 有限要素法を用いて, 上式を連立方程式に変換せよ.

2. 以下に示す微分方程式を, 標準形式に変換せよ.

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta &= -K_P(\theta - \theta^d) - K_D\dot{\theta} - K_I \int_0^t (\theta(\tau) - \theta^d) d\tau \\ (m, l, g, K_P, K_D, K_I, \theta^d \text{ は定数}) \end{aligned}$$

3. 複素数 $w = e^{-i2\pi/8}$ に対して, 行列

$$F_8 = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & \cdots & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & \cdots & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{14} \\ \cdots & & & & \\ w^0 & w^7 & w^{14} & \cdots & w^{49} \end{bmatrix}$$

を定義する. このとき

$$F_8^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & \cdots & w^0 \\ w^0 & w^{-1} & w^{-2} & \cdots & w^{-7} \\ w^0 & w^{-2} & w^{-4} & \cdots & w^{-14} \\ \cdots & & & & \\ w^0 & w^{-7} & w^{-14} & \cdots & w^{-49} \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

4. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して, 射影行列

$$A(A^T A)^{-1} A^T$$

を求めよ.