

基本問題

- 1 空気中を落下するスカイダイバーの下向き加速度は増加するか、減少するか、あるいは一定か。
- 2 質量 0.1 g の雨粒が 1.2 (m/s) で落下している。雨粒に作用する空気抵抗力の大きさは、落下速度に比例すると仮定する。すなわち、空気抵抗力の大きさ = 比例定数 \times 落下速度。(1) 雨粒に作用する空気抵抗力を求めよ。(2) 空気抵抗力の比例定数を求めよ。(3) 質量 0.2 g の雨粒の落下速度を求めよ。
- 3 質量 100 g のロケット花火を打ち上げる。上向き推力は時刻 0 s で 2 N で、以降一定の割合で減り続け、 10 s 後には 0 N となる。 10 s 以降は 0 N である。ロケット花火には、速度と逆方向に空気抵抗力が作用する。空気抵抗力の大きさは速度の大きさに比例し、比例定数は 0.8 N/(m/s) である。ロケットの質量は変化しないと仮定し、ロケット花火の初速度は 0 m/s とする。(1) 時刻 t ($0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$) におけるロケット花火の上向き速度を求めよ。(2) 時刻 10 s におけるロケット花火の上向き速度を求めよ。なお、 $e^{-80} \approx 0$ とみなしてよい。

ヒント

$$\int_0^t e^{a\tau} d\tau = \frac{e^{at} - 1}{a}$$
$$\int_0^t e^{a\tau} \tau d\tau = \frac{ate^{at} - e^{at} + 1}{a^2}$$

- 4 1のように、バスケットボールのプレーヤーが、ゴール前 5 m の場所から、角度 $\theta_0 = 50^\circ$ でボールを投げたところ、ボールがゴールに入った。ゴールの高さは、ボールを離れた高さから 0.75 m 上である。ボールの初期速さ v_0 を求めよ。空気抵抗は無視する。重力加速度 $g \approx 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$ 、 $\cos 50^\circ \approx 0.64$ 、 $\sin 50^\circ \approx 0.87$ を使ってよい。
- 5 水平面と角度 α を成す、摩擦のある斜面上を、質量 m の物体が滑り落ちる。物体の初速度 v_0 、物体と斜面との動摩擦係数を μ とする。(1) 物体が静止するまでの時間を求めよ。(2) 物体が静止するまでに進む距離を求めよ。
- 6 物体が空気抵抗の作用する大気中を落下するとき、物体の加速度は増加するか、減少するか、あるいは一定に保たれるか。
- 7 図 2 に示すように、質量 m の物体が空気中を落下する。物体には、重力と抵抗力が作用する。抵抗力は、速度の大きさの二乗に比例し、速度と逆向きに作用すると仮定する。この比例定数を $k(> 0)$ で表す。鉛直下向きに z 軸を設定し、物体の速度を v で表す。重力加速度を g で表す。このとき、物体の運動方程式は、

$$m \frac{dv}{dt} = \begin{cases} mg - kv^2 & (v \geq 0 \text{ のとき}) \\ mg + kv^2 & (v \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表される．(1) 上式が成り立つことを説明せよ．(2) 時刻 0 で $v = 0$ とする．このとき，

$$v(t) = a \left(\frac{1 - e^{-bt}}{1 + e^{-bt}} \right) + c$$

が，運動方程式の解であることを示せ．さらに，定数 a, b, c を，質量 m ，重力加速度 g ，抵抗力の比例定数 k を用いて表せ．(ヒント： $v(0) = 0$ なので， $v(t) > 0$ である)

- 8 質量 m のロケットが上昇している．エンジンの不調のため，ガスの噴射が振動的になっており，時刻 t における上向き推力は $2mg - mg \cos \omega t$ で与えられる．重力環境下における，このロケットの速度 $v(t)$ を求めよ．初期速度 $v(0)$ は 0 とする．空気抵抗力の大きさは，ロケットの速さに比例すると仮定し，その比例定数を b で表す．

ヒント

$$\int_0^t e^{a\tau} \cos \omega\tau \, d\tau = \frac{1}{a^2 + \omega^2} (ae^{at} \cos \omega t + \omega e^{at} \sin \omega t - a)$$

$$\int_0^t e^{a\tau} \sin \omega\tau \, d\tau = \frac{1}{a^2 + \omega^2} (ae^{at} \sin \omega t - \omega e^{at} \cos \omega t + \omega)$$

発展問題

- 図 3 に示すように，摩擦のない水平面上に静止している質量 m_1 の物体に，斜角 θ の摩擦のない斜面上に静止させている質量 m_2 の物体を糸で連結した．糸の質量や糸を通した金具の小孔の摩擦は無視できるとして，(1) 2 つの物体それぞれについて，運動方程式を導け．(2) 糸の張力と m_2 の加速度を求めよ．(3) $\theta = \pi/2$ のとき，(2) の答えはどうなるかを示せ．
- 図 4 に示すように，質量 m の質点を空中に投げる．初速度の大きさを v_0 ，初速度が水平面と成す角を θ_0 とする．質点の初期位置を原点とし，鉛直上向きを z 軸，初速度の水平面射影の方向を x 軸とする．質点には重力と空気からの抵抗力が作用する．空気からの抵抗力は，速度の大きさに比例する大きさで，速度の逆方向に作用するとする．抵抗力の大きさと速度の大きさの比例定数を $b (> 0)$ で表す．また，重力加速度を g とする．(1) 質点の x 軸方向の速度を v_x ， z 軸方向の速度を v_z で表す．質点の運動方程式を求めよ．(2) 運動方程式を解き，質点の運動を求めよ．
- 図 5-(a) に示す質量 m の物体とテーブルとの摩擦係数を推定する．(1) 図 5-(b) に示すように，テーブルを徐々に傾け，物体が滑り始めたときの角度 α を計測する．最大静止摩擦係数 μ_s を，角度 α を用いて表せ．(2) 図 5-(c) に示すように，テーブルを角度 $\beta (> \alpha)$ 傾けておく．斜面上の点 A に物体を静かに置くと，物体は滑る．点 A から距離 L 離れた点を B とする．点 A から点 B まで物体が滑るのに要した時間 T を計測する．動摩擦係数 μ を，計測値 β, L, T を用いて表せ．ただし，重力加速度を g とする．

- 4 図6に示すようなローラーコースターがある．コースターの重量は100 kgである．コースターはスタート点からレールに沿って滑り落ちる．スタート点での速さは0 m/sである．A点でコースターは水平に動く．B点でコースターは水平面から下向き 60° の角度で滑る．コースターを質点とみなし，コースターとレールとの摩擦を無視する．(1) スタート点でローラーコースターが持つ重力ポテンシャルエネルギーを求めよ．ただし，重力ポテンシャルエネルギーの基準を地面とする．(2) A点におけるコースターの速さを求めよ．(3) B点におけるコースターの速度の水平成分(x 成分)と鉛直成分(z 成分)を求めよ．
- 5 図7に示すように，質量1.5 kgの球が垂直な棒に沿って動く．バネの自然長は80 cmであり，バネ定数 k は8 kgf/mである．また，距離 d は120 cmである．距離 x が90 cmの位置から，球が運動を始める．距離 x が0 cmのときの，球の速度を求めよ．
- 6 図8に示すように，体重60 kgの人が，4 mのロープを用いてジャンプする．始めの角度は 30° であり，そのときの速度は0 m/sである．ロープを離すときの角度を α とする．水平方向に，最も遠くにジャンプできる角度 α を求めよ．また，そのときの水平方向距離を，点 O を原点にして求めよ．
- 7 物体が運動している場合，速度と反対方向に抵抗を受ける．それが空気中ならば空気抵抗を受ける．ここで，半径1 cmの小石を鉛直下方向に自由落下させた場合の，空気抵抗によって生じる物体の終末速度を求めよ．小石の密度は $2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ であり，空気抵抗による力 $R(v)$ は

$$R(v) = cr^2v^2$$

と仮定する．ここで， r は物体の半径，抵抗係数 c は 0.87 kg/m^3 である．重力加速度は 10 m/s^2 とする．(ヒント:半径 r の球の体積は $(4/3)\pi r^3$ ．)

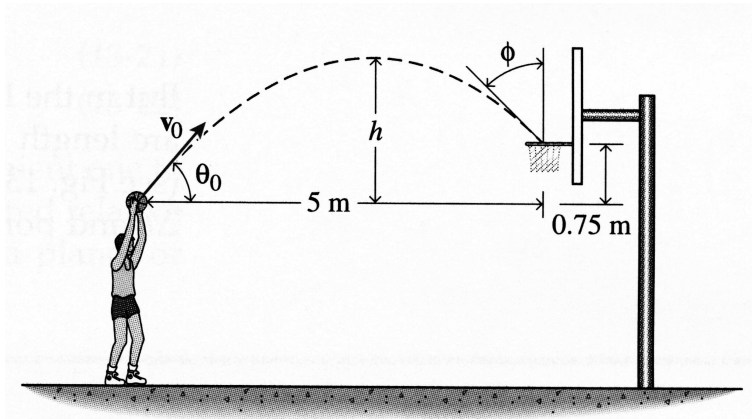


図 1: バスケットボールのシュート

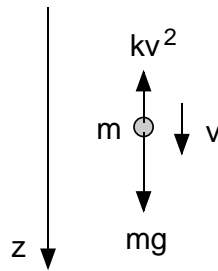


図 2: 抵抗力を受ける物体の落下

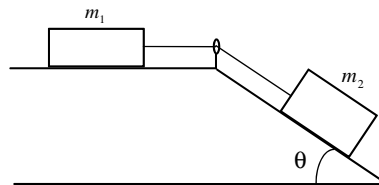


図 3: 糸で連結された物体の運動

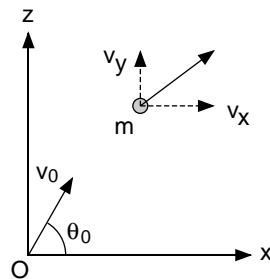


図 4: 空気抵抗を受ける質点の重力落下

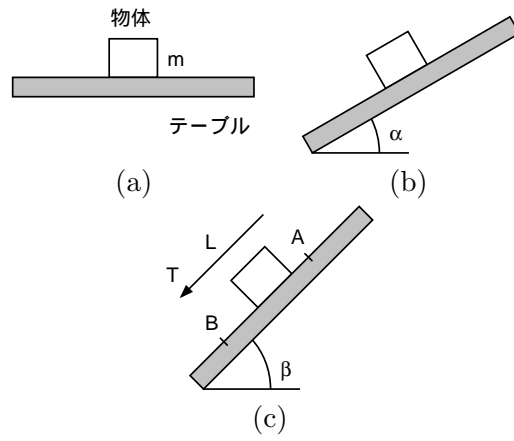


図 5: 摩擦係数の推定

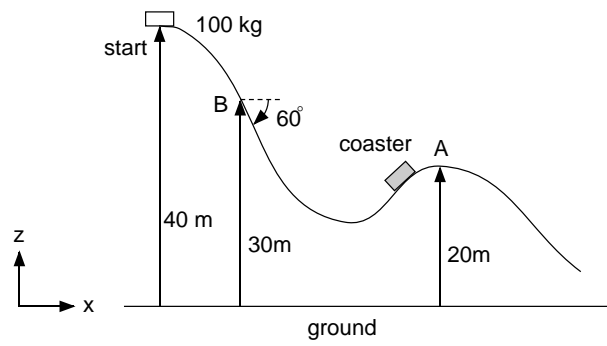


図 6: ローラーコースター

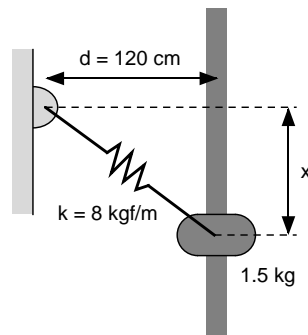


図 7: 柱に沿う球の運動

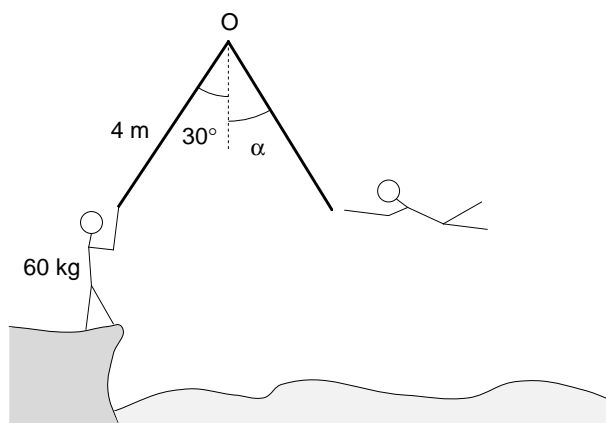


図 8: ロープを用いたジャンプ