目 次

1 凸錐と凸多面錐

集合 C の任意の要素 $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\alpha \boldsymbol{x} \in C, \quad \forall \alpha \geq 0 \tag{1}$$

が成り立つとき，集合 C を**錐** (cone) とよぶ．集合 C に含まれる任意の要素 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ線分上の任意の点が C に含まれるとき，集合 C は凸集合であるという．錐 C が凸集合であるとき，C を**凸錐** (convex cone) とよぶ．集合 C が凸錐であるための必要十分条件は

$$\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in C, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C \tag{2}$$

が成り立つことである．

二次元領域 (図 1) に対して，錐であるか否かを調べる．原点 O を端点とする半直線 (図 1(a))，複数の半直線から成る領域 (図 1(b))，原点 O を端点とする二本の半直線に挟まれた領域 (図 1(c), 1(d)) は錐である．一方，三角形 (図 1(e)) は錐ではない．また，半平面 (図 1(f))，全平面 (図 1(g)) は錐である．錐の内，半直線 (図 1(a))，二本の半直線に挟まれ劣角に対応する領域 (図 1(c))，半平面 (図 1(f))，全平面 (図 1(g)) は凸錐である．複数の半直線から成る領域 (図 1(b)) や二本の半直線に挟まれ優角に対応する領域 (図 1(d)) は凸錐ではない．

三次元凸錐の例を図 2 に示す．図 2(a) に示す凸錐は断面が長円，図 2(b) に示す凸錐は断面が 6 辺形である．図 2(c) に示す凸錐は直線を含む．図 2(d) に示す凸錐は二次元平面内にある．

定ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ に対して，集合

$$\mathrm{face}\{\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \,\} \triangleq \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq 0,\ (k = 1, 2, \cdots, m) \,\} \tag{3}$$

を構成する．この集合は凸錐であり，凸錐の face 形式とよぶ． ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ を，face ベクトルとよぶ．定ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l$ に対して，

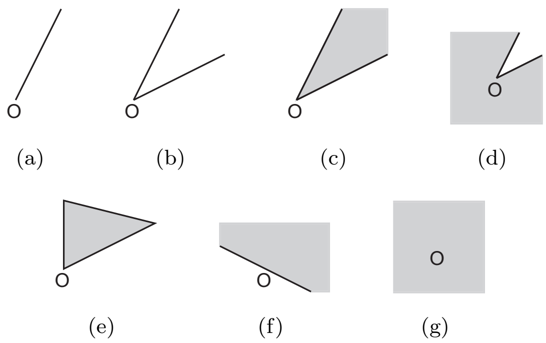


図 1: 二次元領域

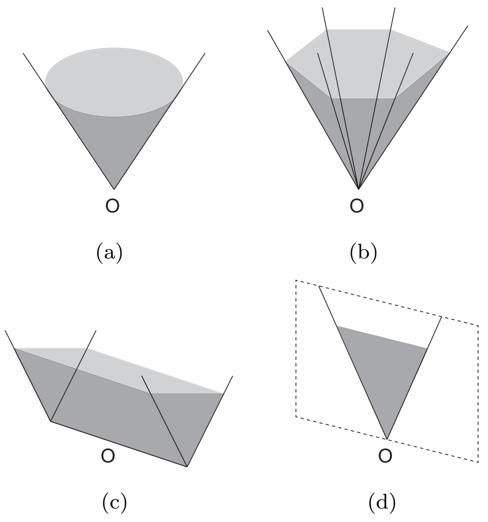


図 2: 三次元凸錐

集合

$$\mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{u}_l\,\} \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^{l} c_i \boldsymbol{u}_i \;\middle|\; c_1,\,c_2,\,\cdots,\,c_l \geq 0 \right\} \tag{4}$$

を構成する．この集合は凸錐であり，凸錐の span 形式とよぶ． ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l$ を，span ベクトルとよぶ．

図 3(a) に示すように，平面上に同一直線上にない二つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を定める．このとき，face 形式 $\mathrm{face}\{\,\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2\,\}$ は，図のグレー部分となる．ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ に直交し，$\boldsymbol{a}_2$ との内積が負となるベクトルを $\boldsymbol{u}_1$ とする．同様に，ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ に直交し，$\boldsymbol{a}_1$ との内積が負となるベクトルを $\boldsymbol{u}_2$ とする．このとき凸錐は，$\mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2\,\}$ と表される．すなわち

$$\mathrm{face}\{\,\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2\,\} = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2\,\}$$

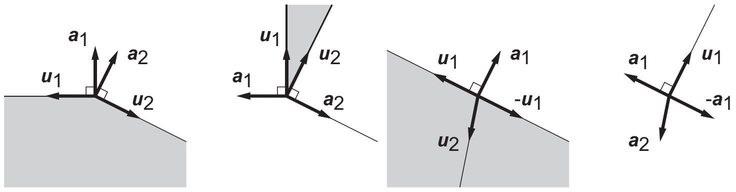
である．図 3(a) における span ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を，face ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ とみなすと，図 3(b) に示す凸錐を得る．この凸錐における span ベクトルは，図 3(a) における face ベクトルで与えられ，上式が成り立つ．

図 3(c) に示すように，一個の face ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ に対応する凸錐は，$\boldsymbol{a}_1$ に直交する直線を含む．直線に含まれるベクトル $\boldsymbol{u}_1$ と，face ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ との内積が負となるベクトル $\boldsymbol{u}_2$ を選ぶ．このとき，凸錐は，$\mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1,\,-\boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2\,\}$ と表される．すなわち

$$\mathrm{face}\{\,\boldsymbol{a}_1\,\} = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1,\,-\boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2\,\}$$

である．図 3(c) における span ベクトルを，face ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $-\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ とみなすと，図 3(d) に示す凸錐を得る．このとき

$$\mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1\,\} = \mathrm{face}\{\,\boldsymbol{a}_1,\,-\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2\,\}$$



(a) (b) (c) (d)

図 3: 二次元凸多面錐の face ベクトルと span ベクトル

と表すことができ，span ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ は，図 3(c) における face ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ で与えられる．

以上のように，凸錐の face 形式を凸錐の span 形式で表すこと，逆に凸錐の span 形式を凸錐の face 形式で表すことが可能である．すなわち，face 形式と span 形式は，同じ集合に対する二つの異なる表現である．凸錐の face 形式あるいは span 形式で表される集合を，**凸多面錐** (polyhedral convex cone) とよぶ．

図 2 に示す三次元錐の内，図 2(b), 図 2(c), 図 2(d) に示す凸錐は凸多面錐である．図 2(b) に示す凸多面錐は，頂点を通る 6 本の span ベクトルで表される．図 2(c) に示す凸多面錐は，二つの面の外向き法線ベクトルが face ベクトルとなる．図 2(d) に示す凸多面錐は，頂点を通る 2 本の span ベクトルで表される．一方，図 2(a) に示す凸錐は，凸多面錐ではない．

集合 X に対して，集合

$$X^* = \{\, \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \leq 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in X \,\} \tag{5}$$

を定義する．集合 X^* は凸錐であり，**極** (polar) とよぶ．凸多面錐の極は凸多面錐であり

$$\mathrm{face}\{\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \,\}^* = \mathrm{span}\{\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \,\} \tag{6}$$

$$\mathrm{span}\{\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l \,\}^* = \mathrm{face}\{\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l \,\} \tag{7}$$

が成り立つ．すなわち，凸多面錐の face 形式と span 形式を入れ替えることで，極凸多面錐を求めることができる．また，凸多面錐とその極凸多面錐は，一対一に対応していることがわかる．図 3(a), 3(b) に示す二つの凸多面錐は，たがいに極である．また，図 3(c), 3(d) に示す二つの凸多面錐は，たがいに極である．

2　凸多面錐の演算

凸多面錐の演算アルゴリズムを構成する．MATLAB でプログラムを作成することを考慮して，凸多面錐の face ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ を列ベクト

ルとする行列

$$A = \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{array} \right] \tag{8}$$

を導入する．このとき，式 (3) は

$$\mathrm{face}\{\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \,\} = \{\, \boldsymbol{x} \mid A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0} \,\} \tag{9}$$

と表すことができる．すなわち，face 形式は，線形同次不等式の解集合である．凸多面錐の span ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l$ を列ベクトルとする行列

$$U = \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_l \end{array} \right] \tag{10}$$

を導入する．このとき，式 (4) は

$$\mathrm{span}\{\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l \,\} = \{\, U\boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0} \,\} \tag{11}$$

と表すことができる．

2.1 ベクトルが凸多面錐に含まれるか否かの判定

ベクトルが凸多面錐の face 形式に含まれるか否かの判定　ベクトル $\boldsymbol{x}$ が，凸多面錐 $C = \mathrm{face}\{\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \,\}$ に含まれるか否かを判定する．すべての face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ に対して，$\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq 0$ が成り立つならば，$\boldsymbol{x} \in C$ である．そうでないならば，$\boldsymbol{x} \notin C$ と判定することができる．

ベクトルが凸多面錐の span 形式に含まれるか否かの判定　ベクトル $\boldsymbol{x}$ が，凸多面錐 $C = \mathrm{span}\{\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l \,\}$ に含まれるか否かを判定する．ベクトル $\boldsymbol{x}$ が凸多面錐 C に含まれるための条件は

$$\begin{aligned} &\exists c_1, c_2, \cdots, c_l \geq 0, \\ &c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_l\boldsymbol{u}_l = \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{12}$$

である．上式を未知数 $c_1, c_2, \cdots, c_l$ に関して表すと，線形不等式と線形方程式

$$-\left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{array} \right] \leq \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \tag{13}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_l \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x} \end{array} \right] \tag{14}$$

を得る．上式を満たす $c_1, c_2, \cdots, c_l$ が存在する否かは，線形計画法により判定することができる．MATLAB においては，`linprog` を用いればよい．

2.2　凸多面錐の簡単化

凸多面錐 $C = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l\,\}$ において，ベクトル $\boldsymbol{u}_k$ が

$$\boldsymbol{u}_k \in \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_l\,\} \tag{15}$$

を満たす，すなわち

$$\begin{aligned}&\exists c_1, \cdots, c_{k-1}, c_{k+1}, \cdots, c_l \geq 0,\\ &c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\boldsymbol{u}_1 + c_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} + \cdots + c_l\boldsymbol{u}_l = \boldsymbol{u}_k\end{aligned} \tag{16}$$

が成り立つならば

$$\mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l\,\} = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_l\,\} \tag{17}$$

となる．すなわち，凸多面錐 C の span 形式から，ベクトル $\boldsymbol{u}_k$ を除くことができる．この処理を繰り返すことにより，凸多面錐の最も簡単な span 形式を求めることができる．

以上の手続きを **PCC_simplify** とする．すなわち，凸多面錐の最も簡単な span 形式を求める手続きであり，span ベクトルを列ベクトルとする行列 U を入力として，

$$U_{\mathrm{simplified}} = \mathrm{PCC\_simplify}(U) \tag{18}$$

により最も簡単な span 形式を計算する．返値の行列 $U_{\mathrm{simplified}}$ における列ベクトルは，最も簡単な span 形式の span ベクトルを表す．

凸多面錐 $C = \mathrm{face}\{\,\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\,\}$ を簡単化するために，C の極凸多面錐 $C^* = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\,\}$ を簡単化する．上述の手続きにより，C^* の最も簡単な span 形式を求めることができる．極凸多面錐 C^* の最も簡単な span 形式は，凸多面錐 C の最も簡単な face 形式に対応する．したがって，face 形式の簡単化においては，face ベクトルを span ベクトルとみなし，上述の手続きを適用すれば良い．すなわち

$$A_{\mathrm{simplified}} = \mathrm{PCC\_simplify}(A) \tag{19}$$

により最も簡単な face 形式を計算することができる．行列 $A_{\mathrm{simplified}}$ における列ベクトルは，最も簡単な face 形式の face ベクトルに対応する．

2.3　双方向不等式制約の検出

Face ベクトルが

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる凸多面錐の span 形式を求めると，$\mathrm{span}\{\,[0,\,0,\,-1]^{\mathrm{T}}\,\}$ を得る．すなわち，凸多面錐は 1 次元の領域であり，凸多面錐の次元 1 は空間の次元 3 より小さい．これは，線形不等式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= x \le 0 \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= y \le 0 \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= -x - y \le 0 \end{aligned}$$

より，等式制約

$$\begin{aligned} &[\,1,\,0,\,0\,]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = x = 0 \\ &[\,0,\,1,\,0\,]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = y = 0 \end{aligned}$$

が生じているからである．このような不等式制約の組を，双方向不等式制約とよぶ．

上記の例では，$\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3$ に対して

$$\exists c_1,\,c_2,\,c_3 > 0, \quad c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$$

が成り立つ．たとえば，$c_1 = c_2 = c_3 = 1$ とすればよい．一般に，双方向不等式制約に含まれる face ベクトルの組を，$\boldsymbol{a}_k\ (k \in I_b)$ と表すと

$$\exists c_k > 0, \quad \sum_{k \in I_b} c_k \boldsymbol{a}_k = \mathbf{0} \tag{20}$$

が成り立つ．

簡単化された face 形式の face ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{a}_m$ から，双方向不等式制約を見出すために

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && c_1 + c_2 + \cdots + c_m \\ &\text{subject to} && c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0} \\ &&& \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

を解く．係数 c_k の値が正ならば，face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ は双方向不等式制約に含まれる．値が 0 であるならば，双方向不等式制約に含まれない．上式は，線形計画法を用いて解くことができる．MATLAB においては，`linprog` を用いればよい．

以上の手続きを **PCC_bidirectional_constraints** とする．すなわち，双方向不等式制約を見出す手続きであり，face ベクトルを列とする行列 A を入力として

$$[A_b, A_u] = \mathrm{PCC\_bidirectional\_constraints}(A) \tag{22}$$

により，双方向不等式制約に含まれる face ベクトルを列とする行列 A_b と，双方向不等式制約に含まれない face ベクトルを列とする行列 A_u を計算する．

3　凸多面錐の変換

3.1　真錐

錐が内点を含み，任意の $\boldsymbol{x} \in C$ に対して $-\boldsymbol{x} \notin C$ が成り立つとき，錐は**真錐** (proper cone) であると称する．凸錐である真錐を**真凸錐** (proper convex cone)，真凸錐である凸多面錐を**真凸多面錐** (proper polyhedral convex cone) とよぶ．図 1 に示す凸錐（図 1(a), 1(c), 1(f), 1(g)）では，図 1(c) に示す凸錐が真凸錐である．図 1(a) に示す凸錐は内点を含まないため，真凸錐ではない．図 1(f), 1(g) に示す凸錐は，線形空間を含んでおり，線形空間内の要素 $\boldsymbol{x}$ とその逆 $-\boldsymbol{x}$ の両方が凸錐に含まれるため，真凸錐ではない．図 2 に示す三次元凸錐では，図 2(a), 2(b) に示す凸錐が真凸錐である．図 2(b) に示す凸錐は，真凸多面錐である．図 2(c) に示す凸錐は線形空間を含んでおり，真凸錐ではない．図 2(d) に示す凸錐は内点を含まないため，真凸錐ではない．

凸多面錐 C の face 形式 face$\{\,\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\,\}$ の次元を n で表す．Face 形式は簡単化されており，冗長な face ベクトルを含まないとする．個数 m が次元 n より小さいとき，凸多面錐 C は $n-m$ 次の線形空間を含んでおり，真錐ではない．真錐であるためには，$n \le m$ である必要がある．また，双方向不等式制約となる face ベクトルの組があるとき，凸多面錐 C の次元は n より小さく，C は内点を持たないため，C は真錐ではない．結局，真凸多面錐であるためには，$m \ge n$ ならびに双方向不等式制約を持たないことが必要である．

真凸多面錐の face ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ から，任意の $k\ (\le n)$ 個を選び，その k 個のベクトルから成る行列のランクを調べる．フルランクでない場合は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立でなく，いずれかの face ベクトルが冗長である，あるいは双方向不等式制約を含むかである．これは，簡単化された真凸多面錐では生じない．したがって，真凸多面錐であるためには，face ベクトルの中から $k\ (\le n)$ 個を選ぶとき，選んだ face ベクトルを列とする行列のランクが k に等しくなくてはならないことがわかる．

簡単化された真凸多面錐において，face ベクトルの個数と span ベクトルの個数を調べる．Face ベクトルを列とする行列 A と span ベクトルを列とする行列 U に対して，$A^{\mathrm{T}}U$ を計算し，各要素が 0 であるか負であるかを調べる．3 次元空間で 5 個の face ベクトルから成る真凸多面錐 C が，5 個の span

ベクトルを有する場合，積 $A^{\mathrm{T}}U$ はたとえば

$$
A^{\mathrm{T}}U = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

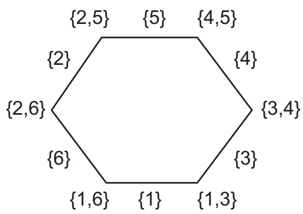
と表される．ここで負の要素は示していない．各 span ベクトルは，2 個の face ベクトルから決められる．したがって，積の各列には，2 個の 0 要素がある．Face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ が定める 2 次元空間 $\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$ と，真凸多面錐 C との共通集合は，2 次元空間内の真凸多面錐になる．この 2 次元空間内の真凸多面錐は，2 個の span ベクトルで指定される．したがって，積の各行には，2 個の 0 要素がある．一方，3 次元空間で 5 個の face ベクトルから成る真凸多面錐が，4 個の span ベクトルを有する場合，積 $A^{\mathrm{T}}U$ はたとえば

$$
\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & \end{bmatrix}
$$

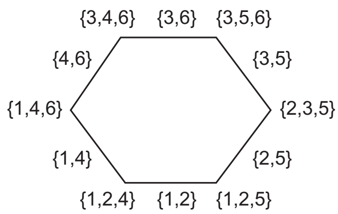
となる．左の場合は，face ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ が定める平面と真凸多面錐 C との共通集合が，2 次元真凸多面錐ではないことを意味する．右の場合は，face ベクトル $\boldsymbol{a}_5$ が冗長であることを意味する．いずれの場合も，C が簡単化された真凸多面錐であるという仮定に反する．したがって，face ベクトルの個数と span ベクトルの個数は等しい．4 次元空間で 6 個の face ベクトルから成る真凸多面錐 C が，6 個の span ベクトルを有する場合，各 span ベクトルは，3 個の face ベクトルから決められる．また，face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ が定める 3 次元空間と，真凸多面錐 C との共通集合は，3 次元空間内の真凸多面錐であり，3 個の span ベクトルで指定される．したがって，積 $A^{\mathrm{T}}U$ では，各行，各列に 3 個の 0 要素がある．たとえば，

$$
A^{\mathrm{T}}U = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

となる．列の個数が 6 より小さい場合，このようにはならない．したがって，face ベクトルの個数と span ベクトルの個数は等しい．以上の考察より，簡単化された真錐凸多面錐においては，face ベクトルの個数と span ベクトルの個数は等しいことがわかる．



(a) 3D 凸多面錐



(b) 4D 凸多面錐

図 4: 真凸多面錐の断面

真凸多面錐においては，n 個の face ベクトルから成る行列のランクは n，$n-1$ 個の face ベクトルから成る行列のランクは $n-1$，$n-2$ 個の face ベクトルから成る行列のランクは $n-2$ である．すなわち，n 個の face ベクトルから成る行列の零空間の次元は 0，$n-1$ 個の face ベクトルから成る行列の零空間は一次元空間（直線），$n-2$ 個の face ベクトルから成る行列の零空間は二次元空間（平面）である．したがって，span ベクトルを含む直線は，$n-1$ 個の face ベクトルから成る行列の零空間である．二つの span ベクトルを含む平面は，$n-2$ 個の face ベクトルから成る行列の零空間である．例として，3 次元真凸多面錐 $C = \mathrm{face}\{\,\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_6\,\}$ を考える．真凸多面錐 C を平面で切断し，一次元空間を点，二次元空間を直線で表す（図 4(a)）．Span ベクトルを含む直線は，二個の face ベクトルから成る行列の零空間である．二個の face ベクトルの添字を，集合で表す．二つの span ベクトルを含む平面は，両端の直線に対応する集合の共通集合で与えられる．たとえば，$\{\,1, 3\,\}$ で指定される直線と $\{\,3, 4\,\}$ で指定される直線を含む平面は，$\{\,1, 3\,\} \cap \{\,3, 4\,\} = \{\,3\,\}$ で与えられる．別の例として，4 次元真凸多面錐 $C = \mathrm{face}\{\,\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_6\,\}$ を考える．真凸多面錐 C を平面で切断し，一次元空間を点，二次元空間を直線で表す（図 4(b)）．Span ベクトルを含む直線は，三個の face ベクトルから成る行列の零空間である．二つの span ベクトルを含む平面は，両端の直線に対応する集合の共通集合で与えられる．たとえば，$\{\,1, 2, 5\,\}$ で指定される直線と $\{\,2, 3, 5\,\}$ で指定される直線を含む平面は，$\{\,1, 2, 5\,\} \cap \{\,2, 3, 5\,\} = \{\,2, 5\,\}$ で与えられる．

3.2 真凸多面錐の face 形式から span 形式への変換

真凸多面錐 C の face 形式 $\mathrm{face}\{\,\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\,\}$ から span 形式を求める．凸多面錐の span 形式を，行列 U で表す．まず，行列 U は空とする．凸多面錐の span ベクトルを，順次 U に追加する．凸多面錐の次元を n で表す．真錐であるので，$n \le m$ が成り立つ．凸多面錐の face ベクトルから n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を取り出す．このとき，行列

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right]$$

は正則であり，$\mathrm{rank}\,\hat{A} = n$ が成り立つ．行列 $\hat{A}$ の第 k 列を取り除いた行列を $\hat{A}_k$ で表す．すなわち

$$\hat{A}_k = \left[\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k-1} & \boldsymbol{a}_{k+1} \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right]$$

である．このとき，$\mathrm{rank}\,\hat{A}_k = n-1$ であり，行列 $\hat{A}_k$ の零空間は直線となる．行列 $\hat{A}_k$ の零空間に含まれる基底ベクトル $\boldsymbol{d}_k$ を一つ見出し，$\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k \leq 0$ ならばベクトル $\boldsymbol{d}_k$ を U に，$\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_k > 0$ ならばベクトル $-\boldsymbol{d}_k$ を U に追加する．追加したベクトルは，face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ との内積が負，それ以外の face ベクトルとの内積が 0 である．ここで，追加した span ベクトルに対して，内積が 0 となる face ベクトルの添え字の集合を記録する．すなわち，追加したベクトルに対応して，集合 $I_k = \{\,1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n\,\}$ を記録する．以上の過程を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して実行することにより，n 個の span ベクトルを得る．

次に，face ベクトル $\boldsymbol{a}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ を，得られた凸多面錐に順次適用することで，凸多面錐を逐次的に更新する．真凸多面錐の span ベクトルの個数は n に等しい．したがって，face ベクトルを一個追加するたびに，span ベクトルは一個増える．したがって，凸多面錐の face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$, $(k \in \{\,n+1, \cdots, m\,\})$ を追加する直前，凸多面錐は $k-1$ 個の span ベクトルを有している．この凸多面錐を

$$C_{k-1} = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{k-1}\,\}$$

と表す．ここで，face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ を追加することにより，1 個の span ベクトルが C_{k-1} から外れ，face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ の追加により生じる 2 個の span ベクトルが C_{k-1} に加わる．したがって，face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ を追加することにより，k 個の span ベクトルから成る真凸多面錐 C_k を得る．この過程の詳細を記す．まず，$\boldsymbol{a}_k$ と $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{k-1}$ との内積を計算し，内積が正となる span ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ を見出す．このような span ベクトルは 1 個だけある．Span ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_{j-1}$ の間，ならびに $\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_{j+1}$ の間に新しい span ベクトルを生成する．Span ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_{j-1}$ の間の span ベクトル $\boldsymbol{u}^-$ は，face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ ならびに $\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_{j-1}$ を含む 2 次元面を定める face ベクトルに直交する．このような face ベクトルの集合は，$I^- = \{\,k\,\} + I_j \cap I_{j-1}$ で与えられる．添字集合 I^- に対応する face ベクトルから成る行列の零空間を求め，零空間に含まれる基底ベクトル $\boldsymbol{d}^-$ を一つ見出す．集合 I^- 以外の要素に対応する face ベクトルと $\boldsymbol{d}^-$ との内積がすべて負または 0 ならば $\boldsymbol{u}^- = \boldsymbol{d}_k$，内積がすべて正ならば $\boldsymbol{u}^- = -\boldsymbol{d}_k$ とする．同様に，Span ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_{j+1}$ の間の span ベクトル $\boldsymbol{u}^+$ を，添字集合 $I^+ = \{\,k\,\} + I_j \cap I_{j+1}$ から求める．Span ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ を外し，$\boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{u}^+$ を追加し，span 形式を更新する．すなわち

$$C_k = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{j-1}, \boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{k-1}\,\}$$

となる．なお，$j=1$ のときは $j-1$ を $k-1$ で，$j=k-1$ のときは $j+1$ を 1 で置き換えて計算を進める。以上の操作を，face ベクトル $\boldsymbol{a}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ に適用することにより，凸多面錐を順次更新し，最終的な span 形式を得ることができる．

以上の手続きを **PCC_convert_proper_cone** とする．すなわち，真凸多面錐の face 形式から span 形式を計算する手続きであり，face ベクトルを列ベクトルとする行列 A を入力として，

$$U = \mathrm{PCC\_convert\_proper\_cone}(A) \tag{23}$$

により，span 形式を計算する．返値の行列 U における列ベクトルは，span 形式の span ベクトルを表す．

例　自然数 m (≥ 3) と $z \neq 0$ に対して，$\theta_k = 2\pi k/m$ と定め，face ベクトル $[\cos\theta_k, \sin\theta_k, z]^{\mathrm{T}}$, $(k = 1, 2, \cdots, m)$ から成る凸多面錐を考える．これは，3 次元空間内の m 角錐となり，真凸多面錐である．ここで，$m = 8$, $z = -1$ とすると，face ベクトルは

$$A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.71 & 0.00 & -0.71 & -1.00 & -0.71 & -0.00 & 0.71 \\ 0.00 & 0.71 & 1.00 & 0.71 & 0.00 & -0.71 & -1.00 & -0.71 \\ -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 & -1.00 \end{bmatrix}$$

となる．手続き PCC_convert_proper_cone を用いて，span 形式を計算すると

$$U = \begin{bmatrix} 0.28 & -0.28 & -0.68 & -0.68 & -0.28 & 0.28 & 0.68 & 0.68 \\ 0.68 & 0.68 & 0.28 & -0.28 & -0.68 & -0.68 & -0.28 & 0.28 \\ 0.68 & 0.68 & 0.68 & 0.68 & 0.68 & 0.68 & 0.68 & 0.68 \end{bmatrix}$$

を得る．このとき，$A^{\mathrm{T}}U$ は

$$\begin{bmatrix} -0.40 & -0.96 & -1.36 & -1.36 & -0.96 & -0.40 & 0 & 0 \\ 0 & -0.40 & -0.96 & -1.36 & -1.36 & -0.96 & -0.40 & 0 \\ 0 & 0 & -0.40 & -0.96 & -1.36 & -1.36 & -0.96 & -0.40 \\ -0.40 & 0 & 0 & -0.40 & -0.96 & -1.36 & -1.36 & -0.96 \\ -0.96 & -0.40 & 0 & 0 & -0.40 & -0.96 & -1.36 & -1.36 \\ -1.36 & -0.96 & -0.40 & 0 & 0 & -0.40 & -0.96 & -1.36 \\ -1.36 & -1.36 & -0.96 & -0.40 & 0 & 0 & -0.40 & -0.96 \\ -0.96 & -1.36 & -1.36 & -0.96 & -0.40 & 0 & 0 & -0.40 \end{bmatrix}$$

となり，各列，各行に，要素 0 が 2 個あることがわかる．

3.3　凸多面錐の変換アルゴリズム

凸多面錐 C の face 形式から span 形式へ変換する．凸多面錐 C は真錐とは限らない．行列 A で face 形式を表す．まず，双方向不等式制約に対応する

行列 A_b を求める．行列 A_b が空でない場合は，双方向不等式制約に含まれない face ベクトル（行列 A_u で与えられる）を，行列 A_b の零空間に射影する．零空間内の凸多面錐は真錐であるので，PCC_convert_proper_cone を用いて span 形式を求める．求めた零空間における span ベクトルを，原空間で表すことにより，凸多面錐 C の span 形式を求めることができる．

行列 A_b が空である場合，凸多面錐 C の次元は空間の次元に一致する．ただし，凸多面錐 C が線形空間を含む可能性があるので，行列 A の零空間とその直交補空間を求める．Face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ は，直交補空間に含まれるので，直交補空間に射影する．直交補空間内の凸多面錐は真錐であるので，PCC_convert_proper_cone を用いて span 形式を求める．求めた直交補空間における span ベクトルを原空間で表すとともに，零空間を表す span ベクトルを求めることにより，凸多面錐 C の span 形式を求めることができる．

以上に示すように，face ベクトルを部分空間に射影し，部分空間内で真凸多面錐の face 形式から span 形式へ変換し，部分空間における span ベクトルを原空間で表すという計算が必要である．この計算過程を示す．凸多面錐 C の face 形式が face$\{\,\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\,\}$ で与えられるとする．部分空間の正規直交基底を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_q$ とする．行列

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{24}$$

を用いると，部分空間における face ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ の座標は，$\boldsymbol{\alpha}_k = (\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}} B)^{\mathrm{T}}$ で表される．部分空間内のベクトル $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ から構成される face 形式

$$\hat{C} = \mathrm{face}\{\,\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\,\} \tag{25}$$

に対して，アルゴリズム PCC_convert_proper_cone を適用し，span 形式を求める．

$$\hat{C} = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\,\} \tag{26}$$

ベクトル $\boldsymbol{\beta}_j$ を原空間で表すと，$\boldsymbol{v}_j = B\boldsymbol{\beta} j$ となる．したがって，原空間で span 形式は

$$\mathrm{span}\{\,\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\,\} \tag{27}$$

で与えられる．

最後に，零空間を表す span ベクトルを求める．ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_p$ から成る線形空間は

$$\mathrm{span}\{\,\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}^-\,\} \tag{28}$$

ここで

$$\boldsymbol{e}^- = -\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{e}_i \tag{29}$$

と表すことができる．

以上の手続きを **PCC_convert** とする．すなわち，凸多面錐の face 形式から span 形式を計算する手続きであり，face ベクトルを列ベクトルとする行列 A を入力として，

$$U = \mathrm{PCC\_convert}(A) \tag{30}$$

により，span 形式を計算する．返値の行列 U における列ベクトルは，span 形式の span ベクトルを表す．また，極凸多面錐を考えることにより，凸多面錐の span 形式から face 形式への変換は

$$A = \mathrm{PCC\_convert}(U) \tag{31}$$

となる．

4 連立一次不等式

連立一次不等式

$$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{0} \tag{32}$$

を凸多面錐のアルゴリズムを用いて解く．

まず，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，同次ベクトル

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \tag{33}$$

で表す．ここで，λ は非負の実数である．なお，同次ベクトル

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

は，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 方向の無限遠点を表す．式 (32) は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} \\ \lambda \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{0} \\ -\lambda \leq 0 \end{aligned} \tag{35}$$

となる．行列

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & -1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

を導入すると，連立一次不等式 (35) は

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{0} \tag{37}$$

と表される．上式は，凸多面錐の face 形式である．そこで，face 形式を span 形式に変換する．

$$\bar{U} = \mathrm{PCC\_convert}(\bar{A}) \tag{38}$$

行列 $\bar{U}$ の各列は，span ベクトルであり，同次ベクトルで表されている．制約 $\lambda \geq 0$ が課せられているので，行列 $\bar{U}$ の各列の最後の要素は正または 0 である．列の最後の要素が正の場合，その列を最後の要素で割ることにより，元の空間のベクトルを得る．最後の要素が 0 に等しい場合は，無限遠点に対応する．最後の要素が 1 に等しい列を左側に，最後の要素が 0 に等しい列を右側にまとめると

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_l & \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_p \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

を得る．上式の span 形式は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{l} c_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{p} d_j \boldsymbol{v}_j \tag{40}$$

$$\sum_{i=1}^{l} c_i = 1 \tag{41}$$

$$c_1,\, c_2,\, \cdots,\, c_l \geq 0, \quad d_1,\, d_2,\, \cdots,\, d_p \geq 0 \tag{42}$$

と書き直すことができる．集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^{l} c_i \boldsymbol{u}_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{l} c_i = 1 \right\} \tag{43}$$

は，ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \cdots,\, \boldsymbol{u}_l$ を頂点とする多角形領域である．この領域を $\mathrm{span}\{\, \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \cdots,\, \boldsymbol{u}_p \,\}$ 方向に掃引すると，解領域となる．

例　　連立一次不等式

$$\begin{aligned} -x - 2 &\leq 0 \\ -x - y - 2 &\leq 0 \\ -y - 2 &\leq 0 \end{aligned}$$

を解く．このとき

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

である．Face 形式から span 形式へ変換すると

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -2.0000 \\ -2.0000 & -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

を得る．したがって，線形同次不等式の一般解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_1,\, c_2,\, d_1,\, d_2 \geq 0$$

と表される．解領域は，$[-2,\, 0]^{\mathrm{T}}$ と $[0,\, -2]^{\mathrm{T}}$ を頂点とする線分を，span$\{[1,\, 0]^{\mathrm{T}},\, [0,\, 1]^{\mathrm{T}}\}$ 方向に掃引して得られる．結果として，解領域は，$[-2,\, \infty]^{\mathrm{T}}$, $[-2,\, 0]^{\mathrm{T}}$, $[0,\, -2]^{\mathrm{T}}$, $[\infty,\, -2]^{\mathrm{T}}$ を結ぶ線分を境界とする凸領域で与えられる．

問題

1. 集合 C が凸錐であるための必要十分条件が式 (2) で表されることを示せ．

2. 式 (3) で与えられる face 形式が凸錐であることを示せ．

3. 式 (4) で与えられる span 形式が凸錐であることを示せ．

4. 任意の集合 X に対して，式 (5) で与えられる X^* が凸錐であることを示せ。

5. (a) 任意の集合 X に対して，$X \subset (X^*)^*$ が成り立つことを示せ．
   (b) 任意の集合 X, Y に対して，$X \subset Y$ ならば $X^* \supset Y^*$ が成り立つことを示せ．

6. 凸錐 C に対して $(C^*)^* = C$ が成り立つことを，以下の分離定理 [1] を用いて示せ．

   分離定理　凸錐 C と $\boldsymbol{y} \notin C$ に対して

   $$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in C$$
   $$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y} > 0$$

   を満たす $\boldsymbol{p}$ が存在する．

7. (a) 極凸多面錐に関する式 (7) を示せ．
   (b) 凸錐 C に対して $(C^*)^* = C$ が成り立つことを用いて，式 (6) を示せ．

8. (a) 凸多面錐 $C = \mathrm{span}\{\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_l \,\}$ が線形空間であるための必要十分条件は

$$\exists c_1, c_2, \cdots, c_l > 0, \quad \sum_{j=1}^{l} c_j \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{0}$$

であることを示せ.

(b) 凸多面錐 $C = \mathrm{face}\{\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \,\}$ が線形空間であるための必要十分条件は

$$\exists c_1, c_2, \cdots, c_l > 0, \quad \sum_{k=1}^{m} c_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

であることを示せ.

参考文献

[1] 布川, 中山, 谷野, 線形代数と凸解析, コロナ社, 1991