数値解析 レポート 2

問題 1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ が次の関係式を満たしているとする.

(i) $x_{n+1} - \alpha = (A + \varepsilon_n)(x_n - \alpha)$ $(n \geq 1)$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

ただし, $A, \alpha \in \mathbf{R}$, $|A| < 1$, かつ, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. ここで新しい数列

$$y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

$(n \geq 1)$ を考える. このとき次の問に答えよ.

(1) $y_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ を証明せよ.

(2)

$$\frac{y_n - \alpha}{x_{n+2} - \alpha} \to 0 \ (n \to \infty)$$

を証明せよ.

解答 (1)

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= (x_{n+1} - \alpha) - (x_n - \alpha) \\
&= (A + \varepsilon_n - 1)(x_n - \alpha), \\
x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n &= x_{n+2} - x_{n+1} - (x_{n+1} - x_n) \\
&= \{(A + \varepsilon_{n+1} - 1)(A + \varepsilon_n) - (A + \varepsilon_n - 1)\}(x_n - \alpha) \\
&= \{(A - 1)^2 + o(\varepsilon_n)\}(x_n - \alpha)
\end{aligned}$$

$(o(\varepsilon_n) = A(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) + \varepsilon_n\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n)$ より

$$\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = \frac{(A + \varepsilon_n - 1)^2(x_n - \alpha)}{(A - 1)^2 + o(\varepsilon_n)}.$$

よって, $\lim_{n\to\infty} o(\varepsilon_n) = 0$ に注意して,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(y_n - \alpha) &= \lim_{n\to\infty}\{(x_n - \alpha) + \tfrac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\{(x_n - \alpha) + \tfrac{(A + \varepsilon_n - 1)^2(x_n - \alpha)}{(A - 1)^2 + o(\varepsilon_n)}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2) (1) の計算から, $A \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\tfrac{y_n - \alpha}{x_{n+2} - \alpha} &= \tfrac{(A-1)^2 + o(\varepsilon) - (A + \varepsilon_n - 1)^2}{(A + \varepsilon_{n+1})(A + \varepsilon)\{(A-1)^2 + o(\varepsilon_n)\}} \\
&\to 0 \ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

$A = 0$ のときは一般に成立しない. しかし,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0$$

は, 任意の $|A| < 1$ で成立する.

□

問題 2. 関数 $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ が

$$|g'(x)| \leq L < 1,\ x \in (a, b)$$

を満たすとする．さらに，$g(c) = c$ となる実数 $c \in (a, b)$ が存在するとする．このとき次の問に答えよ．

(1) $0 < d < \min\{b - c, c - a\}$ なる実数にたいして $g([c - d, c + d]) \subset [c - d, c + d]$ が成立することを証明せよ．

(2) $x_0 \in [c - d, c + d]$ を任意にとり

$$x_n = g(x_{n-1})\ (n = 1, 2, \dots)$$

と定義すると，$\lim_{n\to\infty} x_n = c$ であることを示せ．

(ヒント：系 *4.4.4* の証明を見直せ.)

解答

(1)

平均値の定理より $\forall x \in [c - d, c + d]$

$$\begin{aligned}
|g(x) - c| &= |g(x) - g(c)| \\
&= |g'(h)||x - c|\ (h \text{ は } x \text{ と } c \text{ 間の数}) \\
&\leq L|x - c| < d.
\end{aligned}$$

故に，$g(x) \in [c - d, c + d]$.

(2) $\forall x_0 \in [c - d, c + d]$

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - x_n| &= |g(x_n) - g(x_{n-1})| \\
&\leq L|x_n - x_{n-1}| \\
&\leq L^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \\
&\cdots \\
&\leq L^n|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

故に，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．よって，$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n \in [c-d, c+d]$. g は連続より

$$g(\alpha) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha.$$

ここでもし $c \neq \alpha$ とすると，

$$|c - \alpha| = |g(c) - g(\alpha)| \leq L|c - \alpha| < |c - \alpha|$$

となり矛盾．よって，$c = \alpha$. □

問題 3. 関数 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6$ について次の設問に答えよ.

(1) 二つの実根が存在することを示せ.

(2) 初期値を $x_0 = 1$, ニュートン近似で $f(x) = 0$ の近似解を, 許容絶対誤差 10^{-5} で求めよ.

(3) $g(x) = -(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 6)/4$ に対して, $0 < y_0 < 2$, $y_n = g(y_{n-1})$ と定義すると, 数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ. その極限を α とおくと, $f(\alpha) = 0$ となることを示せ. (ヒント: 問題 *2* を使う)

解答

(1)

$f(-1) = 5 > 0$, $f(0) = -6 < 0$, $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 2 > 0$ より, 中間値の定理より実数解は, $(-1, 0), (1, 2)$ の中に存在する.

(2)

漸化式は

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \tfrac{3x_n^4 - 8x_n^3 + 6x_n^2 + 6}{4x_n^3 - 12x_n^2 + 12x_n} \end{aligned}$$

で与えられることに注意する. さらに, 小数点以下 6 桁で切り捨てをして計算をすれば十分であるので,

$x_1 = 1.75$, $x_2 = 1.694368$, $x_3 = 1.692506$, $x_4 = 1.692504$, $x_5 = 1.692504$ より, 近似解は 1.69250 となる.

(3)

$g'(x) = -\frac{1}{4}(4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)$, $g''(x) = -3(x-1)^2 \leq 0$ $\forall x \in [0, 2]$ であるので $g'(x)$ 単調減少である. さらに, $g'(0) = 1$, $g'(1) = 0$, $g'(2) = -1$ に注意すると, $g([0, 2]) \subset [\frac{3}{2}, \frac{7}{2}]$ であることがわかる. 特に,

$$g([\frac{3}{2}, \frac{7}{2}]) \subset [\frac{3}{2}, \frac{7}{2}].$$

さらに, $f(\frac{3}{2}) < 0, f(\frac{7}{2}) > 0$ に注意すると, 中間値の定理より $f(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ が存在する. このとき, $g(\alpha) = \alpha$ である.

$g'(x)$ は, 単調減少連続関数で, $g'(0) = 1, g'(2) = -1$ であるのである $0 < L < 1$ が存在して,

$$|g'(x)| \leq L, \ \forall x \in [\frac{3}{2}, \frac{7}{2}].$$

よって, 問題 2 の仮定を g が満たすので, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ は, α に収束する. このとき, 上の考察より, $f(\alpha) = 0$. □