数値計算　小テスト　1,2 時限

1. 以下の文が正しい場合は○，誤っている場合は×を記せ．(1 点 ×5=5 点)

(a) 有限要素法における剛性行列 K は正則である．

(b) 一次元のビームの動的な伸縮変形に関する運動エネルギーを，有限要素法で近似する．このとき運動エネルギーは，節点の変位から成るベクトルの時間微分 $\dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ の二次形式で表される．

(c) 制約付き最小化

$$\min\ f(\boldsymbol{x}) \quad \text{subject to} \quad g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = 0$$

を制約なし最小化に変換すると

$$\min\ J(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g_1(\boldsymbol{x}) + \lambda g_2(\boldsymbol{x})$$

である．

(d) 射影行列 P に対して，$P^2 = P$ が成り立つ．

(e) QR 分解において，行列 R は上三角行列である．

2. 関数 $f(x)$ において

$$f(10) = 2, \qquad f(11) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(10) = -1, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(11) = 1$$

である．スプライン補間を用いて，$f(10.5)$ の値を求めよ．(5 点)

3. 以下の行列の射影行列を求めよ．(5 点)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 一次関数 $N_{i,j}(x)$ は $N_{i,j}(x_i) = 1$，$N_{i,j}(x_j) = 0$ を満たす．このとき

$$\int_{x_i}^{x_j} \{N_{i,j}(x)\}^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x_j - x_i)$$

が成り立つことを示せ．(5 点)

数値計算　小テスト　3,4 時限

1. 以下の文が正しい場合は○，誤っている場合は×を記せ．(1 点 ×5=5 点)

(a) QR 分解において，行列 Q は直交行列である．

(b) 一次元のビームの動的な伸縮変形に関する運動エネルギーを，有限要素法で近似する．このとき運動エネルギーは，節点の変位から成るベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}$ の二次形式で表される．

(c) 有限要素法における慣性行列 M は正則である．

(d) 制約付き最小化

$$\min\ f(\boldsymbol{x}) \quad \text{subject to}\ \ g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = 0$$

を制約なし最小化に変換すると

$$\min\ J(\boldsymbol{x}, \lambda_1, \lambda_2) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 g_2(\boldsymbol{x})$$

である．

(e) 射影行列 P に対して，$P^{-1} = P$ が成り立つ．

2. 以下の行列の射影行列を求めよ．(5 点)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 関数 $f(x)$ において

$$f(8) = 1, \qquad f(9) = 2, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(8) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(9) = -1$$

である．スプライン補間を用いて，$f(8.5)$ の値を求めよ．(5 点)

4. 一次関数 $N_{i,j}(x)$ は $N_{i,j}(x_i) = 1$，$N_{i,j}(x_j) = 0$ を満たす．一次関数 $N_{j,i}(x)$ は $N_{j,i}(x_i) = 0$，$N_{j,i}(x_j) = 1$ を満たす．このとき

$$\int_{x_i}^{x_j} N_{i,j}(x) N_{j,i}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x_j - x_i)$$

が成り立つことを示せ．(5 点)