数値計算　小テスト　1,2 時限

1. 以下の微分方程式 (a), (b), (c), (d), (e) の内，解答用紙に指定されている二つを時間区間 $[0, 4]$ で数値的に解き，x と y のグラフを描け．(10 点)

$$(a)\ \begin{cases} \dot{x} = (1-y^2)x + 3y \\ \dot{y} = (1-x^2)y - 3x \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} \dot{x} = (1-2x-x^2)x - 3y \\ \dot{y} = (1+2y-y^2)y + 3x \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2y - 6x - 5x^3 - 3\sin(t) \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} \dot{x} = 2x - xy \\ \dot{y} = xy - 3y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(1/10)y - x^3 - 12\sin(t) \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

2. 変数 x, y は時間 t に関する未知の関数である．記号 $\dot{x}$ は変数 x の時間 t に関する一階微分，$\ddot{x}$ は二階微分を表す．以下の常微分方程式の標準形を記せ. (8 点)

$$(a)\ \ddot{x} + 5\dot{x}^3 + 6x = 2\sin 4t \qquad (b)\ \dot{x} + 2x + 3\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$(c)\ \begin{cases} \ddot{x} + (1-x^2-y^2)x = 0 \\ \ddot{y} + (1-x^2-y^2)y = 0 \end{cases} \qquad (d)\ \ddot{x} + 3x = 2e^{-4t}$$

3. 質量 m の質点が水平面 $\mathrm{O} - xy$ 内を運動する．ただし，質点の運動は，曲線 $R(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 3 = 0$ 上に制約されている．制約式 R の変数 x, y に関する偏微分を R_x, R_y で表す．制約力の大きさを λ で表すと，質点の運動方程式は

$$m\ddot{x} = \lambda R_x$$
$$m\ddot{y} = \lambda R_y$$

で与えられる．$v_x = \dot{x}$，$v_y = \dot{y}$ とする．以下の問いに答えよ．(7 点)

(a) 偏微分 R_x, R_y を求めよ．

(b) 制約安定化法を用いて，制約式を一階の微分方程式に変換せよ．

(c) 状態変数を明示し，状態変数の値から状態変数の時間微分の値を計算する過程を示せ．

(d) $m = 1$ とする．時間区間 $[0, 4]$ で運動方程式を数値的に解き，時刻 t と変数 x のグラフ，時刻 t と変数 y のグラフを描け．初期条件は，$x(0) = 1$，$y(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 0$，$\dot{y}(0) = 1$ とする．

数値計算　小テスト　**3,4** 時限

1． 以下の微分方程式 (a), (b), (c), (d), (e) の内，解答用紙に指定されている二つを時間区間 [0, 4] で数値的に解き，x と y のグラフを描け．(10 点)

$$(a)\ \begin{cases} \dot{x} = (1-y^2)x + 3y \\ \dot{y} = (1-x^2)y - 3x \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} \dot{x} = (1-2x-x^2)x - 3y \\ \dot{y} = (1+2y-y^2)y + 3x \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2y - 6x - 5x^3 - 3\sin(t) \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} \dot{x} = 2x - xy \\ \dot{y} = xy - 3y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(1/10)y - x^3 - 12\sin(t) \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

2． 変数 x, y は時間 t に関する未知の関数である．記号 $\dot{x}$ は変数 x の時間 t に関する一階微分，$\ddot{x}$ は二階微分を表す．以下の常微分方程式の標準形を記せ．(8 点)

$$(a)\ \ddot{x} + 6\dot{x}^3 + 8x = 5\cos 4t \qquad (b)\ \dot{x} + 3x + 2\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$(c)\ \begin{cases} \ddot{x} + (1-x^2-y^2)x = 0 \\ \ddot{y} + (1-x^2-y^2)y = 0 \end{cases} \qquad (d)\ \ddot{x} + 3x = 5e^{-6t}$$

3． 質量 m の質点が水平面 O $-$ xy 内を運動する．ただし，質点の運動は，曲線 $R(x, y) = -12x^2 + 4y^2 + 3 = 0$ 上に制約されている．制約式 R の変数 x, y に関する偏微分を R_x, R_y で表す．制約力の大きさを λ で表すと，質点の運動方程式は

$$m\ddot{x} = \lambda R_x$$
$$m\ddot{y} = \lambda R_y$$

で与えられる．$v_x = \dot{x}$，$v_y = \dot{y}$ とする．以下の問いに答えよ．(7 点)

(a) 偏微分 R_x, R_y を求めよ．

(b) 制約安定化法を用いて，制約式を一階の微分方程式に変換せよ．

(c) 状態変数を明示し，状態変数の値から状態変数の時間微分の値を計算する過程を示せ．

(d) $m = 1$ とする．時間区間 [0, 4] で運動方程式を数値的に解き，時刻 t と変数 x のグラフ，時刻 t と変数 y のグラフを描け．初期条件は，$x(0) = 1/2$，$y(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 0$，$\dot{y}(0) = 1/2$ とする．