基本問題

1　質量 $1kg$，粘性係数 $2N/(m/s)$，弾性係数 $9N/m$ のバネ-ダンパー-質点系の運動方程式は,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 9x = 0$$

である．変位 $x(t)$ のグラフを，図 1-(a)～(e) から選べ．また，その理由を簡単に説明せよ．

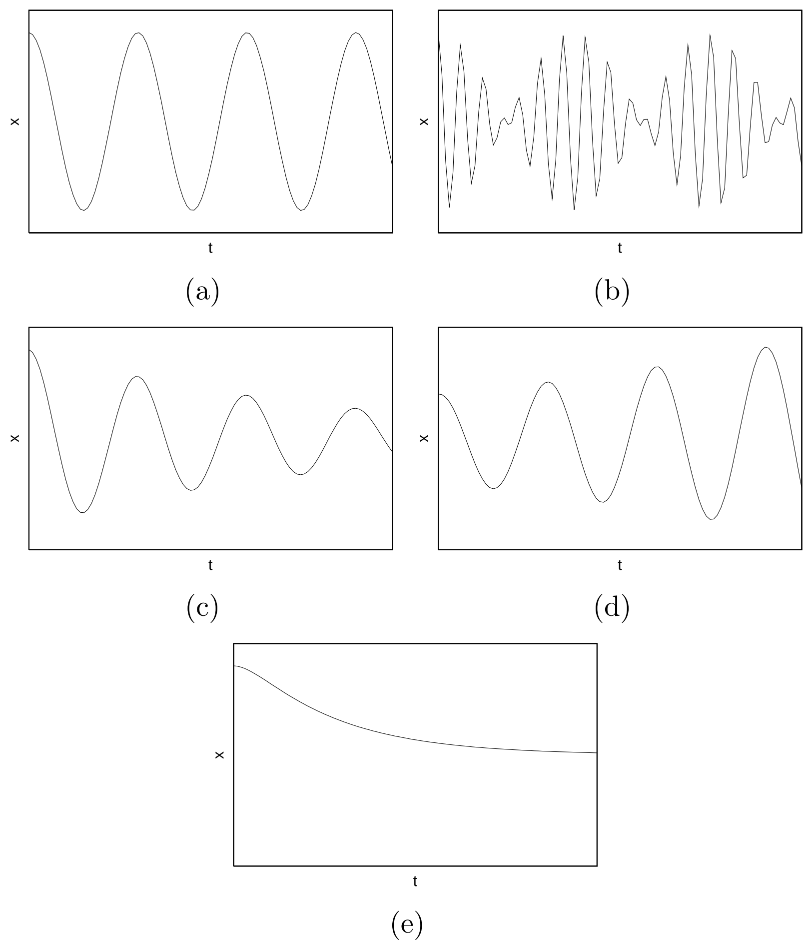

図 1: 振動

2　質量 $1kg$，粘性係数 $20N/(m/s)$，弾性係数 $9N/m$ のバネ-ダンパー-質点系において，変位 $x(t)$ のグラフを図 1-(a)～(e) から選べ．

3　質量 $4kg$，粘性係数 $6N/(m/s)$，弾性係数 $9N/m$ のバネ-ダンパー-質点系において，変位 $x(t)$ のグラフを図 1-(a)～(e) から選べ．

4 質量 $20kg$，粘性係数 $b\ N/(m/s)$ 弾性係数 $180N/m$ のバネ-ダンパー-質点系において，振動をなるべく早く減衰させたい．粘性係数 b の値を，いくらにすればよいか．

5 周期が 2 時間の単振り子を作りたい．おもりの質量と糸の長さをどのようにすればよいか．ただし，重力加速度 g は $9.8m/s^2$ とする．また，おもりの振り角は小さいとみなしてよい．

6 図 2-(a) のように，質量 $2kg$ の物体を，バネ係数 $0.5N/m$ のバネにつるす．図 2-(b) に示すように，つりあいの位置で物体を静止させる．次に，図 2-(c) に示すように，つりあいの位置から下方に物体を $0.2m$ 引っ張り，時刻 $0s$ で手を離す．(1) つりあいの位置からのバネの下向き変位を $y(m)$ とするとき，物体の運動方程式を記せ．ただし，空気による抵抗力は無視する．(2) 時刻 t におけるバネの変位 $y(t)$ を求めよ．(3) 一分間に振動する回数を求めよ．

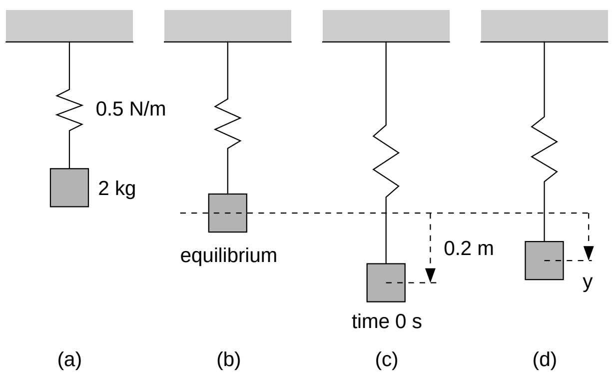

図 2: バネでつるされた物体の振動

7 図 2に示す物体の運動において，物体の表面が少しずつ剥離し，物体の質量が徐々に小さくなる．振動の周期は，長くなるか，短くなるか，それとも変わらないか．

8 図 2に示す物体の運動で，空気による抵抗力が物体に作用し，抵抗力の大きさは物体の速さに比例すると仮定する．(1) 物体の運動方程式を記せ．(2) 抵抗力の大きさと物体の速さとの比例定数によって，物体の運動がどのように変化するかを考察せよ．

9 図 3に示す系は，質量 $2\,kg$，バネ係数 $8\,N/m$，ダンパー係数 $4\,N/(m/s)$ である．この系における振動の周波数を，次のように求めた．

<u>解答</u>

角振動数を ω で表すと，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8\,N/m}{2\,kg}} = \sqrt{4\ \ 1/s^2} = 2\,rad/s$$

振動の周波数 f と角振動数 ω との間には，$\omega = 2\pi f$ が成り立つので，

$$f = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{2\ rad/s}{2\pi\ rad} \approx 0.32\ \ 1/s$$

したがって，振動の周波数は，約 $0.32\ Hz$ である．

上記の解答は正しいか．誤っているならば訂正せよ．

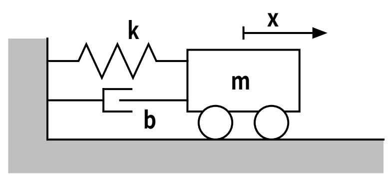

図 3: バネ，ダンパー，質点から成る系

10　次の微分方程式を解き，解の軌道を描け．

(1)
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ \dot{y} = -5y \end{cases}$$
$$x(0) = 2, \quad y(0) = 1$$

(2)
$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$
$$x(0) = 2, \quad y(0) = 0$$

(3)
$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{a}{b}y \\ \dot{y} = \frac{b}{a}x \end{cases}$$
$$x(0) = a, \quad y(0) = 0$$

(4)
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x \end{cases}$$
$$x(0) = 5, \quad y(0) = 0$$

(5)
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$$
$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

発展問題

1　図 4に示す単振り子において，質点の運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T\sin\theta$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - T\cos\theta$$

で与えられる．ここで，T は糸の張力であり，$x = l\sin\theta$，$y = l\cos\theta$ が成り立つ．角度 θ の大きさが必ずしも微小でないとき，単振り子の運動方程式は，

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0$$

で表されることを示せ.

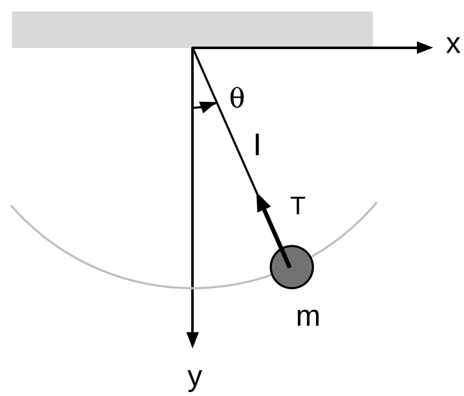

図 4: 単振り子