数値解析レポート3解答

問題 9.3.1

(1) 定理 5.2.1 の証明せよ.

(2) 行列 $A = [a_{i,j}]$ が定理 5.4.1 を満たしているとき, A にガウスの消去法を一回施した行列を

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & c \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

とおく. ここで, c は $1 \times (n-1)$ 行列, B は $(n-1) \times (n-1)$ 行列. このとき B も定理の仮定を満たすことを示せ. すなわち $B = [b_{i,j}]$ と表現したとき

$$|b_{k,k}| > \sum_{j=1, j \neq k} |b_{k,j}|$$

$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

解答 (1)

5.4.1 のヤコビ法の解説より $A = D + E + F$ の分解に対して, $G = D^{-1}(E + F)$, $G = [g_{i,j}]$ とおいたとき

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{\sum_{j=1}^{n} |g_{i,j}|\} < 1$$

が示せれれば縮小写像の原理 (命題 5.3.2) より定理 5.4.1 が証明できる. ところで $g_{i,i} = 0$ $(1 \leq i \leq n)$, かつ, $i \neq j$ のとき $g_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|}$ である. よって仮定 $(*)$ の不等式を用いて

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} |g_{i,j}| &= \textstyle\sum_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} \\ &< 1 \end{aligned}$$

が導かれるので, 定理は証明された.

(2)

$B = (b_{i,j})$ とおくと

$$b_{i,j} = a_{i+1,j+1} - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} a_{1,j+1} \ (1 \leq i, j \leq n-1)$$

よって

$$
\begin{array}{ll}
\sum_{j=1,j\neq i}|b_{i,j}| & = \sum_{j=1,j\neq i}^{n-1}|a_{i+1,j+1}-\frac{a_{i+1,1}}{a_{1,1}}a_{1,j+1}| \\
|b_{i,i}| & = |a_{i+1,i+1}-\frac{a_{i+1,1}}{a_{1,1}}a_{1,i+1}| \\
|a_{i+1,i+1}| & > \sum_{j=1,j\neq i+1}|a_{i+1,j}| \\
|a_{1,1}| & > |a_{1,2}|+|a_{1,3}|+\cdots+|a_{1,i+1}|+\cdots+|a_{1,n}| \ (*)
\end{array}
$$

を用いて

$$
\begin{array}{ll}
|a_{i+1,i+1}|-|a_{i+1,1}| & \geq |a_{i+1,2}|+\cdots+|a_{i+1,n}| \\
|a_{i+1,1}|-|\frac{a_{i+1,1}}{a_{1,1}}a_{1,i+1}| & > |\frac{a_{i+1,1}}{a_{1,1}}a_{1,2}|+\cdots+|\frac{a_{i+1,1}}{a_{1,1}}a_{1,n}|
\end{array}
$$

が導かれる．ただし，2 番目の式は，　$(*)$ の両辺に $|\frac{a_{i+1,1}}{a_{1,1}}|$ を掛けて導く．これらの二式を足すと

$$
\begin{array}{ll}
|a_{i+1,i+1}|-|\frac{a_{i+1,1}}{a_{1,1}}a_{1,i+1}| & > \sum_{j=1,j\neq i}^{n-1}(|a_{i+1,j+1}|+|\frac{a_{i+1,1}}{a_{1,1}}a_{1,j+1}|) \\
& \geq \sum_{j=1,j\neq i}^{n-1}|b_{i,j}|
\end{array}
$$

$$
|b_{i,i}| \geq |a_{i+1,i+1}|-|\frac{a_{i+1,1}}{a_{1,1}}a_{1,i+1}|
$$

より

$$
|b_{i,i}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n-1}|b_{i,j}| \qquad (1\leq i\leq n-1)
$$

が帰結でき証明は終わる． ♠

問題 9.3.2 2 曲線 $x^2+y^2=2$, $x^2-y^2=1$ の交点を, $x_0=y_0=1$ から始めてニュートン法で解け．但し, 許容絶対誤差を 10^{-6} とする．

解答

$$
\begin{cases}
f_1(x,y)=x^2+y^2-2 \\
f_2(x,y)=x^2-y^2-1
\end{cases}
$$

このとき, ヤコビ行列は

$$
J\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}
$$

よって,

$$
\begin{array}{ll}
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}+\frac{1}{8x_ny_n}\begin{pmatrix} -2y_n & -2y_n \\ -2x_n & 2x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n^2+y_n^2-2 \\ x_n^2-y_n^2-1 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_n+\frac{3}{4x_n} \\ \frac{1}{2}y_n+\frac{1}{4y_n} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

故に,

$$\begin{cases} x_1 = 1.25 \\ y_1 = 0.75 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 1.225 \\ y_2 = 0.7083333333 \end{cases},$$
$$\begin{cases} x_3 = 1.224744898 \\ y_3 = 0.7071078431 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_4 = 1.224744871 \\ y_4 = 0.7071067812 \end{cases},$$
$$\begin{cases} x_5 = 1.224744871 \\ y_5 = 0.7071067812 \end{cases}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_5 - x_4 \\ y_5 - y_4 \end{pmatrix} \right\| < 10^{-6}$$

より求める近似値は, $(1.224744, 0.707106)$. ♠

問題 9.3.3 次の方程式をガウス・ザイデル法で解け．但し，初期値 $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, 許容誤差は 10^{-4} である．

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解答例

与式より得られる漸化式は

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}\{1 - y_n\} \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}\{2 - x_{n+1} - z_n\} \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}\{3 - y_{n+1}\} \end{cases}$$

$x_0 = y_0 = z_0 = 1$ を初期値とすると,

k	x_k	y_k	z_k
0	1	1	1
1	0	0.25	0.6875
2	0.1875	0.28125	0.6796875
3	0.1796875	0.28515625	0.6787109375
4	0.1787109375	0.2856445313	0.6785888672
5	0.1785888672	0.2857055664	0.6785736084
6	0.1785736084	0.2857131958	0.6785717011

$$\left\| \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix} \right\| < 10^{-4}$$

より, 近似解は $x = 0.1785$, $y = 0.2857$, $z = 0.6785$ である． **Q.E.D.**

問題 9.3.4

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) A の LU 分解を求めよ.
(2) (1) の LU 分解を用いて

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を解け. 但し, 少数点以下 2 桁で近似値を求めよ.

解答 (1): 計算過程略.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{41} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{41}{12} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140}{41} \end{pmatrix}$$

分数計算を小数点以下 3 桁表示で計算してもよい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.571 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.583 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.585 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.429 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.417 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.415 \end{pmatrix}$$

(2):

$$LU\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を計算して,

$$y_1 = 2, y_2 = -2, y_3 = 0.142, y_4 = -0.083, y_5 = 3.049$$

$$x_1 = 0.652, x_2 = -0.609, x_3 = 0.126, x_4 = -0.286, x_5 = 0.893.$$

故に,

$$x_1 = 0.65, x_2 = -0.61, x_3 = 0.13, x_4 = -0.29, x_5 = 0.89.$$

(1. 分数計算で押し進めて最後に小数変換した場合多少過程の計算値が異なってくる. 2. 小数点以下 3 桁で計算し, 最後に四捨五入する.) ♠