知能科学：グラフと経路計画

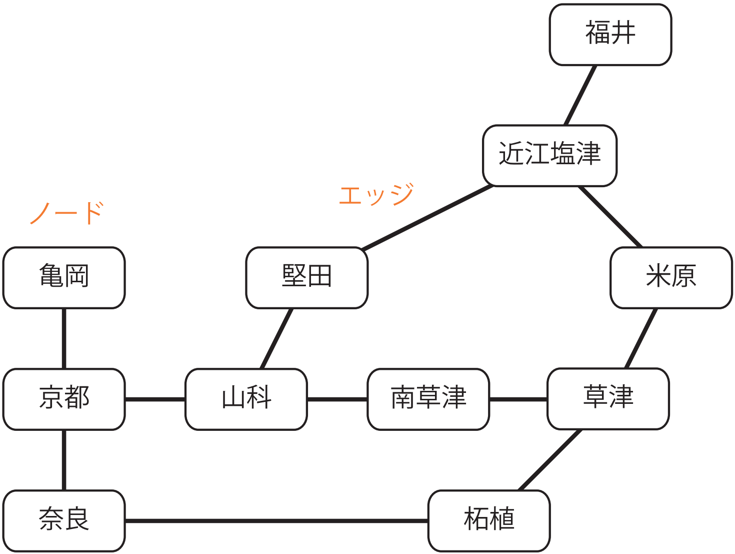
平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

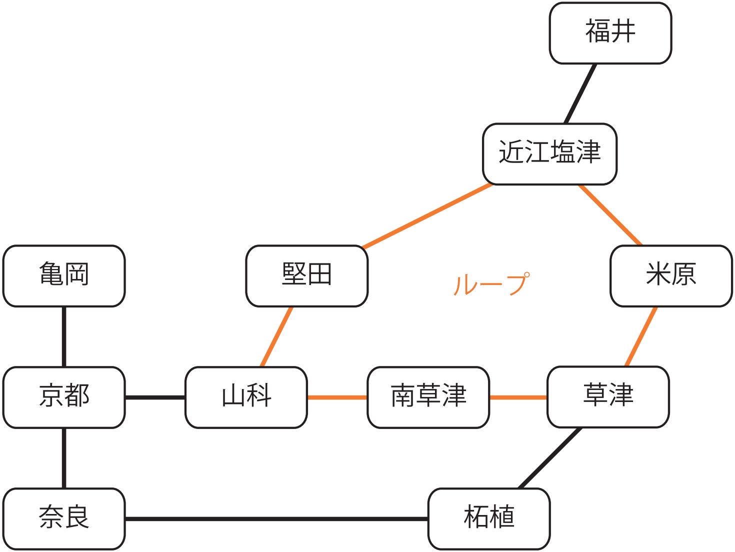
講義の流れ

1. グラフ
2. 最短経路問題
3. ダイクストラのアルゴリズム
4. 最大フロー問題
5. ゲーム木
6. 二人零和ゲーム
7. まとめ

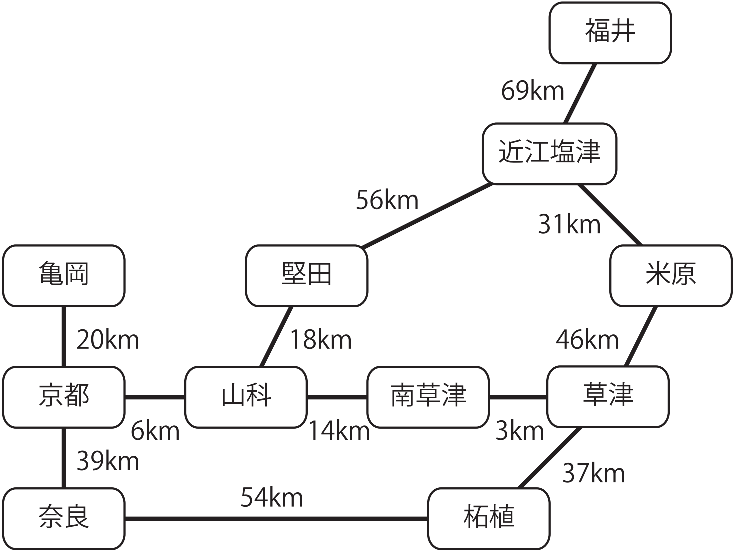
グラフ



グラフ



グラフ

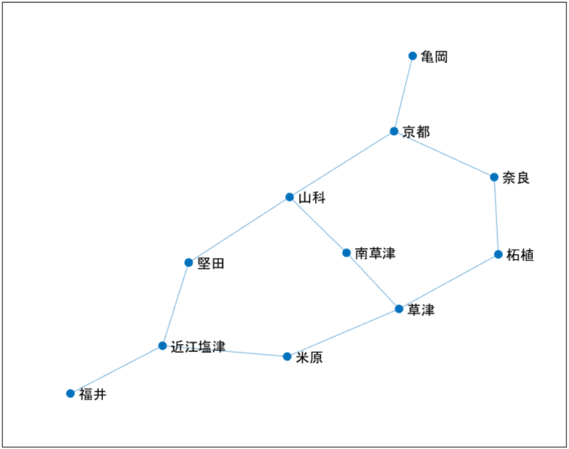

福井
69km
近江塩津
56km
31km
亀岡
堅田
米原
20km
18km
46km
京都
山科
南草津
草津
6km
14km
3km
39km
37km
54km
奈良
栢植

MATLAB

```
names = {'南草津', '山科', '京都', ...
'堅田', '近江塩津', '米原', '草津', ...
'福井', '亀岡', '奈良', '柘植'};

snode = [  1,  2,  2,  4,  5,  5,  ...
           6,  7,  7,  3,  3, 10 ];
tnode = [  2,  3,  4,  5,  6,  8,  ...
           7,  1, 11,  9, 10, 11 ];

dist  = [ 14,  6, 18, 56, 31, 69, ...
          46,  3, 37, 20, 39, 54 ];

g = graph(snode,tnode,dist,names);
```

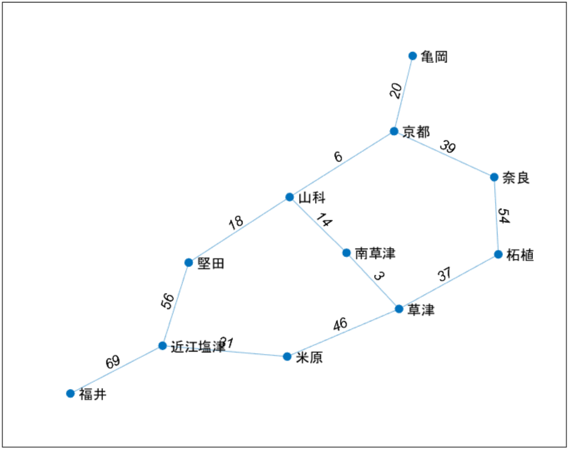
MATLAB

```
plot(g);
```



MATLAB

```
plot(g, 'EdgeLabel',g.Edges.Weight);
```



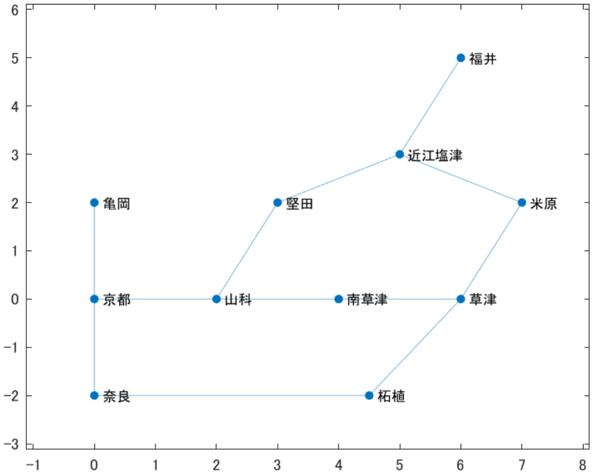
MATLAB

ノードの表示場所を指定

```
x = [ 4, 2, 0, 3, 5, 7, 6, 6, 0,  0, 4.5 ];
y = [ 0, 0, 0, 2, 3, 2, 0, 5, 2, -2,  -2 ];
```

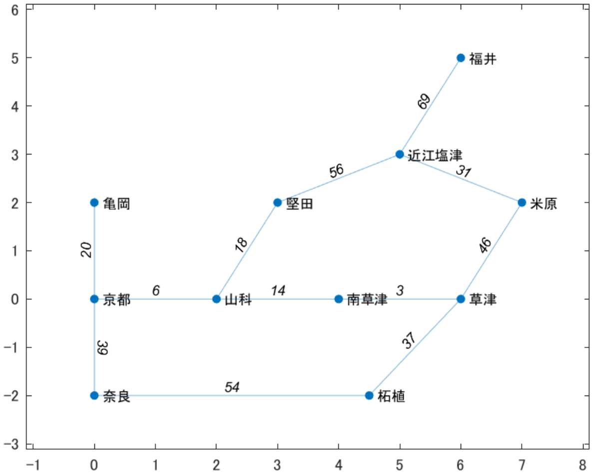
MATLAB

```
plot(g, 'XData',x,'YData',y);
```



MATLAB

```
plot(g, 'XData',x,'YData',y, 'EdgeLabel',g.Edges.Weight);
```

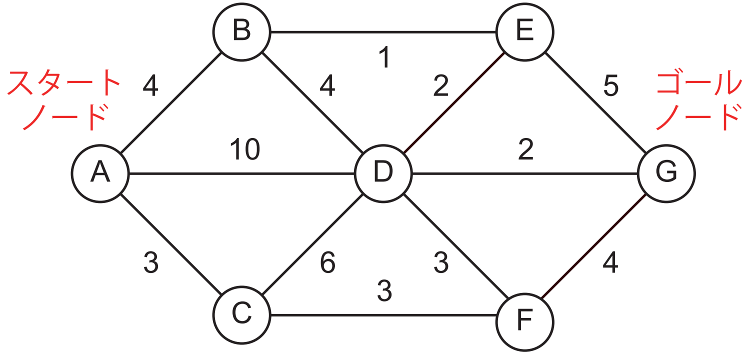


最短経路問題

奈良から福井へ至る最短経路 (shortest path)

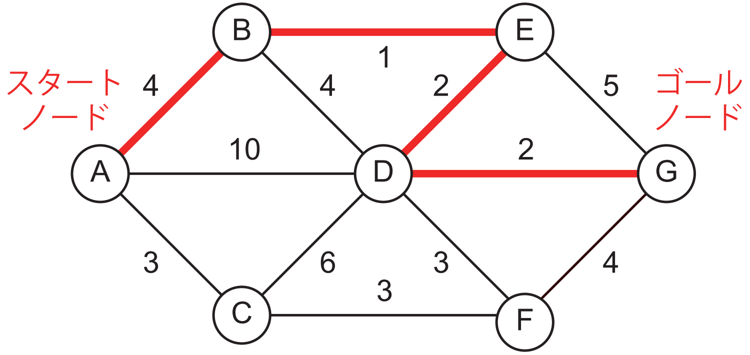
```
>> shortestpath(g,'奈良','福井')

ans =

  1 × 6 の cell 配列

    '奈良'    '京都'    '山科'    '堅田'    '近江塩津'
福井'
```

最短経路問題



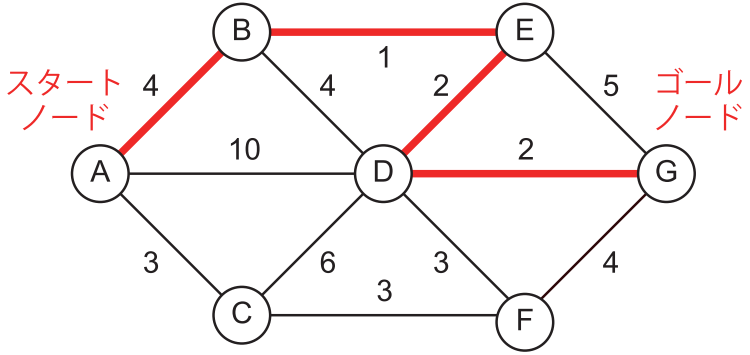
ノード A からノード G へ至る最短の経路

最短経路問題



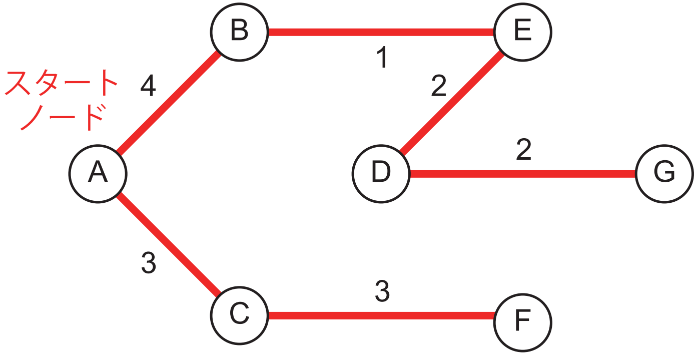
最短経路 A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ E $\rightarrow$ D $\rightarrow$ G
最短距離 $= 4 + 1 + 2 + 2 = 9$

最短経路問題



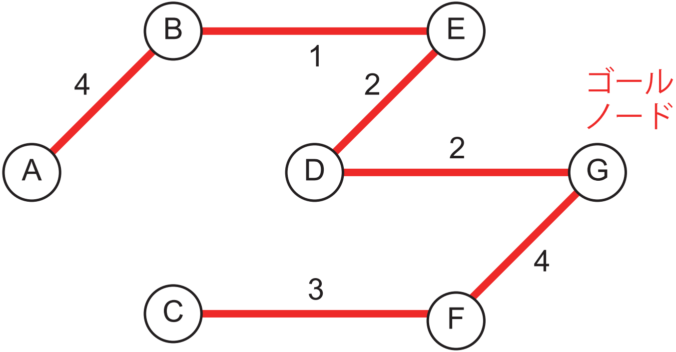
ノード A からノード B, E, D への最短経路
ノード B, E, D からノード G への最短経路
$\Rightarrow$ 最短経路の一部

最短経路木



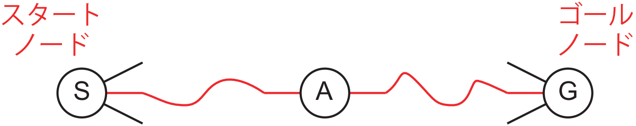
ノード A から他のノードへの最短経路
⇒ 最短経路木（ループのないグラフ）

最短経路木



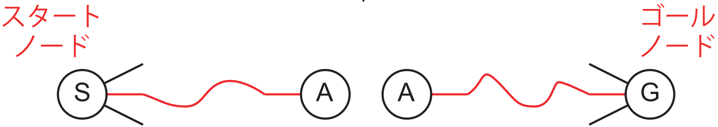
他のノードからノード G への最短経路
⇒ 最短経路木（ループのないグラフ）

ポントリャーギンの最適性原理



S から G への最短経路が A を通る

$\Downarrow$

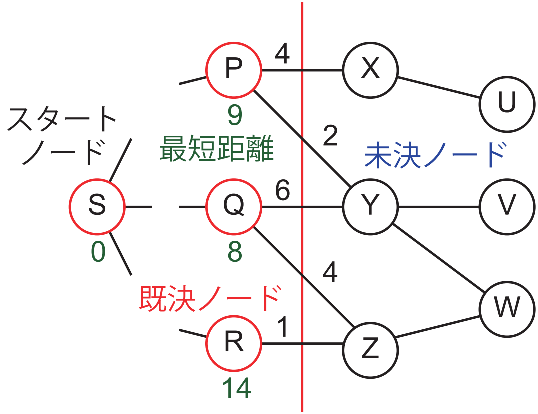


S から A への最短経路　A から G への最短経路

ダイクストラ　Edsger Dijkstra (1930　2002)

- オランダの情報工学者
- ダイクストラのアルゴリズム (1959)
- 構造化プログラミングの提唱
- 1972 年チューリング賞

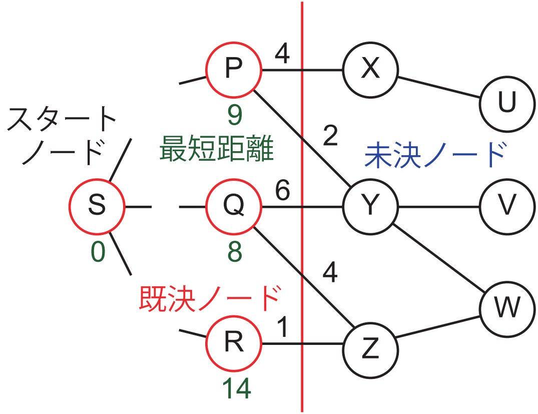
ダイクストラのアルゴリズム



既決ノード	最短距離が既決	未決ノード	最短距離が未決

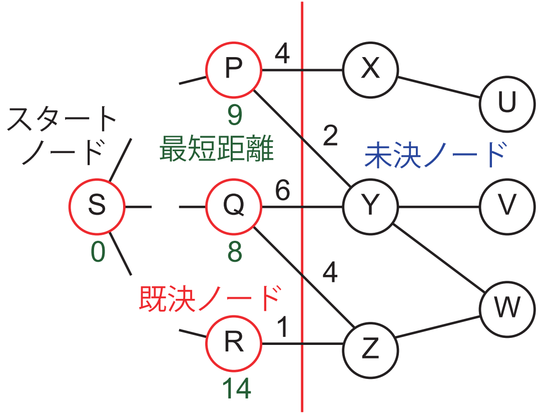
既決ノードを順次求める

ダイクストラのアルゴリズム

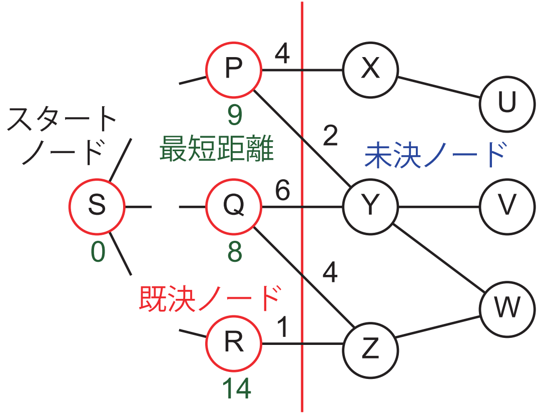


既決ノードからエッジを通って未決ノードへ至るパス
このようなパスにおける最短距離を求める

ダイクストラのアルゴリズム



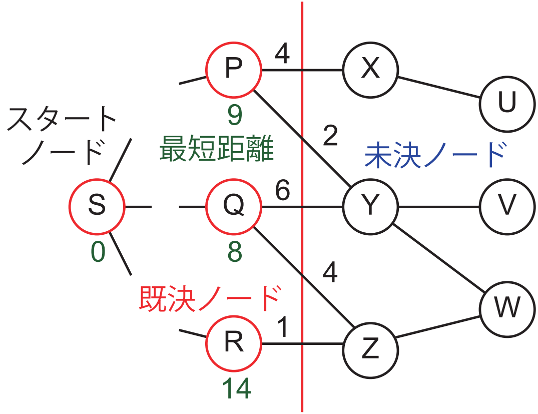
ダイクストラのアルゴリズム



$9 + 4 = 13$

$9 + 2 = 11$

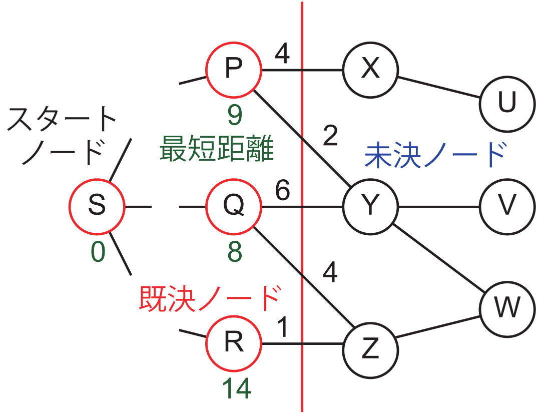
ダイクストラのアルゴリズム



$9 + 4 = 13$
$9 + 2 = 11$

$8 + 6 = 14$
$8 + 4 = 12$

ダイクストラのアルゴリズム

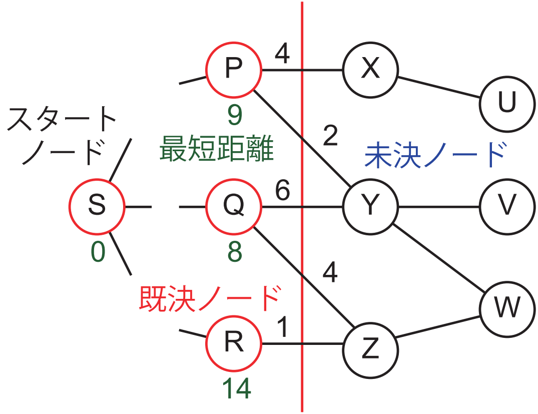


$9+4=13$
$9+2=11$

$8+6=14$
$8+4=12$

$14+1=15$

ダイクストラのアルゴリズム



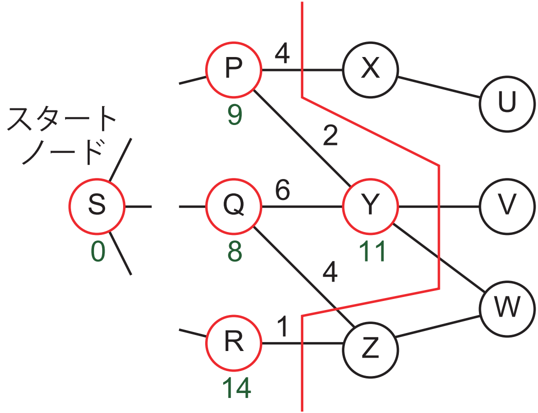
$9 + 4 = 13$
$9 + 2 = 11$

$8 + 6 = 14$
$8 + 4 = 12$

$14 + 1 = 15$

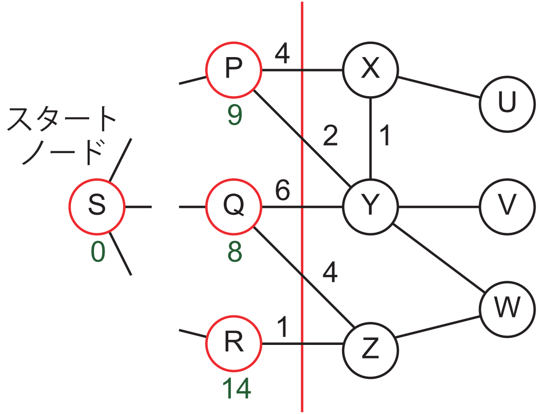
$9 + 2 = 11$ が最小
$\mathrm{S} \to \cdots \to \mathrm{P} \to \mathrm{Y}$ は最短経路

ダイクストラのアルゴリズム



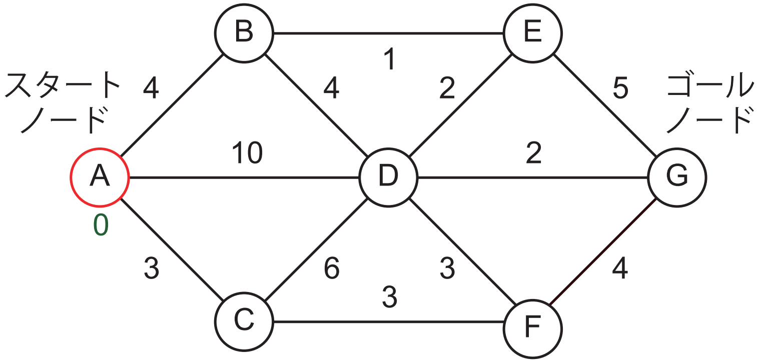
ノード Y の最短距離 = 11
ノード Y を既決とする

ダイクストラのアルゴリズム



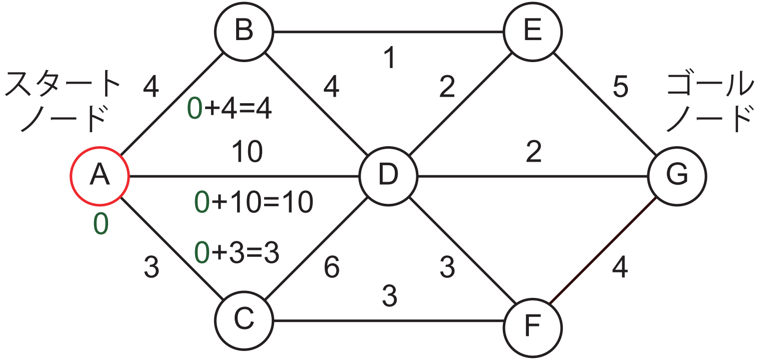
P から Y を通り X へ至る経路が最短の可能性がある
ので S → · · · → P → X は最短とは言えない

例



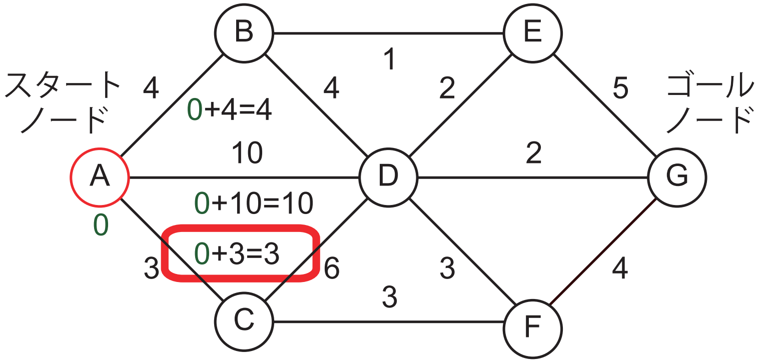
初期化: スタートノードを既決にする (最短距離 0)

例



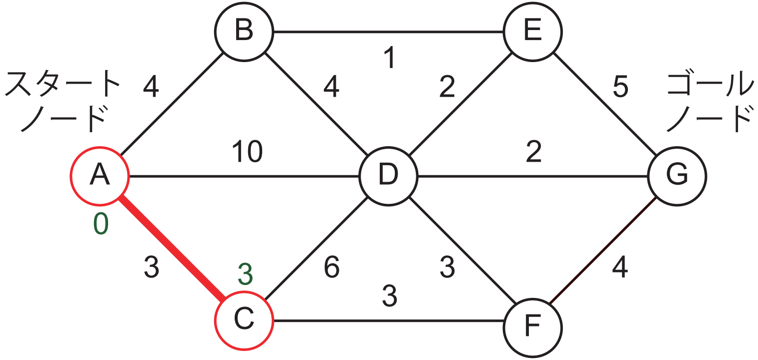
既決ノードを通り未決ノードへ至る経路の距離を計算

例



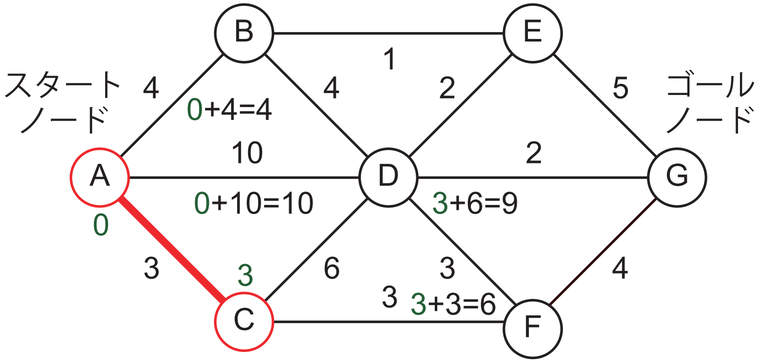
最小の経路を選ぶ

例



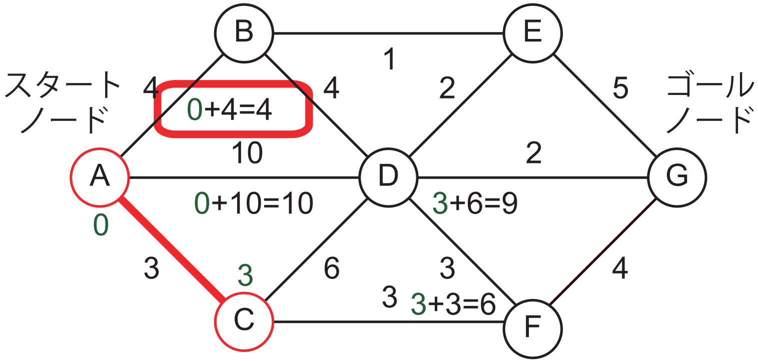
ノード C を既決にする

例



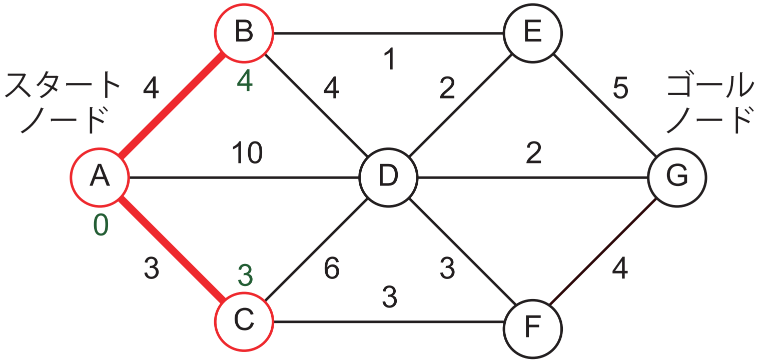
既決ノードを通り未決ノードへ至る経路の距離を計算

例



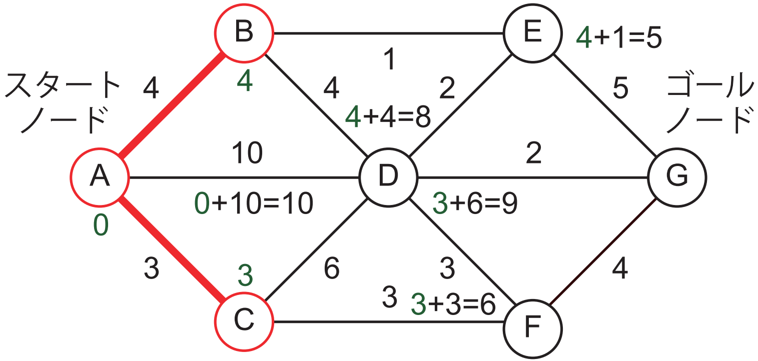
最小の経路を選ぶ

例



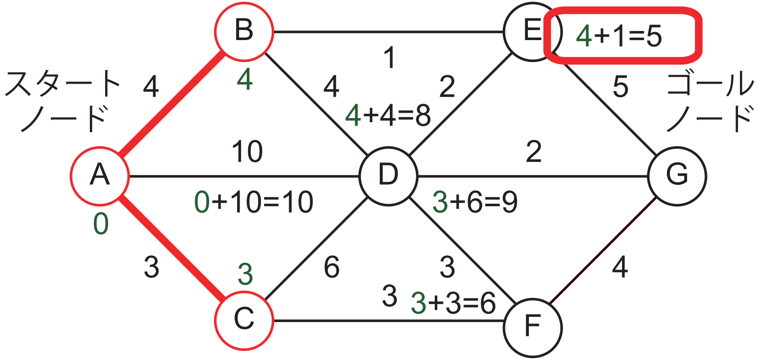
ノード B を既決にする

例



既決ノードを通り未決ノードへ至る経路の距離を計算

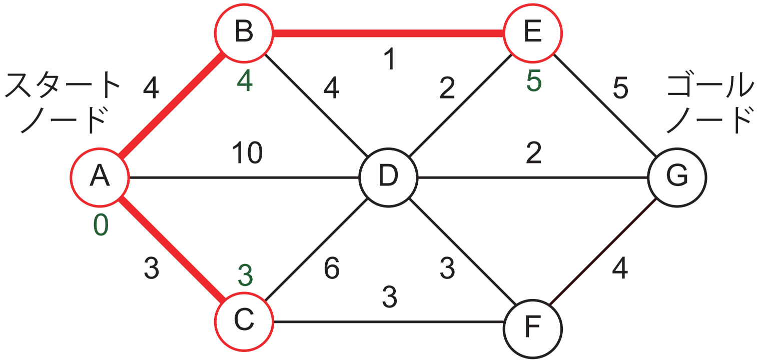
例



B
E
4+1=5
1
スタート
ノード
4
4
4
2
5
ゴール
ノード
4+4=8
10
2
A
D
G
0+10=10
3+6=9
0
3
3
6
3
4
3
3+3=6
C
F

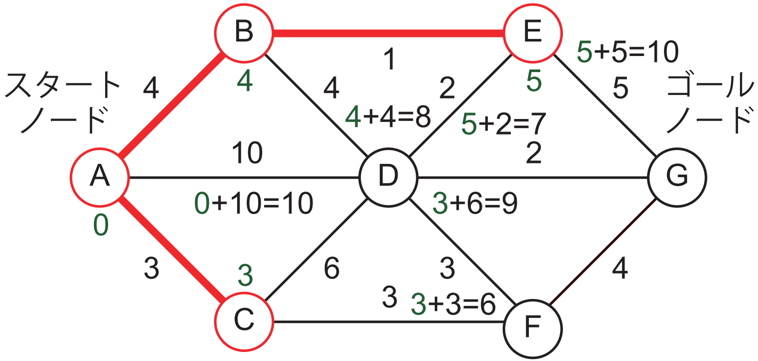
最小の経路を選ぶ

例



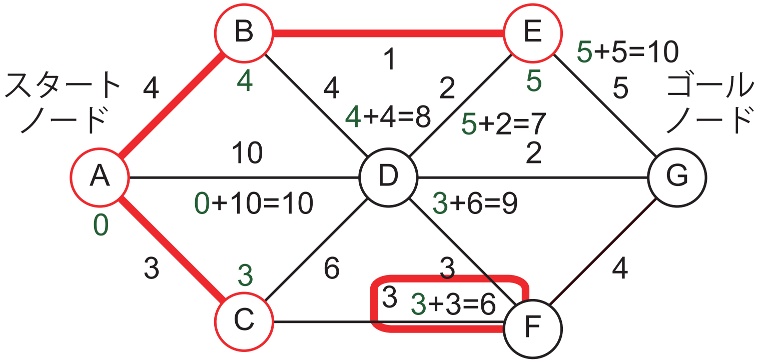
ノード E を既決にする

例



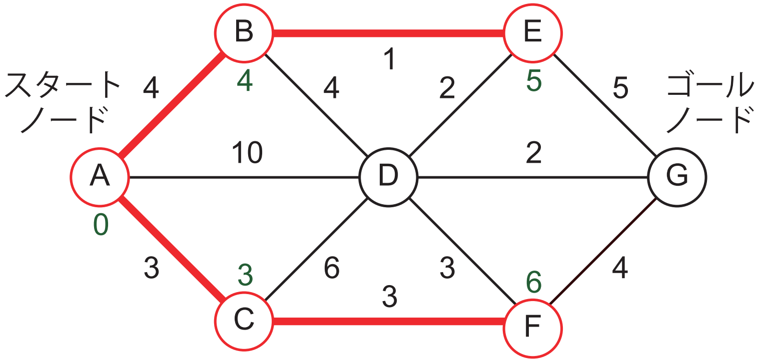
既決ノードを通り未決ノードへ至る経路の距離を計算

例


B
E
1
5+5=10
スタート
ノード
4
4
4
2
5
5
ゴール
ノード
4+4=8
5+2=7
10
2
A
D
G
0+10=10
3+6=9
0
3
3
6
3
4
3
3+3=6
C
F

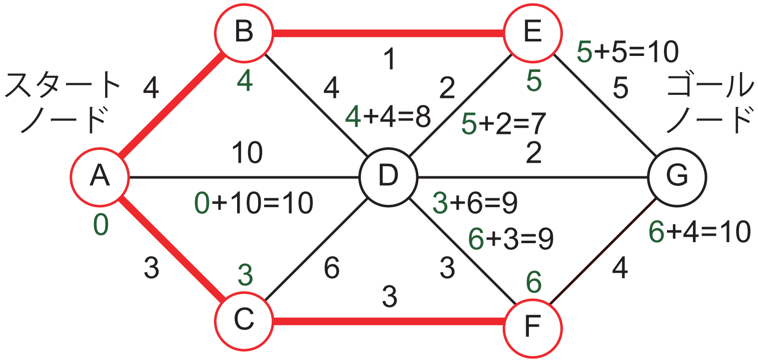
最小の経路を選ぶ

例



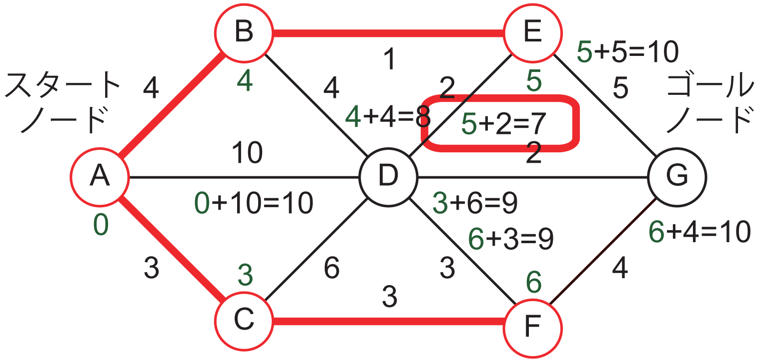
ノード F を既決にする

例



既決ノードを通り未決ノードへ至る経路の距離を計算

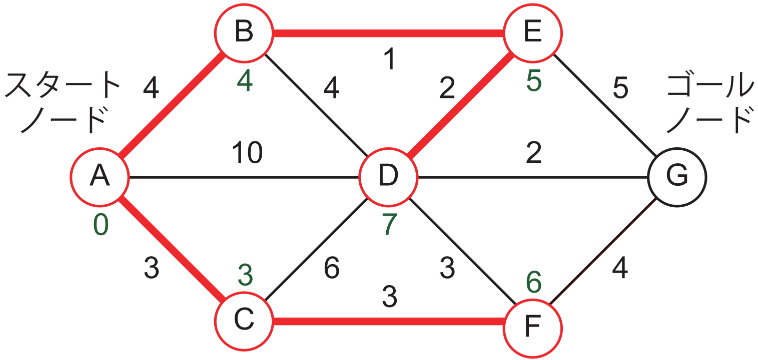
例



B
E
1
5+5=10
スタート
ノード
4
4
4
2
5
5
ゴール
ノード
4+4=8
5+2=7
10
2
A
D
G
0+10=10
3+6=9
0
6+3=9
6+4=10
3
3
6
3
6
4
3
C
F

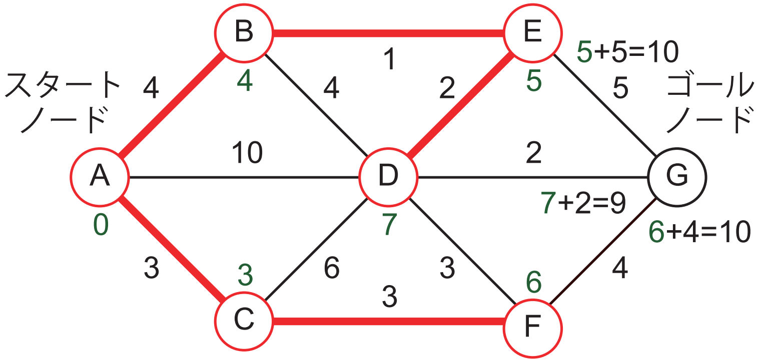
最小の経路を選ぶ

例



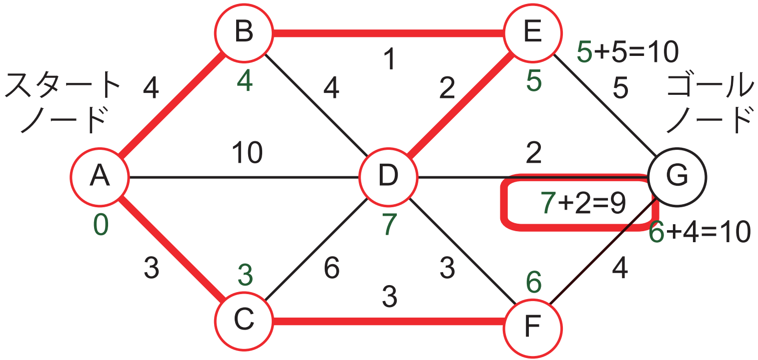
ノード D を既決にする

例



既決ノードを通り未決ノードへ至る経路の距離を計算

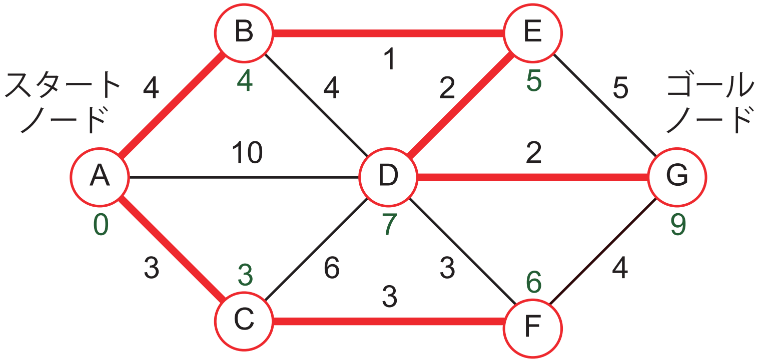
例



B
E
1
5+5=10
スタート
ノード
4
4
4
2
5
5
ゴール
ノード
A
10
D
2
G
7+2=9
0
7
6+4=10
3
3
6
3
6
4
3
C
F

最小の経路を選ぶ

例



ゴールノードを既決にする
停止

ダイクストラのアルゴリズム

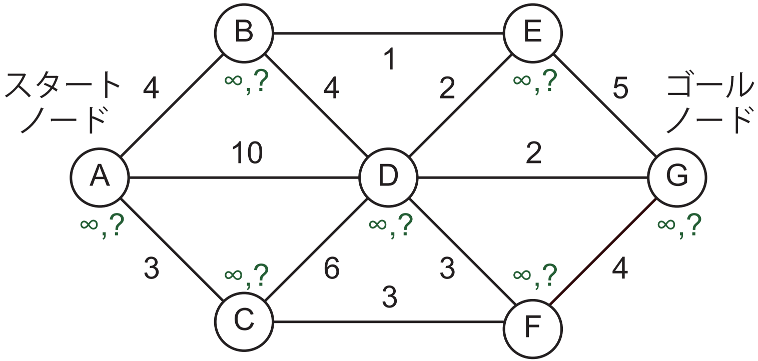
距離の計算の重複を避けるためにラベルを導入する

ラベル

各ノードに付ける
距離, ノード の対

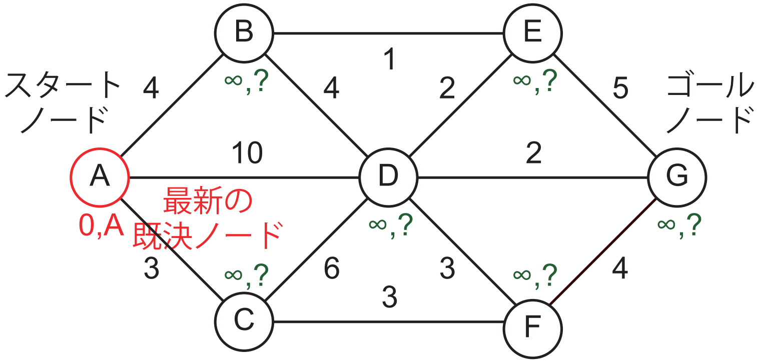
距離	これまでに判った最短距離 さらに短い距離が得られた場合は更新する
ノード	どのノードからの経路か (最短経路木における親ノード)

例



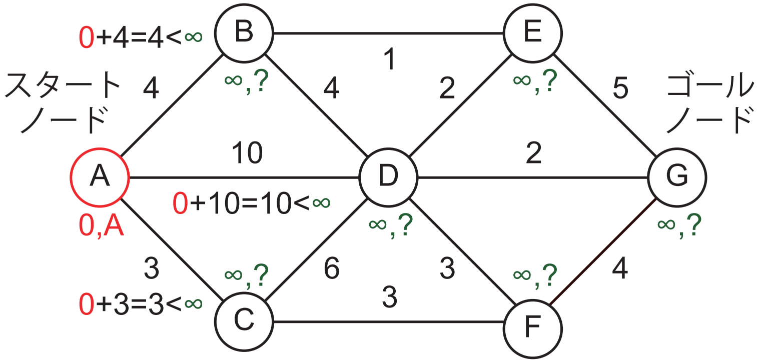
初期ラベル　距離: ∞（無限大）　ノード: ?（不明）

例



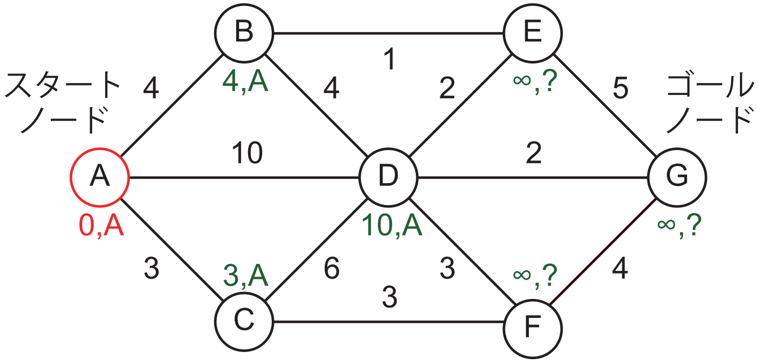
スタートノード A にラベル 0,A を与える
ノード A を既決にする

例



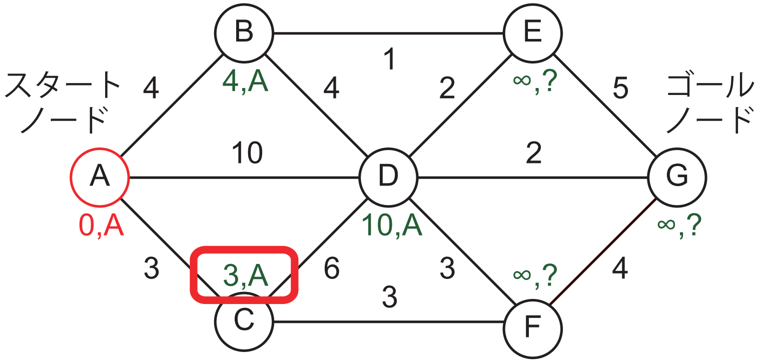
最新の既決ノードから未決ノードへの距離を計算
未決ノードのラベルの距離と比較

例



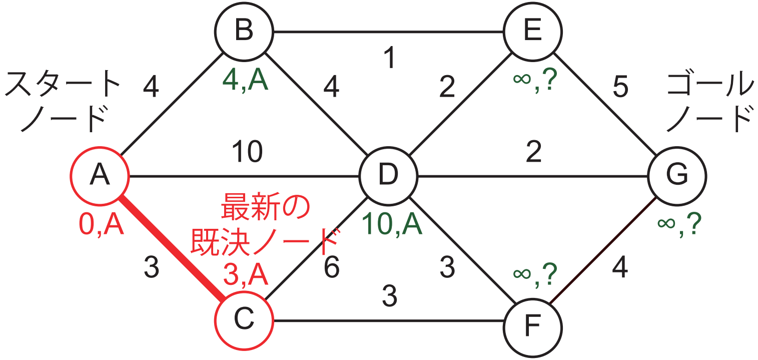
計算した距離 < ラベルの距離ならば，ラベルを更新

例



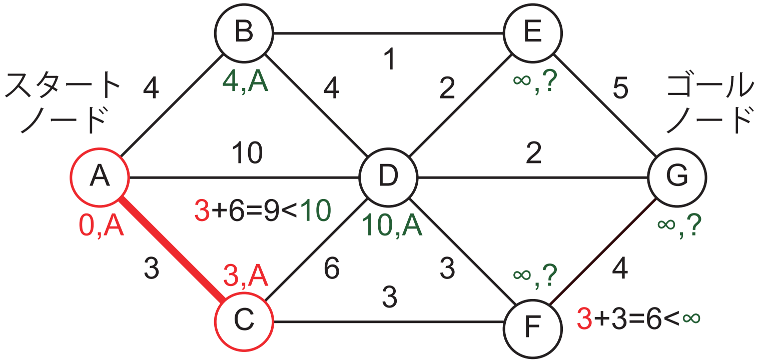
ラベルの距離が最小となる未決ノードを求める

例



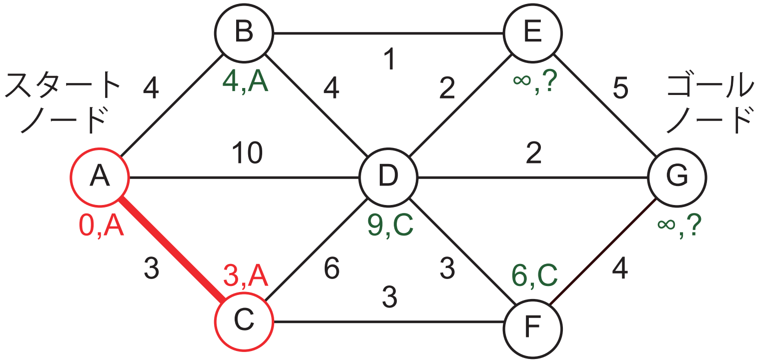
ノード C を既決にする

例



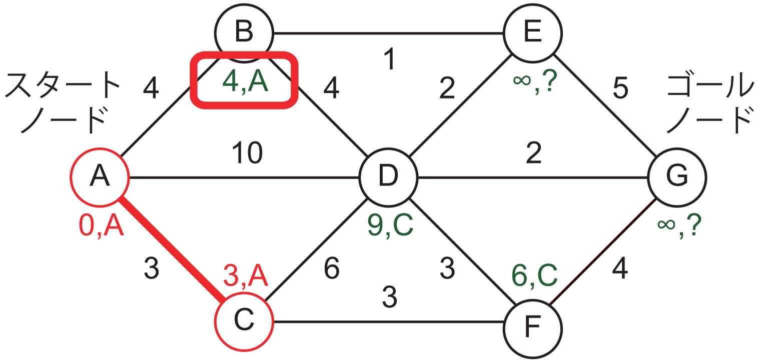
最新の既決ノードから未決ノードへの距離を計算
未決ノードのラベルの距離と比較

例



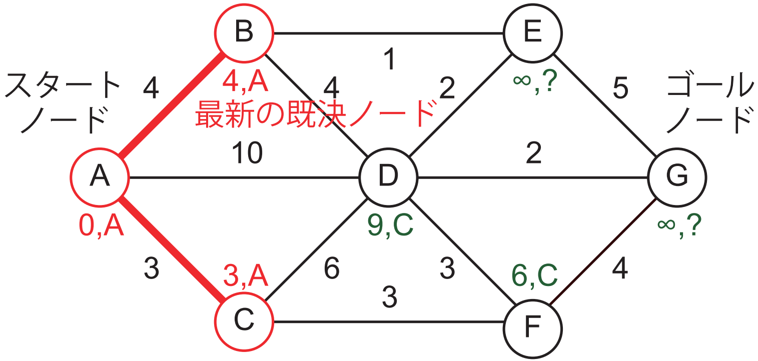
計算した距離 $<$ ラベルの距離ならば，ラベルを更新

例



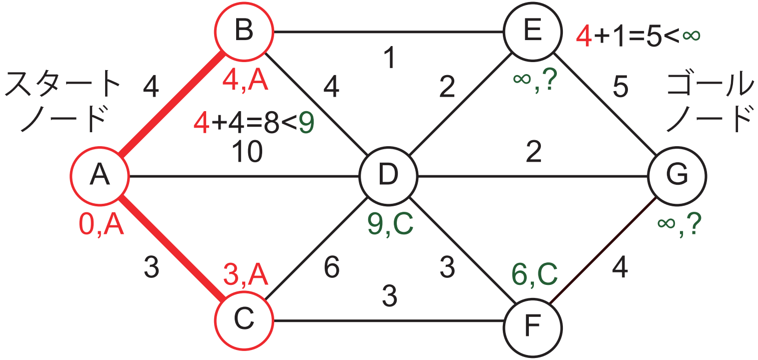
ラベルの距離が最小となる未決ノードを求める

例



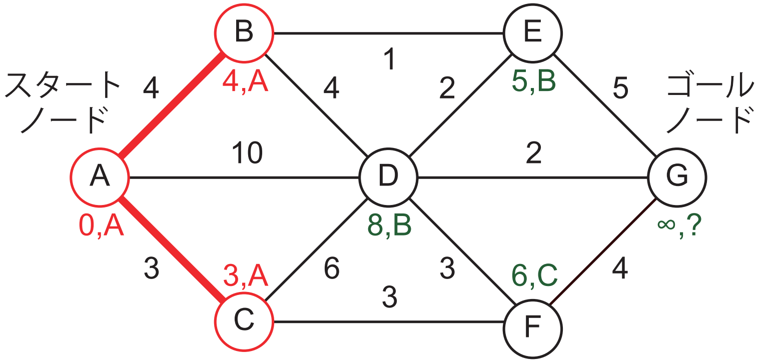
ノード B を既決にする

例



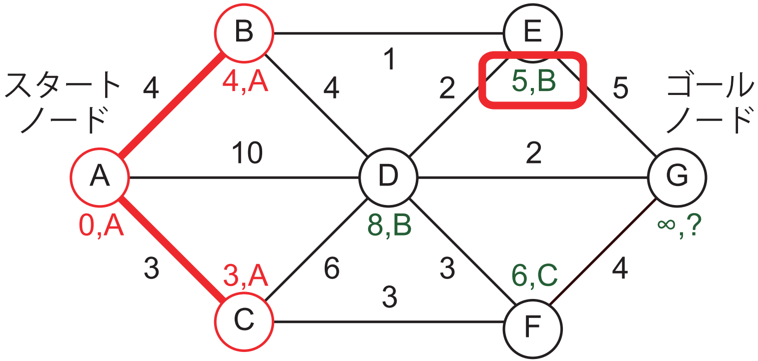
最新の既決ノードから未決ノードへの距離を計算
未決ノードのラベルの距離と比較

例



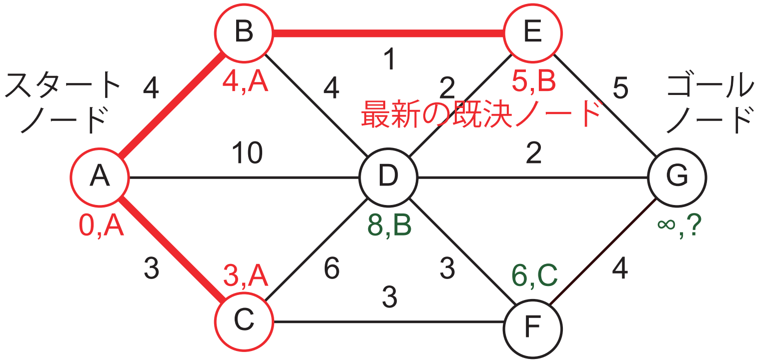
計算した距離 < ラベルの距離ならば，ラベルを更新

例



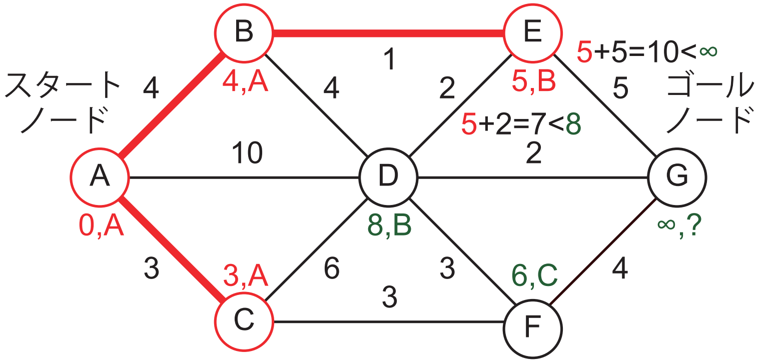
ラベルの距離が最小となる未決ノードを求める

例



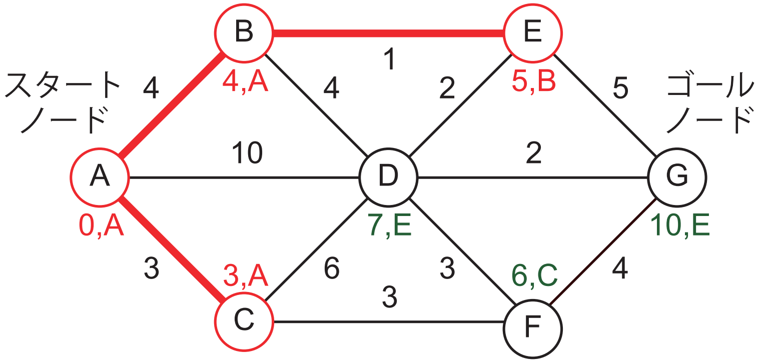
ノード E を既決にする

例



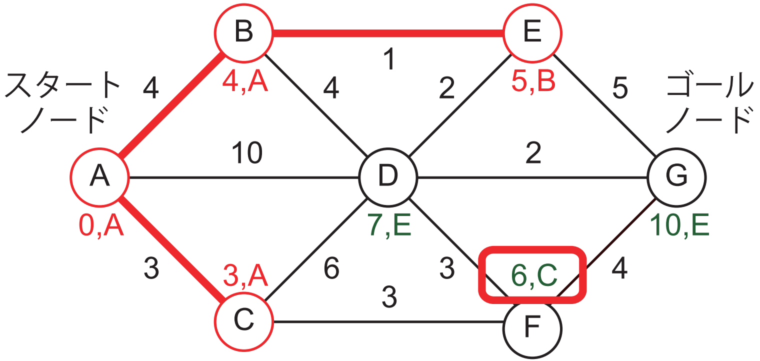
最新の既決ノードから未決ノードへの距離を計算
未決ノードのラベルの距離と比較

例



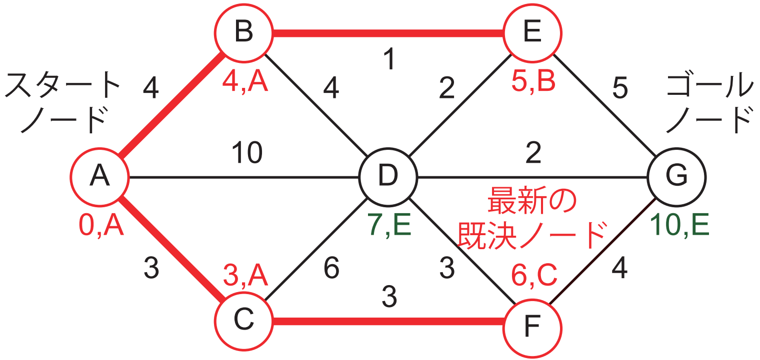
計算した距離 < ラベルの距離ならば，ラベルを更新

例



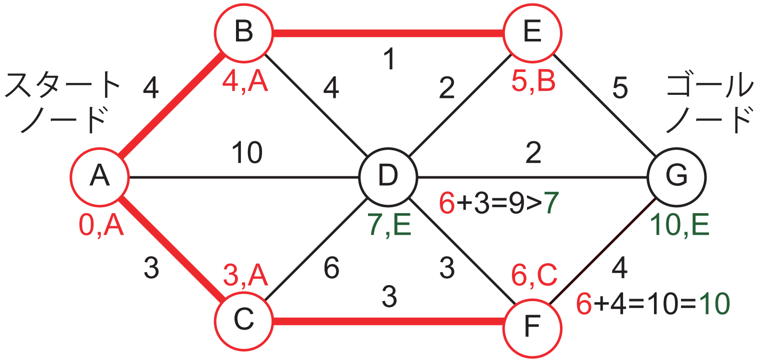
ラベルの距離が最小となる未決ノードを求める

例



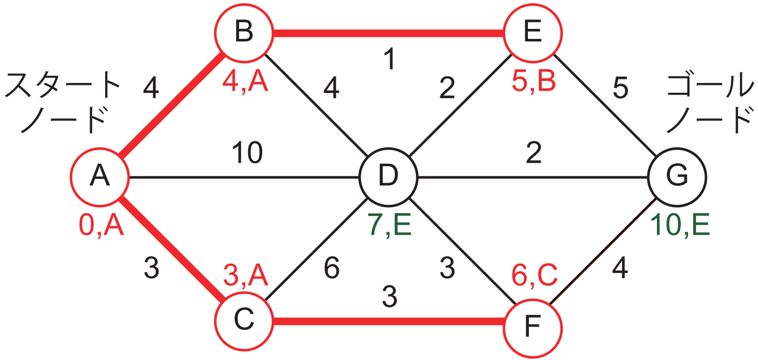
ノード F を既決にする

例



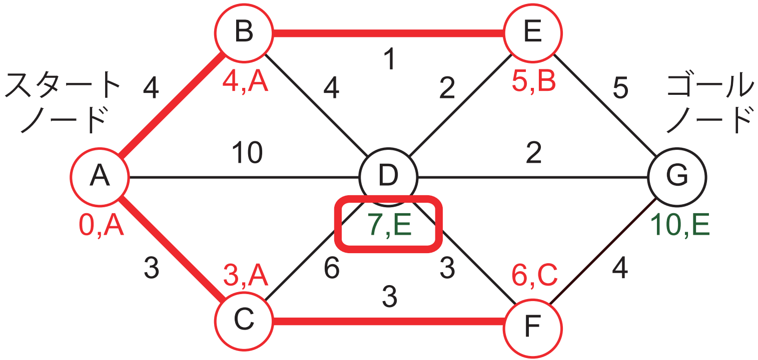
最新の既決ノードから未決ノードへの距離を計算
未決ノードのラベルの距離と比較

例



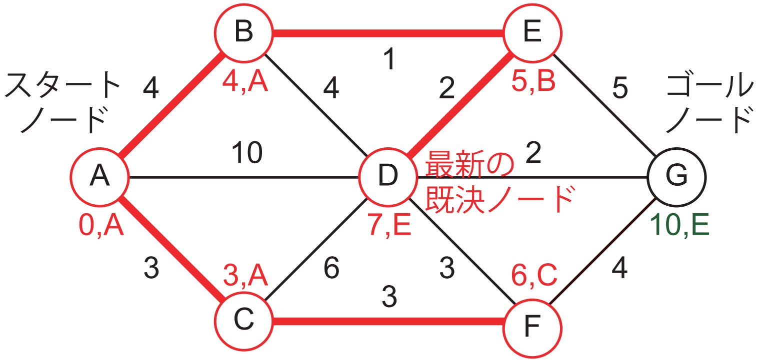
計算した距離 < ラベルの距離ならば，ラベルを更新
（ここでは更新するラベルはない）

例



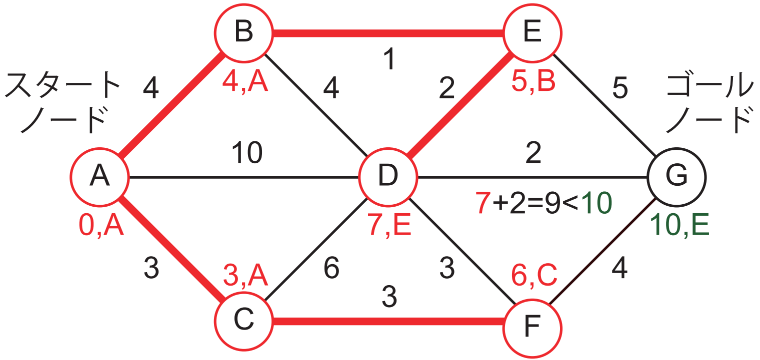
ラベルの距離が最小となる未決ノードを求める

例



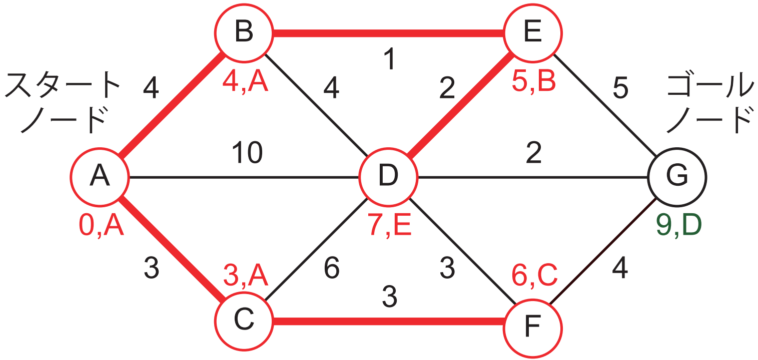
ノード D を既決にする

例



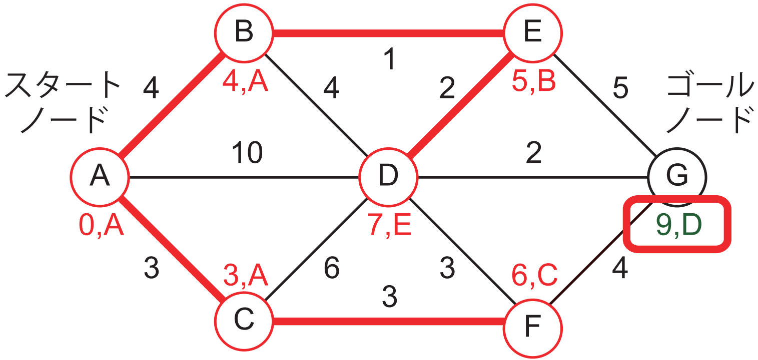
最新の既決ノードから未決ノードへの距離を計算
未決ノードのラベルの距離と比較

例



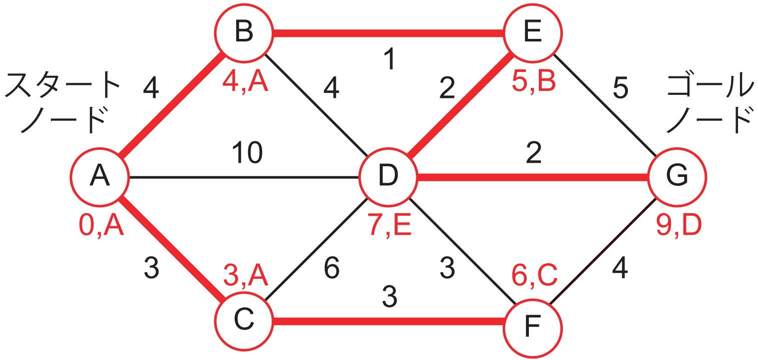
計算した距離 < ラベルの距離ならば，ラベルを更新

例



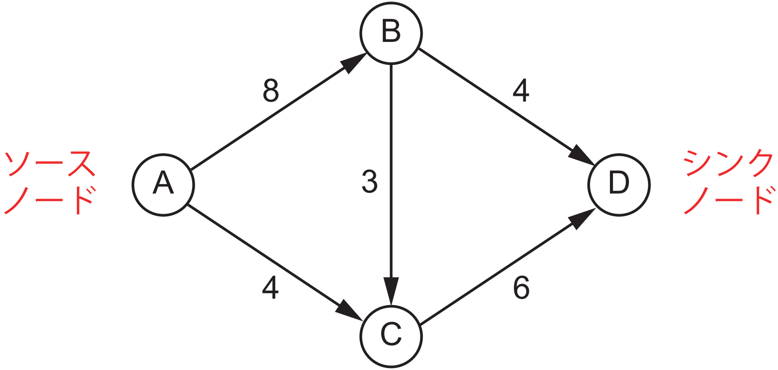
ラベルの距離が最小となる未決ノードを求める

例



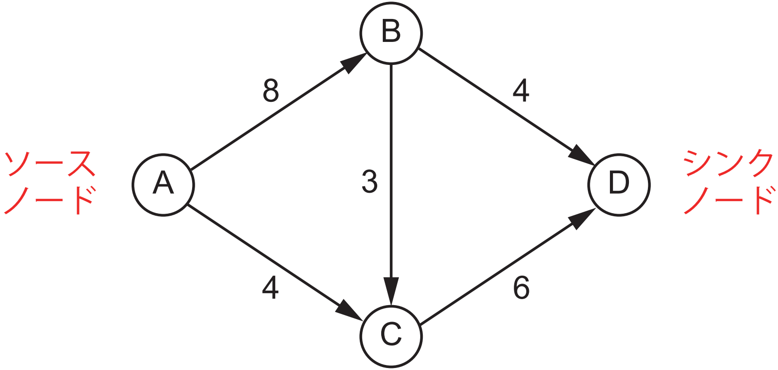
ノード G を既決にする
停止

最大フロー問題



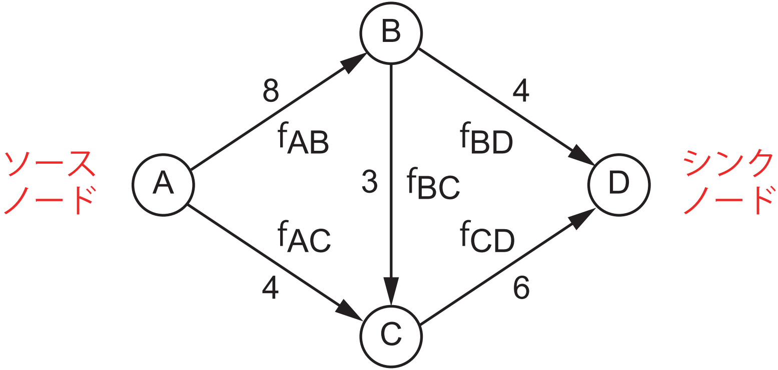
ソースノードからシンクノードに流れが生じる．
エッジに沿って一方向に流れる（有向グラフ）．

最大フロー問題



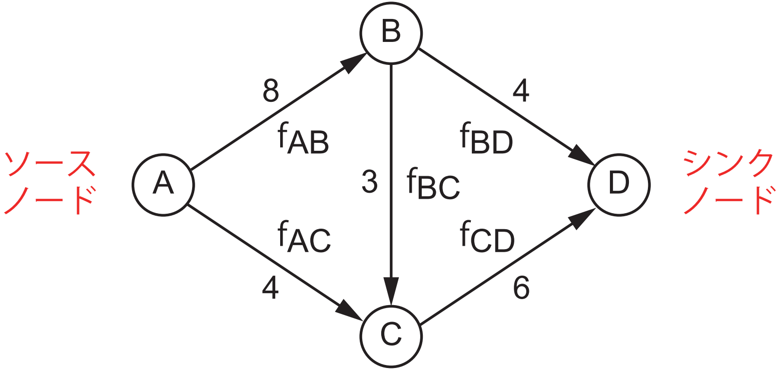
各エッジには流量の上限がある（容量）.
ソースノードからシンクノードへの最大流量を求める.
（電力，水道，通信，···）

最大フロー問題



ノード P から Q への流量を f_{PQ} と表す.

最大フロー問題

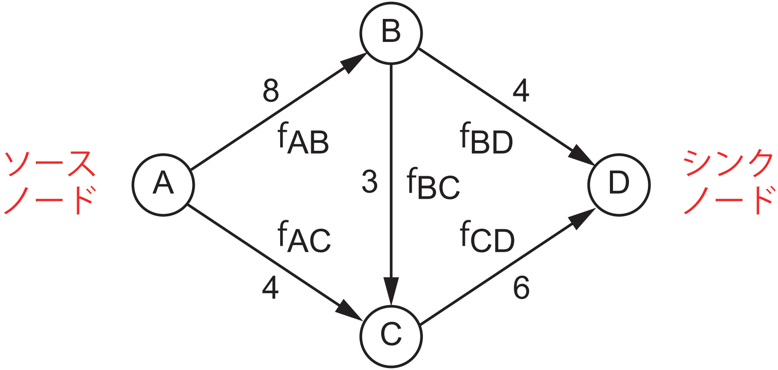


途中のノードでは，流入量と流出量が等しい．

ノード B　$f_{\mathrm{AB}} = f_{\mathrm{BC}} + f_{\mathrm{BD}}$

ノード C　$f_{\mathrm{AC}} + f_{\mathrm{BC}} = f_{\mathrm{CD}}$

最大フロー問題

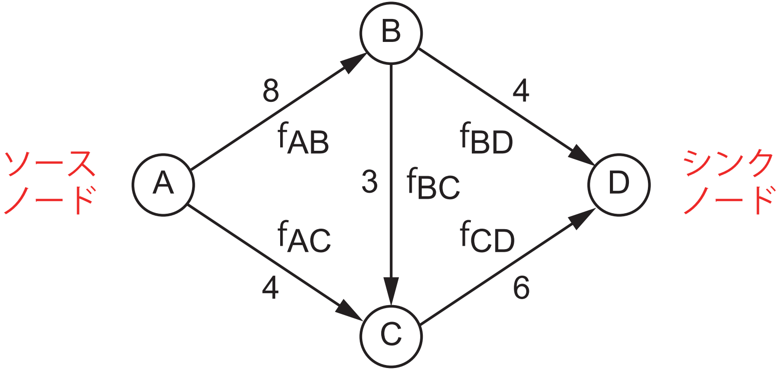


容量制限

$0 \le f_{\mathrm{AB}} \le 8$ $0 \le f_{\mathrm{AC}} \le 4$ $0 \le f_{\mathrm{BC}} \le 3$

$0 \le f_{\mathrm{BD}} \le 4$ $0 \le f_{\mathrm{CD}} \le 6$

最大フロー問題



流量 flow $= f_{\mathrm{BD}} + f_{\mathrm{CD}}$

最大フロー問題

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \text{flow} = f_{\mathrm{BD}} + f_{\mathrm{CD}} \\
\text{subject to} \quad & f_{\mathrm{AB}} - f_{\mathrm{BC}} - f_{\mathrm{BD}} = 0 \\
& f_{\mathrm{AC}} + f_{\mathrm{BC}} - f_{\mathrm{CD}} = 0 \\
& 0 \le f_{\mathrm{AB}} \le 8 \\
& 0 \le f_{\mathrm{AC}} \le 4 \\
& 0 \le f_{\mathrm{BC}} \le 3 \\
& 0 \le f_{\mathrm{BD}} \le 4 \\
& 0 \le f_{\mathrm{CD}} \le 6
\end{aligned}
$$

最大フロー問題

変数ベクトルを導入

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} f_{\mathrm{AB}} \\ f_{\mathrm{AC}} \\ f_{\mathrm{BC}} \\ f_{\mathrm{BD}} \\ f_{\mathrm{CD}} \end{bmatrix}$$

flow を最大化 $\equiv$ $-$flow を最小化

$$\text{minimize} \quad -\text{flow} = -f_{\mathrm{BD}} - f_{\mathrm{CD}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最大フロー問題

$$f_{\mathrm{AB}} - f_{\mathrm{BC}} - f_{\mathrm{BD}} = 0$$
$$f_{\mathrm{AC}} + f_{\mathrm{BC}} - f_{\mathrm{CD}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$A_{eq}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{eq}$ 線形条件

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

最大フロー問題

$$0 \leq f_{\mathrm{AB}} \leq 8$$
$$0 \leq f_{\mathrm{AC}} \leq 4$$
$$0 \leq f_{\mathrm{BC}} \leq 3$$
$$0 \leq f_{\mathrm{BD}} \leq 4$$
$$0 \leq f_{\mathrm{CD}} \leq 6$$
$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{l}_b \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}_b$ 下限 (lower bound) と上限 (upper bound)

$$\boldsymbol{l}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_b = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

最大フロー問題

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & A_{eq}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{eq} \\
& \boldsymbol{l}_b \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}_b
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

目的関数と制約式がすべて線形

$$\Downarrow$$

線形計画問題（linear programming，略して LP）
MATLAB の `linprog` を用いて解くことができる

最大フロー問題

```
[x,fmin] = linprog(c, Aineq,bineq, Aeq,beq, lb,ub)
```

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A_{ineq}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_{ineq} \\ & A_{eq}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{eq} \\ & \boldsymbol{l}_b \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}_b \end{aligned}$$

を解く．

maximize g は minimize $f = -g$ とする．
不等式制約がない場合は `Aineq = []`，`bineq = []` とする．
等式制約がない場合は `Aeq = []`，`beq = []` とする．
上限や下限の指定がない場合は `lb = []` あるいは `ub = []` とする．

最大フロー問題

ファイル max_flow_LP.m

```
% 目的関数
c = [ 0;
      0;
      0;
     -1;
     -1 ];
% 線形条件
Aeq = [ 1, 0, -1, -1,  0;
        0, 1,  1,  0, -1 ];
beq = [ 0;
        0 ];
```

最大フロー問題

ファイル `max_flow_LP.m`

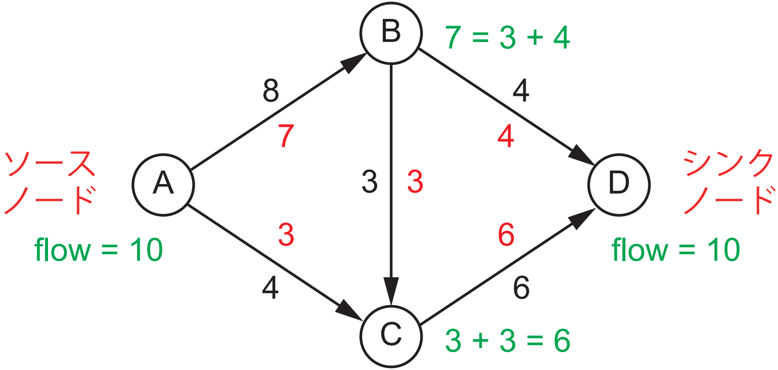
```
% 下限と上限
lb = zeros(5,1);
ub = [ 8;
       4;
       3;
       4;
       6 ];

% 線形計画法
[x,fmin] = linprog(c, [],[], Aeq,beq, lb,ub);
x
flow = -fmin;
flow
```

最大フロー問題

実行結果

```
>> max_flow_LP

最適解が見つかりました。

x =
     7
     3
     3
     4
     6

flow =
    10

>>
```

最大フロー問題



$$
\begin{bmatrix} f_{\mathrm{AB}} \\ f_{\mathrm{AC}} \\ f_{\mathrm{BC}} \\ f_{\mathrm{BD}} \\ f_{\mathrm{CD}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

最大フロー問題

下限と上限を不等式条件で表す

$$0 \leq f_{AB} \leq 8 \rightarrow -f_{AB} \leq 0, f_{AB} \leq 8$$

$$0 \leq f_{AC} \leq 4 \rightarrow -f_{AC} \leq 0, f_{AC} \leq 4$$

$$\cdots$$

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\mathrm{AB}} \\ f_{\mathrm{AC}} \\ f_{\mathrm{BC}} \\ f_{\mathrm{BD}} \\ f_{\mathrm{CD}} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

最大フロー問題

ファイル max_flow_LP_2.m

```
% 線形不等式
Aineq = [ -eye(5); eye(5) ];
bineq = [ zeros(5,1); 8; 4; 3; 4; 6 ];

% 線形計画法
[x,fmin] = linprog(c, Aineq,bineq, Aeq,beq, [],[]);
x
flow = -fmin;
flow
```

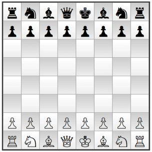
最大フロー問題

実行結果

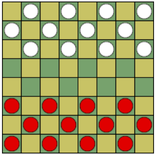
```
>> max_flow_LP_2

最適解が見つかりました。

x =
     7
     3
     3
     4
     6

flow =
    10

>>
```

歴史

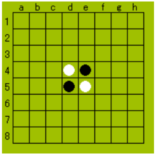
1949　クロード・シャノン
　　　「チェスをするコンピュータのプログラミング」
1996　ディープ・ブルー (コンピュータ) 1 勝
　　　ガルリ・カスパロフ 3 勝　2 引き分け
2007　チェッカーの完全解析 (引き分け)
2008　6×6 リバーシの完全解析 (後手必勝)



チェス



チェッカー



リバーシ
(オセロ)

叡王戦/電王戦

叡王戦で優勝した棋士がコンピュータプログラムと対戦

2016 年

コンピュータ 2 勝 0 敗

2017 年

名人がコンピュータと対局
コンピュータ 2 勝 0 敗

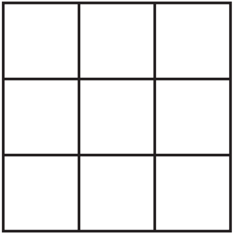
囲碁

2015 年　アルファ碁がプロ棋士（二段）に勝利
2016 年　アルファ碁がプロ棋士（九段）に勝利
(世界戦優勝経験棋士)

モンテカルロ探索と深層学習を使用

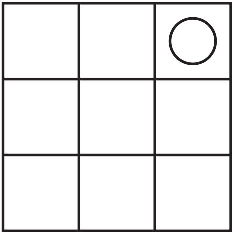
ゲーム

三目並べ



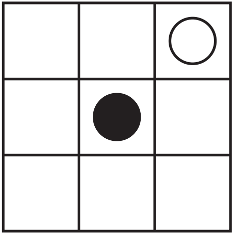
ゲーム

三目並べ



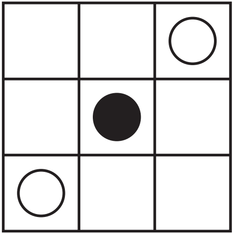
ゲーム

三目並べ



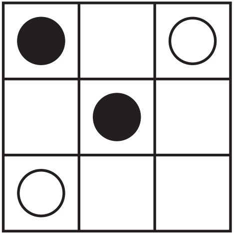
ゲーム

三目並べ



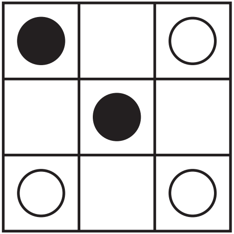
ゲーム

三目並べ



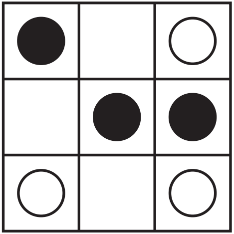
ゲーム

三目並べ



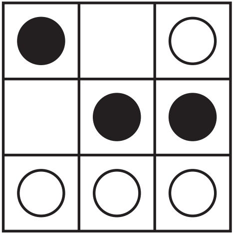
ゲーム

三目並べ



ゲーム

三目並べ



ゲーム

三目並べ，五目並べ，囲碁，将棋，
チェス，チェッカー，リバーシ（オセロ)

二人	two-person	
零和	zero-sum	
有限	finite	ゲーム
確定	deterministic	
完全情報	perfect information	

コントラクトブリッジ	確定，不完全情報
バックギャモン	不確定，完全情報，
マージャン	確定，不完全情報，多人数（四人）
ダイヤモンドゲーム	多人数（三人）

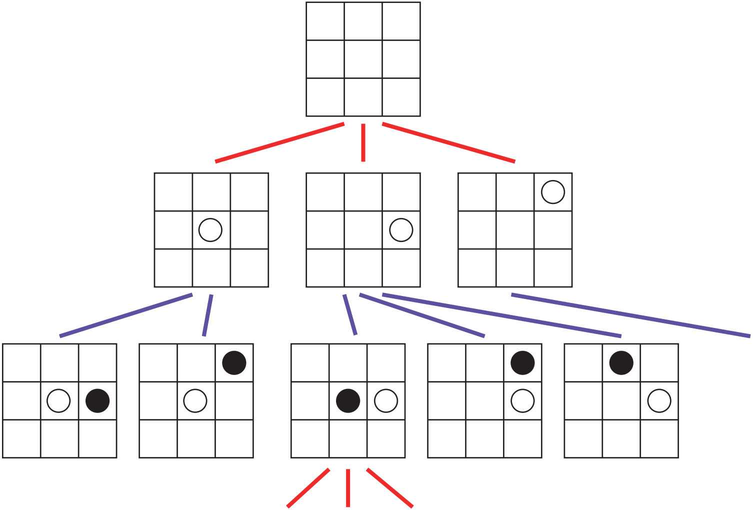
ゲーム

二人	two-person	
零和	zero-sum	
有限	finite	ゲーム
確定	deterministic	
完全情報	perfect information	

$$\Downarrow$$

双方のプレーヤーが最善手
$\Longrightarrow$ 先手必勝，後手必勝，引き分け

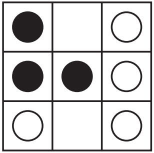
ゲーム木



局面の評価

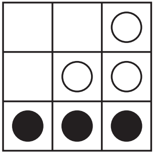
局面に数値を対応させる

先手が勝ち



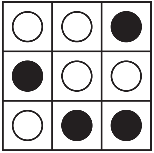
$+1$

後手が勝ち



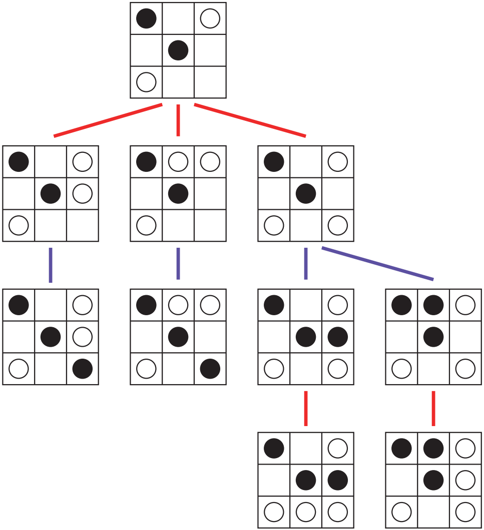
-1

引き分け

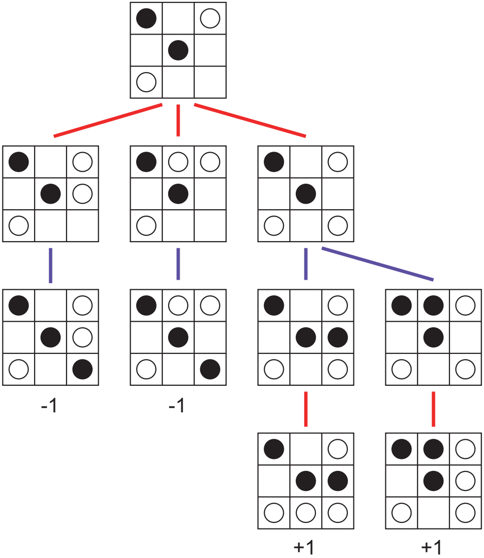


0

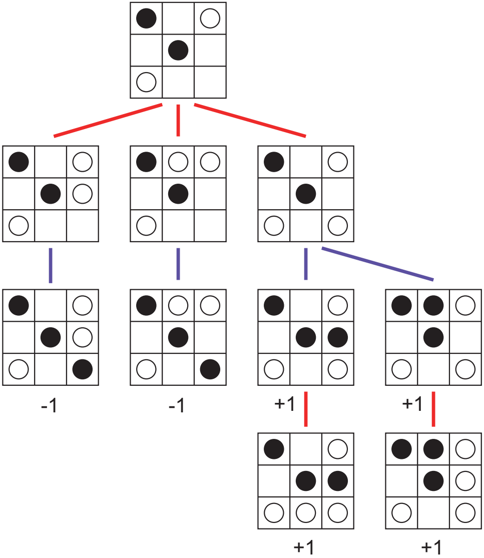
局面の評価



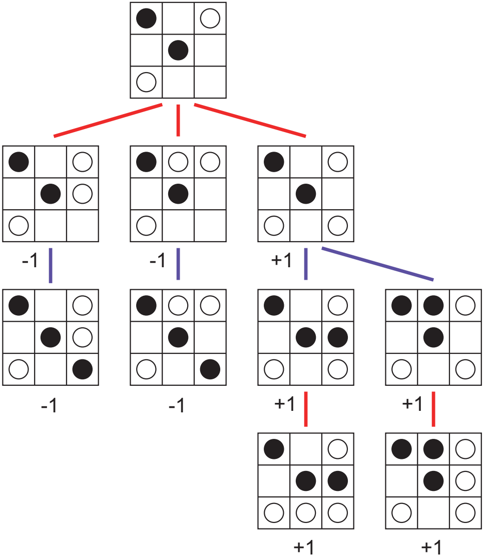
局面の評価



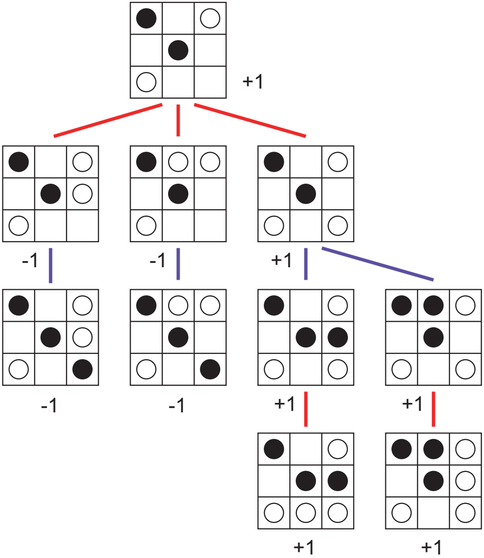
局面の評価



局面の評価



局面の評価



局面の評価

局面に数値を対応させる

先手が有利　正の数 $(+)$
後手が有利　負の数 $(-)$

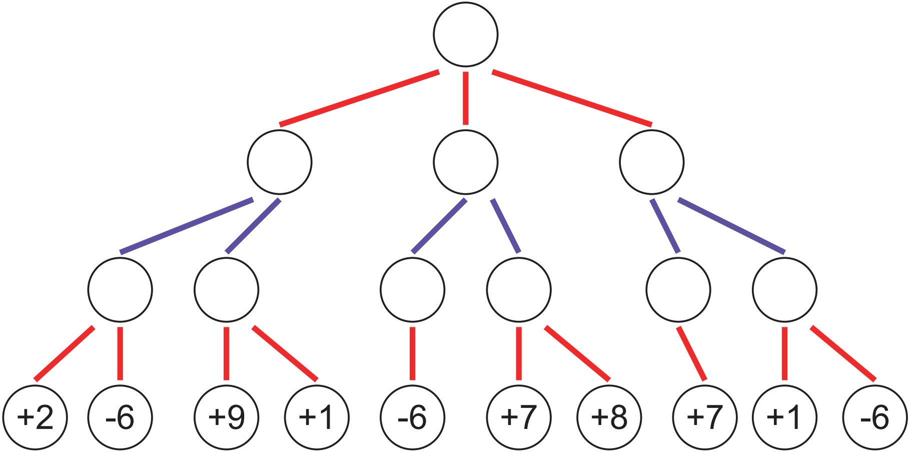
将棋の場合

- 駒の損得
  (e.g. 飛 19 点，角 17 点，金 11 点，銀 10 点，$\cdots$)
- 駒の配置 (駒の接続　玉の防御)
- $\cdots$

複数の項目を評価し，それらから一つの評価値を計算

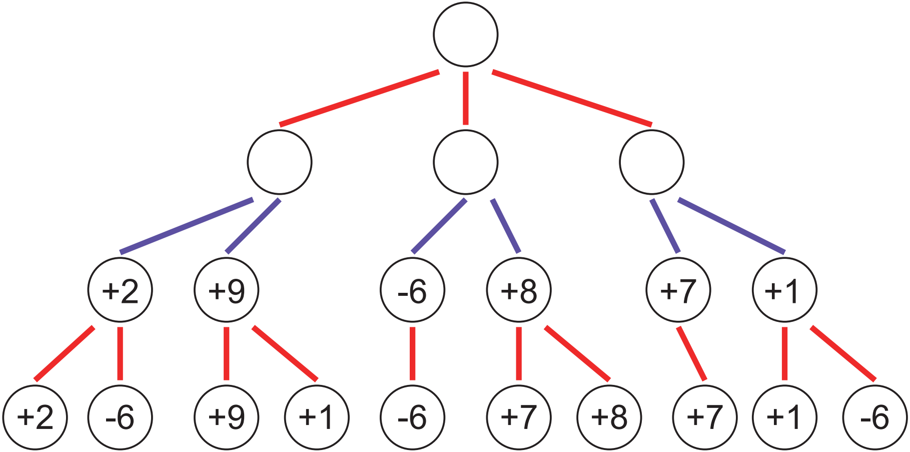
局面の評価

先手の番



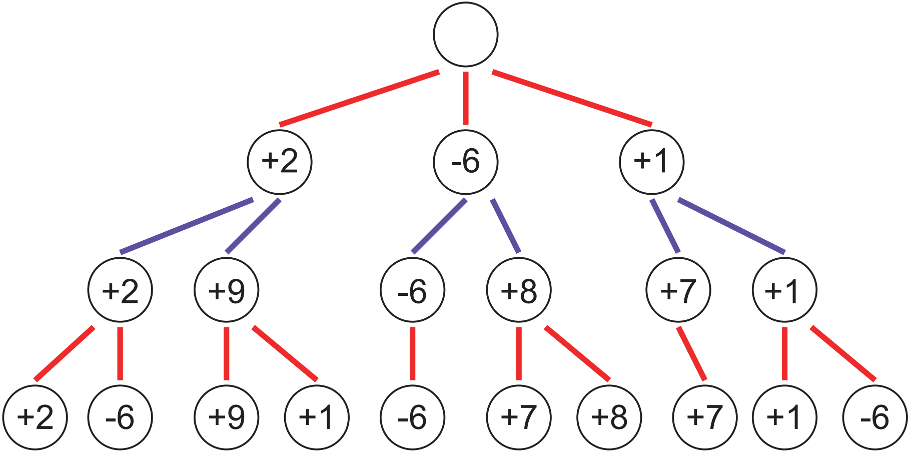
局面の評価

先手の番



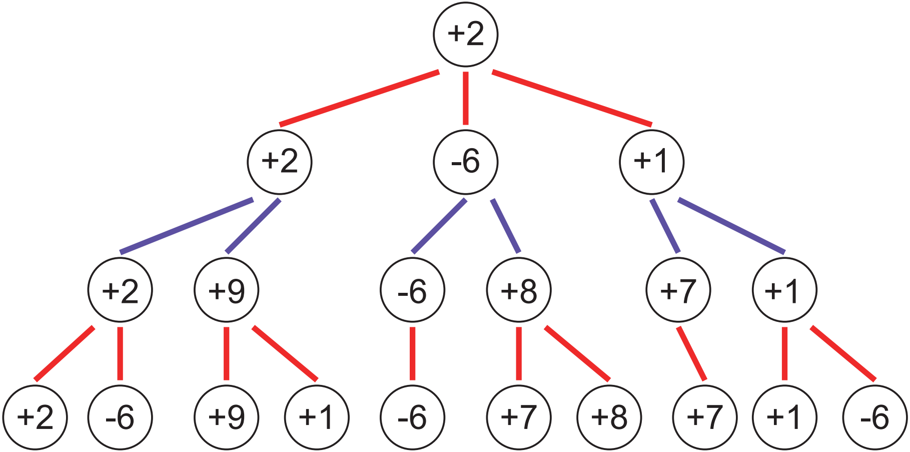
局面の評価

先手の番



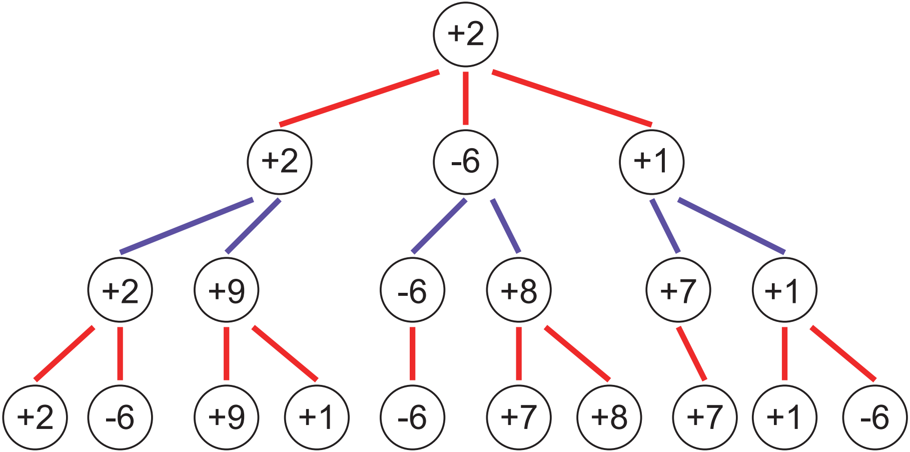
局面の評価

先手の番



局面の評価

先手の番

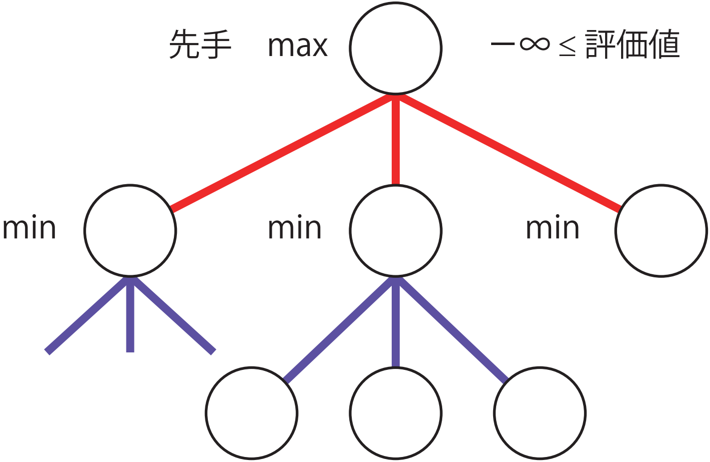


ミニマックス (minimax) 法

ミニマックス法

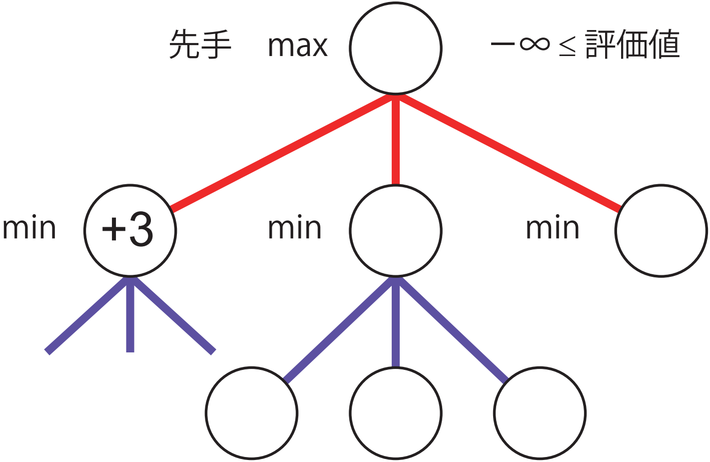
```
score = minimax (node, depth)
    if (depth == 0) return (nodeの評価値);
    if node が先手の局面
        max = -∞
        foreach node のすべての子ノード child
            評価値 = minimax(child, depth-1);
            if 評価値 > max ならば max = 評価値;
        return max;
    if node が後手の局面
        min = ∞
        foreach node のすべての子ノード child
            評価値 = minimax(child, depth-1);
            if 評価値 < min ならば min = 評価値;
        return min;
end
```

アルファベータ法



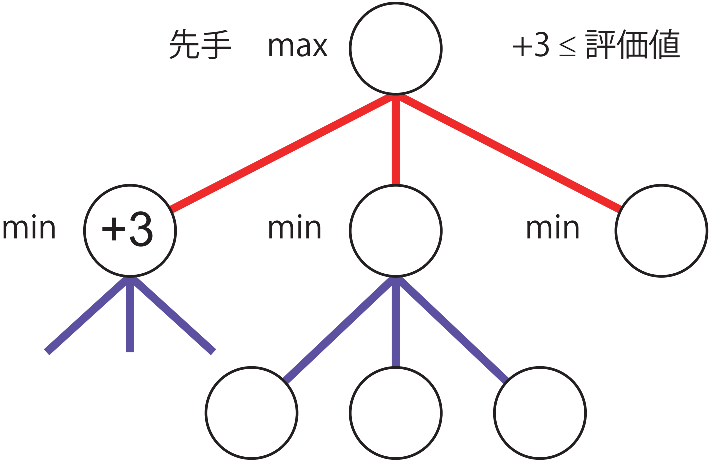
先手番で評価値を求める

アルファベータ法



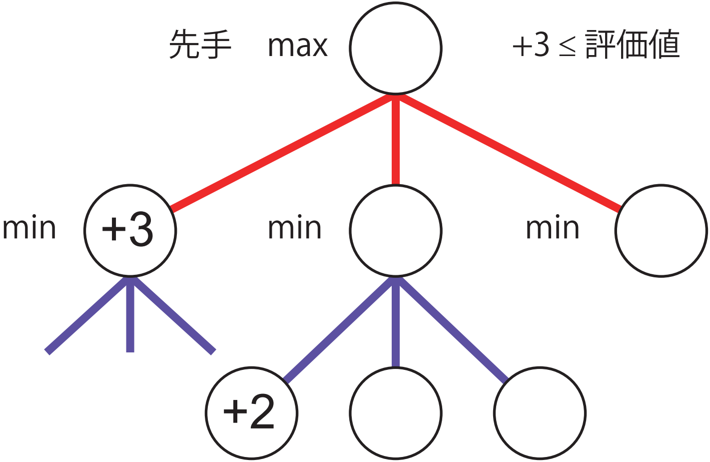
一つめの子ノードで評価値 $+3$ を得た

アルファベータ法



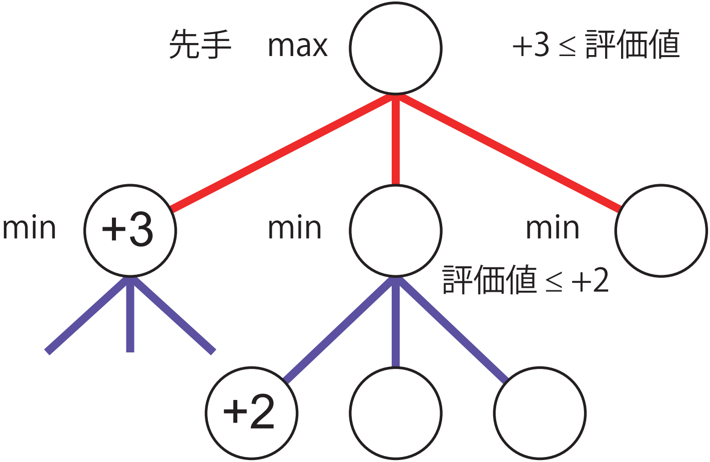
親ノードの評価値は $+3$ 以上（評価値の下限）

アルファベータ法



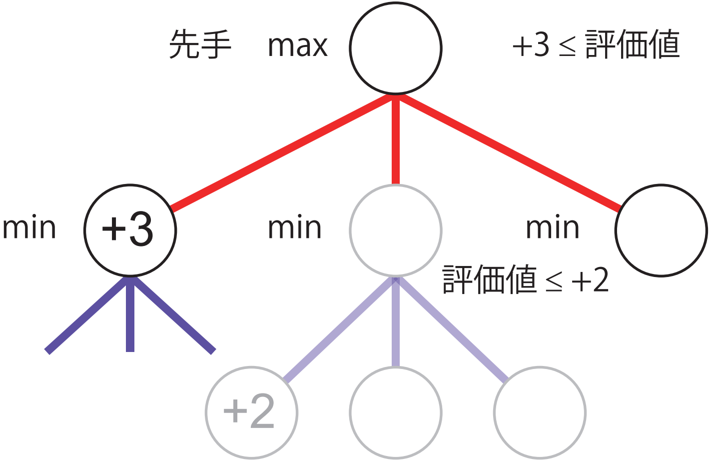
二つめの子ノードで評価値を計算．孫ノードで評価値 $+2$ を得た

アルファベータ法



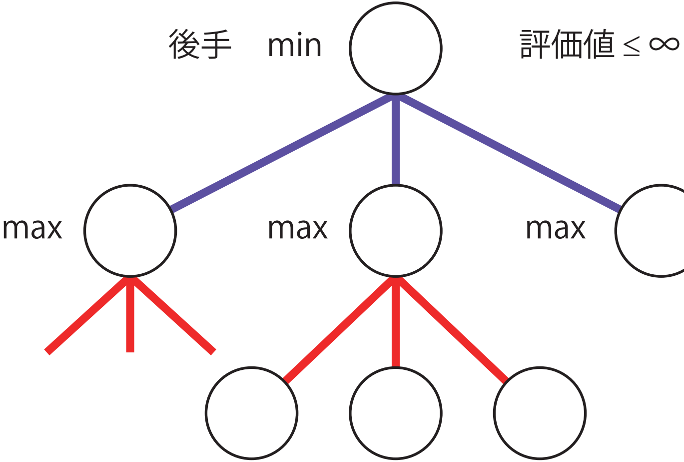
二つ目の子ノードの評価値は $+2$ 以下（評価値の上限）

アルファベータ法



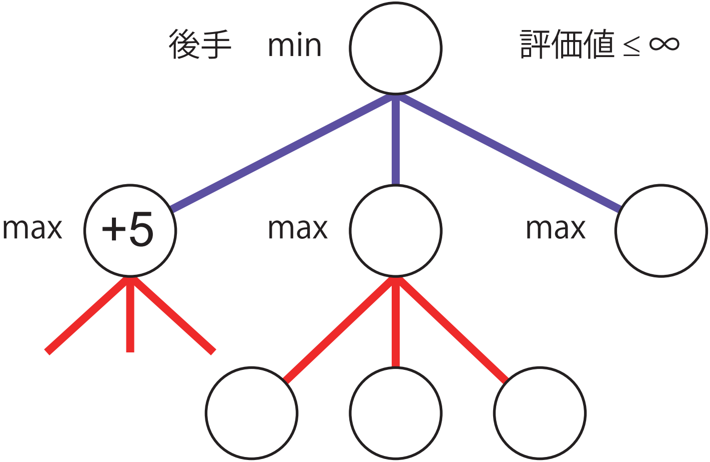
二つ目の子ノードを評価する必要はないので，カットする（ベータカット）

アルファベータ法



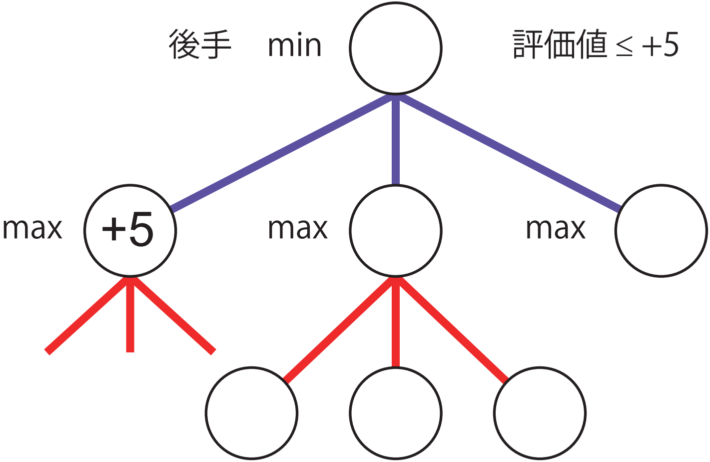
後手番で評価値を求める

アルファベータ法



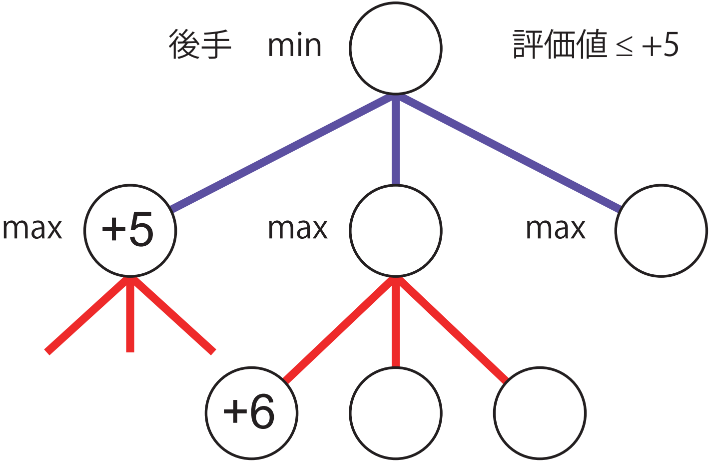
一つめの子ノードで評価値 $+5$ を得た

アルファベータ法



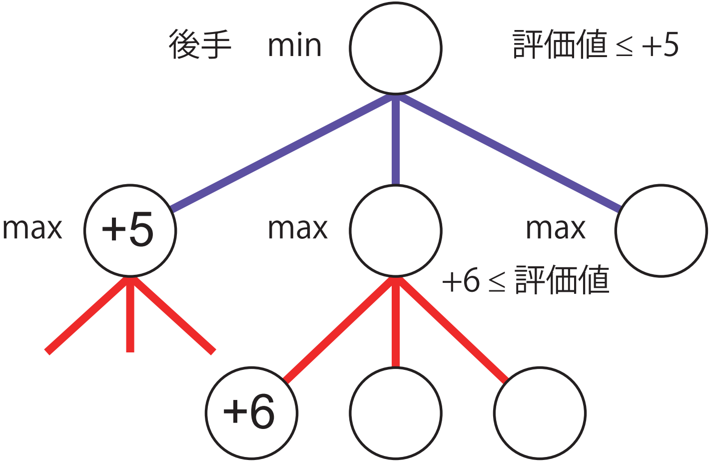
親ノードの評価値は $+5$ 以下（評価値の上限）

アルファベータ法



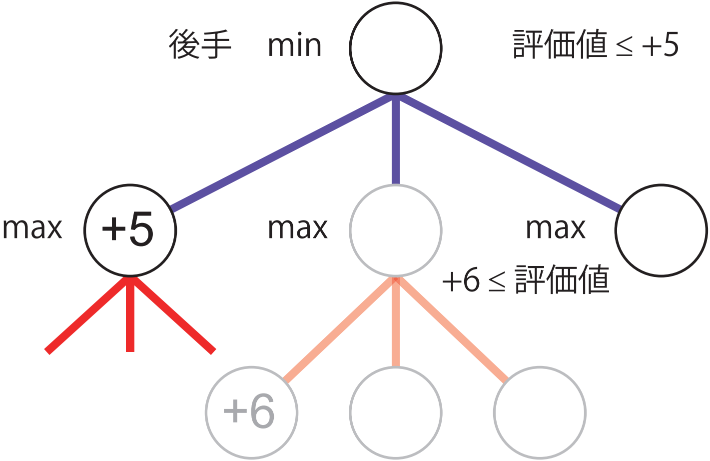
二つめの子ノードで評価値を計算．孫ノードで評価値 $+6$ を得た

アルファベータ法



二つ目の子ノードの評価値は +6 以上（評価値の下限）

アルファベータ法



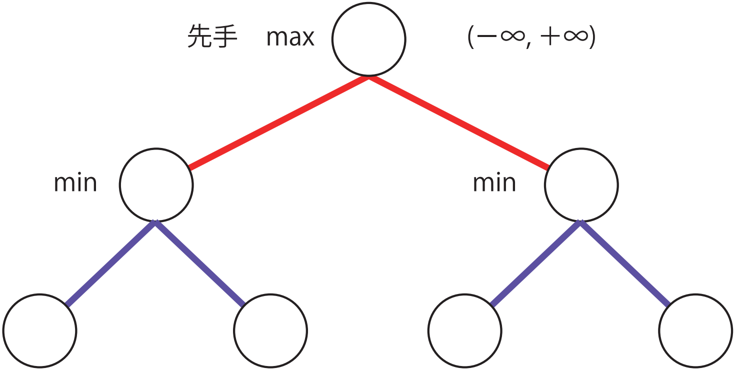
二つ目の子ノードを評価する必要はないので，カットする（アルファカット）

アルファベータ法

```
score = alphabeta (node, depth, α, β)
    if (depth == 0) return (nodeの評価値);
    if node が先手の局面
      foreach node のすべての子ノード child
        α = max (α, alphabeta(child, depth-1, α, β);
        if α ≧ β ならば break;
      return α;
    if node が後手の局面
      foreach node のすべての子ノード child
        β = min (β, alphabeta(child, depth-1, α, β);
        if α ≧ β ならば break;
      return β;
end
```

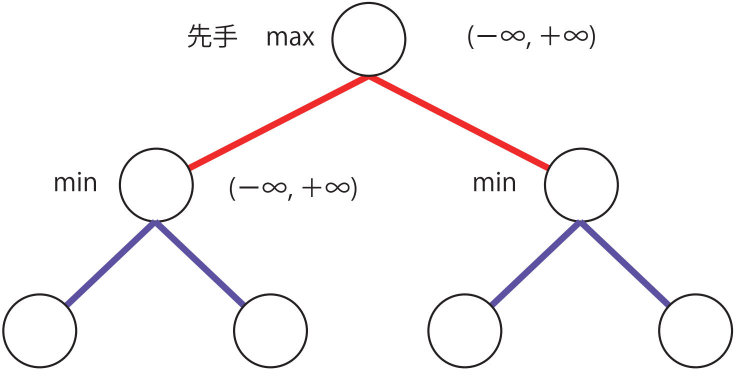
alphabeta(現在の局面, depth, $-\infty$, $+\infty$) で実行

アルファベータ法



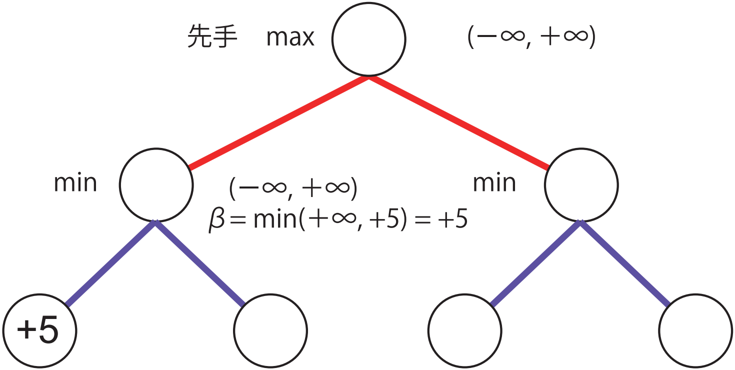
先手番で評価値を求める． $(\alpha, \beta) = (-\infty, +\infty)$

アルファベータ法



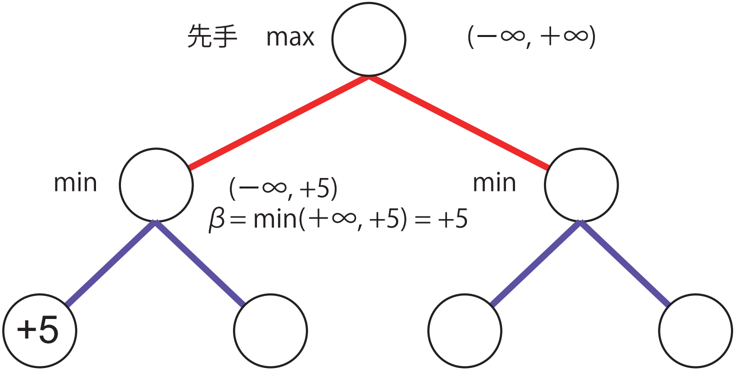
一つめの子ノードで評価値を求める

アルファベータ法



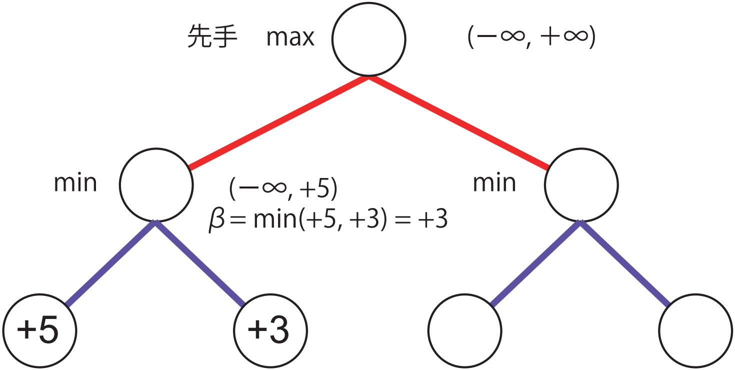
評価値 $+5$ を得た．β の値を計算

アルファベータ法



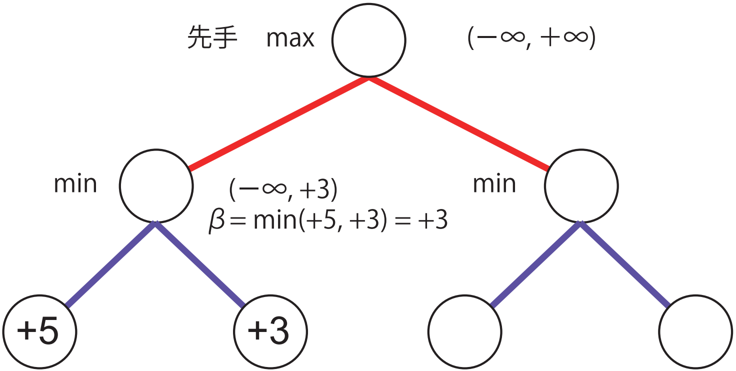
$$(\alpha, \beta) = (-\infty, +5)$$

アルファベータ法



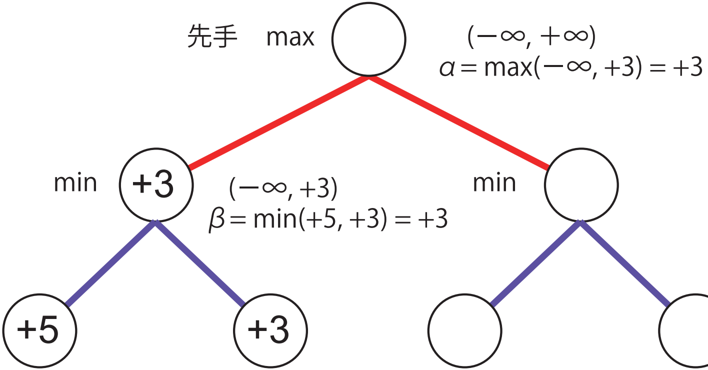
評価値 $+3$ を得た． β の値を計算

アルファベータ法



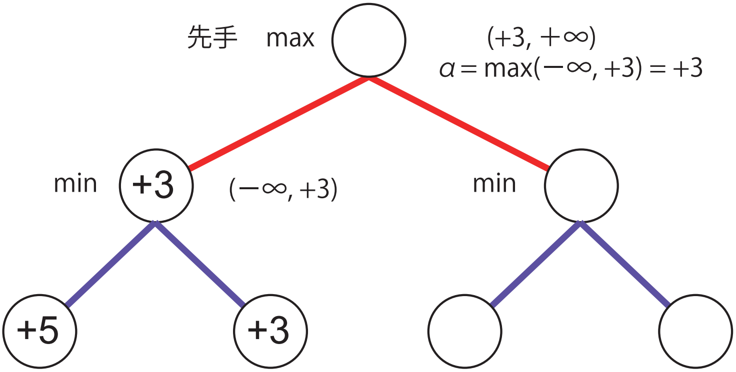
$$(\alpha, \beta) = (-\infty, +3)$$

アルファベータ法



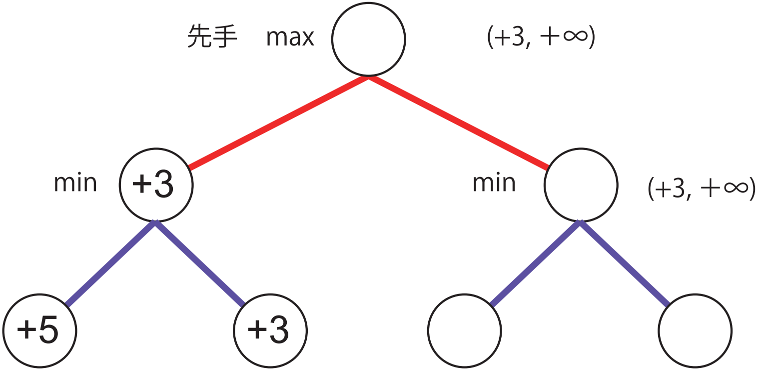
評価値 $+3$ を得た． α の値を計算

アルファベータ法



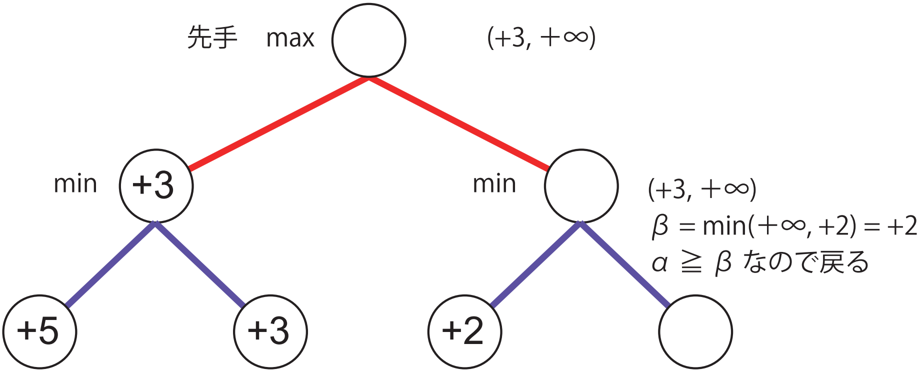
$$(\alpha, \beta) = (+3, +\infty)$$

アルファベータ法



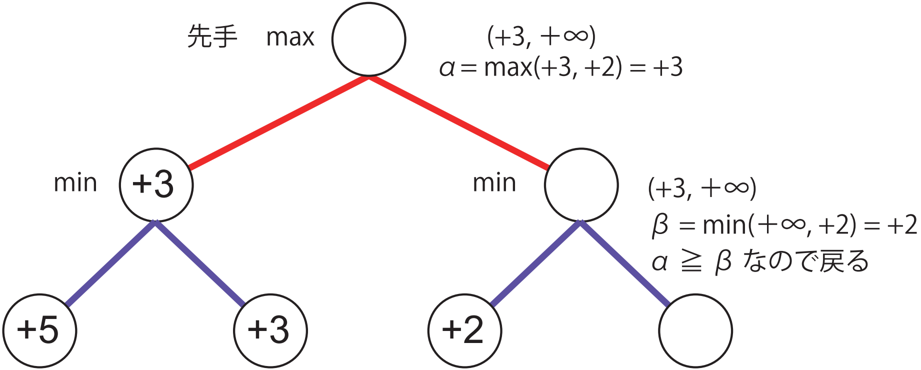
二つめの子ノードで評価値を求める

アルファベータ法



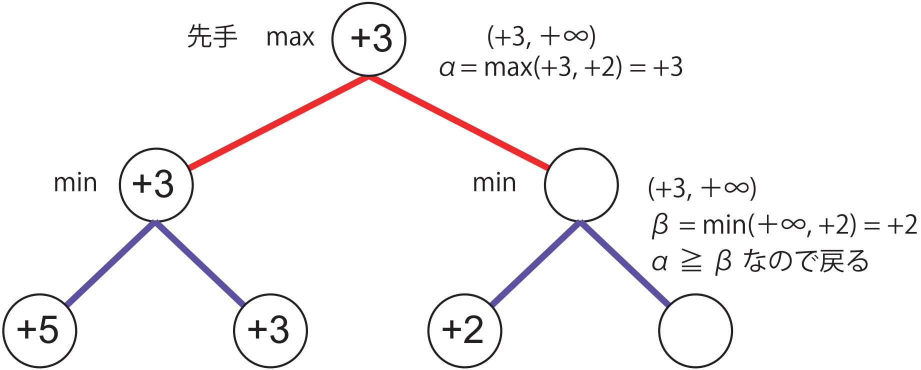
評価値 $+2$ を得た． β の値を計算． $\alpha \geq \beta$

アルファベータ法



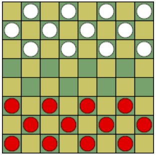
二つ目の子ノードにおける計算を打ち切る．α の値を計算

アルファベータ法

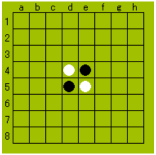


評価値 $+3$ を得た.

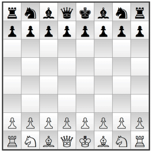
局面における場合の数



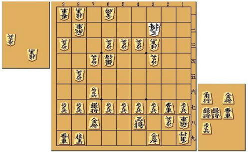
<



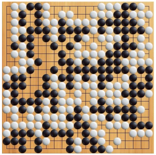
<



<



<



局面の評価

評価関数を人が試行錯誤し作成

$$\Downarrow$$

評価関数をデータから自動的に作成（学習）
評価関数をコンピュータが指した結果から自動的に作成（モンテカルロ学習）

最終的な結果（勝ち負け）を規範とする

二人零和ゲーム

プレーヤー A と B が対戦
各プレーヤーは手 P, Q を選択する.

プレーヤー A の利得

		B	
		P	Q
A	P	$+5$	-8
	Q	-2	$+5$

A が手 P, B が手 P $\rightarrow$ A が $+5$, B が -5
A が手 P, B が手 Q $\rightarrow$ A が -8, B が $+8$
A が手 Q, B が手 P $\rightarrow$ A が -2, B が $+2$
A が手 Q, B が手 Q $\rightarrow$ A が $+5$, B が -5

二人零和ゲーム

各プレーヤーは確率的に手を選ぶ

$$
\begin{array}{lcl}
\text{A が手 P を選ぶ確率 } x & \to & \text{A が手 Q を選ぶ確率 } 1-x \\
\text{B が手 P を選ぶ確率 } y & \to & \text{B が手 Q を選ぶ確率 } 1-y
\end{array}
$$

プレーヤー A の利得

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{A}} &= (+5)xy + (-8)x(1-y) \\
&\quad + (-2)(1-x)y + (+5)(1-x)(1-y)
\end{aligned}
$$

極値を計算し平衡点を求める．平衡点は鞍点 (saddle point)

$$
\frac{\partial G_{\mathrm{A}}}{\partial x} = (+5)y + (-8)(1-y) + (-2)(-1)y + (+5)(-1)(1-y) = 0
$$

$$
\frac{\partial G_{\mathrm{A}}}{\partial y} = (+5)x + (-8)x(-1) + (-2)(1-x) + (+5)(1-x)(-1) = 0
$$

$$\Downarrow$$

$$
x = 0.35, \quad y = 0.65, \quad G_{\mathrm{A}} = 0.45
$$

二人零和ゲーム

プレーヤー A の利得

		B	
		P	Q
A	P	g_{PP}	g_{PQ}
	Q	g_{QP}	g_{QQ}

平衡点における利得

$$G_{\mathrm{A}}^{*} = \frac{g_{\mathrm{PP}}g_{\mathrm{QQ}} - g_{\mathrm{PQ}}g_{\mathrm{QP}}}{g_{\mathrm{PP}} - g_{\mathrm{PQ}} - g_{\mathrm{QP}} + g_{\mathrm{QQ}}}$$

$$\Downarrow$$

公平な勝負であるための条件 $G_{\mathrm{A}}^{*} = 0$

$$g_{\mathrm{PP}}g_{\mathrm{QQ}} - g_{\mathrm{PQ}}g_{\mathrm{QP}} = 0$$

二人零和ゲーム

プレーヤー A の利得

		B	
		P	Q
A	P	$+4$	-8
	Q	-2	$+4$

$$\Downarrow$$

$$x = 0.3333, \quad y = 0.6667, \quad G_{\mathrm{A}} = 0$$

社会的ジレンマ

囚人のジレンマ
2名の囚人A, Bに検事が提案する.
2名の囚人はたがいに相談することはできない.

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	(1, 1)	(10, 0)
	自白	(0, 10)	(5, 5)

A が黙秘，B が黙秘 $\rightarrow$ A が 1 年，B が 1 年
A が黙秘，B が自白 $\rightarrow$ A が 10 年，B が 0 年（釈放）
A が自白，B が黙秘 $\rightarrow$ A が 0 年（釈放），B が 10 年
A が自白，B が自白 $\rightarrow$ A が 5 年，B が 5 年

二人非零和ゲーム（双方ともに得する/損する可能性）
$\Rightarrow$ 協調するという行動があり得る

社会的ジレンマ

囚人のジレンマ

2 名の囚人 A, B に検事が提案する.

2 名の囚人はたがいに相談することはできない.

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	(1, 1)	(10, 0)
	自白	(0, 10)	(5, 5)

A の判断

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	(1, 1)	(10, 0)
	自白	(0, 10)	(5, 5)

B が黙秘するならば，A（自分）は自白する方が有利

社会的ジレンマ

囚人のジレンマ

2 名の囚人 A, B に検事が提案する．

2 名の囚人はたがいに相談することはできない．

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	(1, 1)	(10, 0)
	自白	(0, 10)	(5, 5)

A の判断

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	(1, 1)	(10, 0)
	自白	(0, 10)	(5, 5)

B が自白するならば，A（自分）は自白する方が有利

社会的ジレンマ

囚人のジレンマ

2 名の囚人 A, B に検事が提案する.

2 名の囚人はたがいに相談することはできない.

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	(1, 1)	(10, 0)
	自白	(0, 10)	(5, 5)

A の判断

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	(1, 1)	(10, 0)
	自白	(0, 10)	(5, 5)

B の行動に関わらず，A（自分）は自白する方が有利

社会的ジレンマ

囚人のジレンマ

2 名の囚人 A, B に検事が提案する．

2 名の囚人はたがいに相談することはできない．

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	(1, 1)	(10, 0)
	自白	(0, 10)	(5, 5)

A の判断　B の行動に関わらず，自白する方が有利

B の判断　A の行動に関わらず，自白する方が有利

A, B ともに自白　(5, 5)

$\neq$

両方に有利な行動　A, B ともに黙秘　(1, 1)

社会的ジレンマ

囚人のジレンマ
2 名の囚人 A, B に検事が提案する．
2 名の囚人はたがいに相談することはできない．

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	(1, 1)	(10, 0)
	自白	(0, 10)	(5, 5)

各個人の最適な選択（ナッシュ均衡; Nash equilibrium）
(ナッシュは米国の数学者．映画「ビューティフル・マインド」)

$$\nparallel$$

全体で最適な選択（パレート最適; Paretian optimum）
（パレート (Pareto) はイタリアの社会学者．80:20 の法則）

まとめ

グラフ

ノードとエッジから構成される

最短経路問題

最短経路木
最適性原理　ダイクストラのアルゴリズム

最大フロー問題

LP 法

ゲーム

ゲーム木　ミニマックス法　アルファベータ法　二人零和ゲーム

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「グラフと経路計画」
締切：11 月 13 日（月曜）午前 1 時