1．変数 x, y は時間 t に関する未知の関数である．記号 $\dot{x}$ は変数 x の時間 t に関する一階微分，$\ddot{x}$ は二階微分，$\dddot{x}$ は三階微分を表す．以下の常微分方程式の標準形を記せ．(20 点)

(a) $\ddot{x} + 5\dot{x}^3 + 6x = 2\sin 4t$

(b) $\dot{x} + 2x + 3\displaystyle\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$

(c) $\begin{cases} \ddot{x} + (1 - x^2 - y^2)x = 0 \\ \ddot{y} + (1 - x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$

(d) $\dddot{x} + 3x = 2e^{-4t}$

2．変数 $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対応する x の値が $x_1, .x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ で与えられる．変数 t と x の関係を二次式 $x = a + bt + ct^2$ で近似する．係数 a, b, c の値を計算する正規方程式を記せ．(6 点)

3．次の行列の射影行列を求めよ．(6 点)

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 3 \\ -6 & 4 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -5 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4．定積分

$$S = \int_1^2 \frac{4}{5 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

の値をモンテカルロ法で計算する手法を記せ．ただし，ランダムな変数の値は，区間 $(\,0,\,1\,)$ の一様乱数 $U(\,0,\,1\,)$ を用いて生成せよ．(6 点)

5．長さ L の梁の上端と下端を固定する．梁の断面積 A，ヤング率 E，線密度 ρ は一定である．梁は重力により変形する．重力加速度を g で表す．梁の自然状態において上端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す．このとき関数 $u(x)$ は

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \int_0^L \frac{1}{2}EA\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^L \{-\rho A g\, u(x)\}\,\mathrm{d}x \\ &\text{subject to} && u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{aligned}$$

から求めることができる．区間 $[\,0,\,L\,]$ を 4 分割し，$h = L/4$ とする．有限要素法を用いて，上式を連立一次方程式に変換せよ．(10 点)

6．ピボット選択型 LU 分解を用いて，5 次の正方行列

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 8 & 8 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

の LU 分解を，4 次の正方行列 A_4 の LU 分解に変換する．行列 A_5 の一列目で，絶対値が最大の要素をピボットに選び，それにしたがって行を交換した結果を行列 A_5' で表す．行列 A_5' の LU 分解 $A_5' = L_5U_5$ において，L_5 の対角要素の値を 1 とする．以下の問いに答えよ．(12 点)

(a) 行交換後の行列 A_5' を示せ．
(b) 下三角行列 L_5 の一列目を，列ベクトルの形で示せ．
(c) 上三角行列 U_5 の一行目を，行ベクトルの形で示せ．
(d) 4 次の正方行列 A_4 を示せ．