数学II 中間試験

試験問題は A コースと B コースがあります．それぞれ 100 点です．解答用紙の一番最初にどちらを選択するか明記してください．

[A コース]

問題 1. (40 点)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

について次の問に答えよ．

(1) $x > 0$ なる任意の実数に対して $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ が成立することを示せ．
(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を示せ．
(3) $x = 0$ における $f(x)$ の連続性と微分可能性を調べよ．

解答 (1) $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ とおく．このとき

$$f'(x) = e^x - 1 - x$$
$$f''(x) = e^x - 1$$

$f''(0) = 0$, e^x は単調増加関数より $x > 0$ のとき $f''(x) > 0$．よって $x > 0$ のとき $f'(x)$ は単調増加関数．よって $f'(0) = 0$ より $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$．さらに $f(0) = 0$ より $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ となることが分かり主張は示せる．

(2) $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ より

$$\frac{x}{ex} < \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2}} = 0$$

よりはさみうちより $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ が示せる．

(3) $t = \frac{1}{h}$ とおくと $h \to +0$ のとき $t \to +\infty$．

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0 \ ((2) \text{ から})$$

よって左微分係数 $f'_-(0) = 0$．明らかに右微分係数 $f'_+(0) = 0$．よって $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能．

$x = 0$ で $f(x)$ は微分可能より $x = 0$ で $f(x)$ は連続になる． ♠

問題 2. (20 点) $[-1,1]$ 上で定義されている $f(x)=|x|\sin^{-1}x$ について次の問に答えよ.

(1) $f(x)$ が $x=0$ において連続かどうか調べよ.
(2) $x=0$ における左微分係数, 右微分係数, 微分係数それぞれを求めよ.

(解答) (1) 関数 $|x|$, $\sin^{-1}x$ は $x=0$ で連続より, $f(x)$ は $x=0$ で連続になる.

注意 $\sin^{-1}x$ は $\frac{1}{\sin x}$ でなない.

(2)

$$\begin{aligned}\text{右微分階数} &= \lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to+0}\sin^{-1}h = 0\\ \text{左微分係数} &= \lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to+0}-\sin^{-1}h = 0\end{aligned}$$

左右微分係数が等しいより $x=0$ における微分係数 $f'(0)=0$ である. ♠

問題 3. (20 点) 次の極限値を求めよ.
(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$

解答 (1)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\\ &= \log(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}})\\ &= \log e = 1\end{aligned}$$

(2) $\lim_{x\to 0}a^x-b^x=1-1=0$, $\lim_{x\to 0}x=0$ よりロピタルの定理を利用する.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} &= \lim_{x\to 0}(\log a a^x-\log b b^x)\\ &= \log a-\log b = \log\tfrac{a}{b}\end{aligned}$$

♠

問題 4. (20 点) 次の関数の導関数を求めよ.
(1) $\log|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|$
(2) $(1+x)^x$

解答 (1)

$$\begin{aligned}\{\log|\tan(\tfrac{x}{2}+\tfrac{\pi}{4})|\}' &= \tfrac{1}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\times\tfrac{1}{\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\times\tfrac{1}{2}\\ &= \tfrac{1}{2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\\ &= \tfrac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \tfrac{1}{\cos x}\end{aligned}$$

(2) $y=(1+x)^x$ とおくと, $\log y = x\log(1+x)$. よって

$$\tfrac{dy}{dx} \times \tfrac{1}{y} \quad = \log(1+x) + x \times \tfrac{1}{x+1}$$

故に

$$y' = (1+x)^x\{\log(1+x) + \frac{x}{x+1}\}$$

♠

[B コース]

問題 1. (20 点) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$$

解答

$y=(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$ とおく. $\log y=\frac{1}{x}\log\frac{a^x+b^x}{2}$. $\lim_{x\to 0}x=0$, $\lim_{x\to 0}\log\dfrac{a^x+b^x}{2}=0$ よりロピタルの定理を利用する.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{a^x+b^x}{2}}\{\frac{\log aa^x+\log bb^x}{2}\} \\ &= \tfrac{1}{2}\log ab=\log\sqrt{ab}\end{aligned}$$

よって求める極限値は $\sqrt{ab}$. ♠

問題 2. (30 点) 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $(1+\frac{1}{x})^x$ (2) $x^{\log x}$

解答 (1) $y=(1+\frac{1}{x})^x$ とおくと, $\log y=x\log(1+\frac{1}{x})$. よって

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{y}y' &= \log(1+\tfrac{1}{x})+x\times\tfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\times-\tfrac{1}{x^2} \\ &= \log(1+\tfrac{1}{x})-\tfrac{1}{x+1}\end{aligned}$$

故に

$$y'=(1+\frac{1}{x})^x\{\log(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\}$$

(2) $y=x^{\log x}$ とおくと $\log y=(\log)^2$. よって

$$\frac{1}{y}y'=2\log x\times\frac{1}{x}$$

故に

$$y'=2x^{\log x-1}\log x$$

♠

問題 3. (50 点) f が $I=[a,b]$ 上で定義された関数で次の条件 $(i),(ii),(iii)$ を満たすとする:

(i) f は I 上で連続.

(ii) $f(I)\subset I$

(iii) ある定数 $0\le L<1$ なる定数で $\forall x_1,x_2\in I$

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$$

が成立する.

このとき次の問に答えよ.

(1) ある $z_0 \in I$ で $f(z_0) = z_0$ となるものが存在することを示せ.

(2) もし $z_1, z_2 \in I$ で $f(z_1) = z_1, f(z_2) = z_2$ が成立するとすれば, $z_1 = z_2$ が成立することを示せ.

(3) $x_0 \in I$ を任意に取りその後 $x_n = f(x_{n-1})$ $(n \geq 1)$ と数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を構成する. このとき $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, その極限を α と置くと $f(\alpha) = \alpha$ となることを示せ.

解答

(1) $g(x) = f(x) - x$ とおくと, (i) より $g(x)$ は I 上の連続関数である. (ii) より, $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$. よって中間値の定理より $g(z_0) = 0$ となるのが存在する. すなわち $f(z_0) = z_0$.

(2) $z_1, z_2 \in I$ で $f(z_1) = z_1, f(z_2) = z_2$ が満たしているとする. ここで $z_1 \neq z_2$ とする. (iii) より

$$|z_1 - z_2| = |f(z_1) - f(z_2)| \leq L|z_1 - z_2| < |z_1 - z_2|$$

となり矛盾する.

(3)

$$\begin{aligned}
|x_n - x_{n-1}| \quad &\leq |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| &&\leq L|x_{n-1} - x_{x-2}| \\
&= L|f(x_{n-2}) - f(x_{n-3}) &&\leq L^2|x_{n-3} - x_{n-4}| \\
&\cdots &&\leq L^n|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

よって, $n > m$ に対して

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| \quad &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\
&\leq (L^n + L^{n-1} + \cdots + L^{m+1})|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

$0 \leq L < 1$ より $|x_n - x_m| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. ゆえに $\{x_n\}$ はコーシー列になるので (コーシーの条件を満たすので) 収束する. それを α とする.

$$\begin{aligned}
|f(x_n) - \alpha| \quad &\leq |f(x_n) - f(\alpha)| &&\leq L|x_n - \alpha| \\
&= L|f(x_{n-1}) - f(\alpha)| &&\leq L^2|x_{n-1} - \alpha| \\
&\cdots &&\leq L^{n+1}|x_0 - \alpha|
\end{aligned}$$

より, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$. f は連続より

$$f(\alpha) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha.$$

♠