応用数学 III　試験

1．次の微分方程式系において，$x_1(t)$ と $x_2(t)$ は時間 t によって変化する変数，m_1，m_2，k_1，k_2，x_1^*，x_2^*，K_{I1}，K_{I2} は定数である．この微分方程式系を標準型に変換し状態変数を示すとともに，状態変数の値からそれらの時間微分の値を計算する手法を記せ．(10 点)

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = K_{I1}\int_0^t \{x_1^* - x_1(\tau)\}\,\mathrm{d}\tau,\\
&m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = K_{I2}\int_0^t \{x_2^* - x_2(\tau)\}\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

2．次の行列の射影行列を求めよ．(8 点)

$$
\begin{bmatrix}
-3 & 0 & 5 & 1\\
-2 & 2 & -1 & 1\\
2 & -2 & 1 & -1\\
3 & 0 & -5 & -1
\end{bmatrix}
$$

3．長さ L の梁の上端と下端を固定する．梁の断面積 A，ヤング率 E，線密度 ρ は一定である．梁は重力により変形する．重力加速度を g で表す．梁の自然状態において上端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す．このとき関数 $u(x)$ は

$$
\begin{aligned}
&\text{min} && \int_0^L \frac{1}{2}EA\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^L \{-\rho A g\, u(x)\}\,\mathrm{d}x\\
&\text{subject to} && u(0) = 0, \quad u(L) = 0
\end{aligned}
$$

から求めることができる．区間 $[\,0,\,L\,]$ を 6 分割し，有限要素法を用いて，上式を連立方程式に変換せよ．(12 点)

4. 水平な$O-xy$平面内を質量mの質点が運動する．質点の座標を$(x,\, y)$で表す．質点の位置が曲線

$$R(x,y) \stackrel{\triangle}{=} x^2 - ay = 0$$

上に制約される．ここでaは定数である．以下の問いに答えよ．(12点)
(1) 制約に対応する未定乗数をλで表す．系のラグランジアンを求めよ．
(2) ラグランジュの運動方程式を求めよ．
(3) 制約安定化の式を求めよ．
(4) ラグランジュの運動方程式と制約安定化の式から，常微分方程式の標準形を導け．

5. 観測値g_0, g_1, g_2, g_3の離散フーリエ変換は

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

（ここで$w = e^{-i\,2\pi/4}$）で与えられる．以下の問いに答えよ．(10点)
(1) G_0, G_1, G_2, G_3の実部$\mathrm{Re}\, G_0, \mathrm{Re}\, G_1, \mathrm{Re}\, G_2, \mathrm{Re}\, G_3$を，$g_0, g_1, g_2, g_3$から計算する式を構成し，これらの計算には乗算を含まないことを示せ．加減算の回数は最少で何回か．
(2) G_0, G_1, G_2, G_3の虚部$\mathrm{Im}\, G_0, \mathrm{Im}\, G_1, \mathrm{Im}\, G_2, \mathrm{Im}\, G_3$を，$g_0, g_1, g_2, g_3$から計算する式を構成し，これらの計算には乗算を含まないことを示せ．加減算の回数は最少で何回か．

6. 次の行列のコレスキー分解を求めよ．(8点)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$