数学解析 III / システム数学 III　　小テスト　　7,8 時限

1．中心力により平面内を運動する質点 m の位置を極座標 r, θ で表す．中心力の大きさが $-mG/r^2$ (G は定数) で表されるとき，質点の運動方程式は

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -\frac{G}{r^2}, \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0\end{aligned}$$

と表される．この運動方程式を微分方程式の標準型に変換せよ．

2．振り子の支点が球面関節である空間振り子の運動を定式化する．振り子の長さを l で表すと，先端の質量 m は支点 C を中心とする半径 l の球面上にある．鉛直上向きに z 軸を取り，振り子の最下点を原点とする．このとき，質点の位置 (x, y, z) は制約式

$$R(x, y, z) \triangleq \left\{ x^2 + y^2 + (z-l)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - l = 0$$

を満たさなくてはならない．質点の速度ベクトルを $[v_x,\, v_y,\, v_z]^{\mathrm{T}}$ で表す．このとき質点の運動方程式は

$$\begin{aligned}m\dot{v}_x &= \lambda \frac{x}{\{x^2 + y^2 + (z-l)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \\ m\dot{v}_y &= \lambda \frac{y}{\{x^2 + y^2 + (z-l)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \\ m\dot{v}_z &= \lambda \frac{z-l}{\{x^2 + y^2 + (z-l)^2\}^{\frac{1}{2}}} - mg\end{aligned}$$

と表される．制約安定化法を用いて，この運動方程式を微分方程式の標準型に変換せよ．

数学解析 III / システム数学 III　小テスト　9,10 時限

1．質量 m の質点が三要素モデルで接続されている．三要素モデルとは線形バネ要素 k_1 と線形ダンパ要素 b_1 を並列につないだフォークトモデルに，線形ダンパ要素 b_2 を直列につないだ力学モデルである．質点の変位を x，質点に作用する力を f，フォークトモデルの変位を x_{voigt}，ダンパ要素 b_2 の変位を x_{damper} とすると，質点の運動方程式は

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x} = f, \\
& x = x_{\mathrm{voigt}} + x_{\mathrm{damper}}, \\
& f = -k_1 x_{\mathrm{voigt}} - b_1 \dot{x}_{\mathrm{voigt}}, \\
& f = -b_2 \dot{x}_{\mathrm{damper}}
\end{aligned}
$$

と表される．この運動方程式を微分方程式の標準型に変換せよ．(ヒント：変数 x_{damper} と f を消去する)

2．振り子の支点が球面関節である空間振り子の運動を定式化する．振り子の長さを l で表すと，先端の質量 m は支点 C を中心とする半径 l の球面上にある．鉛直上向きに z 軸を取り，振り子の最下点を原点とする．このとき，質点の位置 (x, y, z) は制約式

$$
R(x, y, z) \triangleq \left\{ x^2 + y^2 + (z-l)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - l = 0
$$

を満たさなくてはならない．質点の速度ベクトルを $[v_x,\, v_y,\, v_z]^{\mathrm{T}}$ で表す．このとき質点の運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m\dot{v}_x &= \lambda \frac{x}{\{x^2 + y^2 + (z-l)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \\
m\dot{v}_y &= \lambda \frac{y}{\{x^2 + y^2 + (z-l)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \\
m\dot{v}_z &= \lambda \frac{z-l}{\{x^2 + y^2 + (z-l)^2\}^{\frac{1}{2}}} - mg
\end{aligned}
$$

と表される．制約安定化法を用いて，この運動方程式を微分方程式の標準型に変換せよ．