n 人のグループで．誕生日が同じ人たちがいる確率を求める．問題を簡単にするため，2 月 29 日は考えない．n 人のグループのすべてのメンバーの誕生日が異なる確率を $D(n)$ で表す．誕生日は，1 月 1 日から 12 月 31 日までの 365 日に均等に分布していると仮定する．

2 人のグループで誕生日が異なるのは，2 人目の誕生日が 1 人目と異なる場合である．この確率は

$$D(2) = \frac{365-1}{365}$$

で与えられる．3 人のグループで誕生日が異なるのは，1 人目と 2 人目の誕生日が異なり，さらに 3 人目の誕生日が 1 人目，2 人目と異なる場合である．1 人目と 2 人目の誕生日が異なる確率は $D(2)$，3 人目の誕生日が 1 人目，2 人目の誕生日と異なる確率は，$(365-2)/365$ である．したがって

$$D(3) = D(2)\,\frac{365-2}{365}$$

で与えられる．4 人のグループで誕生日が異なるのは，1 人目，2 人目，3 人目の誕生日が異なり，さらに 4 人目の誕生日が 1 人目，2 人目，3 人目と異なる場合である．1 人目，2 人目，3 人目の誕生日が異なる確率は $D(3)$，4 人目の誕生日が 1 人目，2 人目，3 人目の誕生日と異なる確率は，$(365-3)/365$ である．したがって

$$D(4) = D(3)\,\frac{365-3}{365}$$

で与えられる．以上の考察より，漸化式

$$D(n+1) = D(n)\,\frac{365-n}{365}$$

を得る．初期値 $D(1) = 1$ から順次，漸化式を用いることにより，$D(2), D(3), D(4), \cdots$ を計算することができる．

n 人のグループで．誕生日が同じ人たちがいる確率 $S(n)$ は

$$S(n) = 1 - D(n)$$

で与えられる．確率 $S(n)$ の計算結果を以下に示す．

```
人数  2        確率 0.00273973
人数  3        確率 0.00820417
人数  4        確率 0.01635591
人数  5        確率 0.02713557

人数 21        確率 0.44368834
人数 22        確率 0.47569531
人数 23        確率 0.50729723
人数 24        確率 0.53834426
```

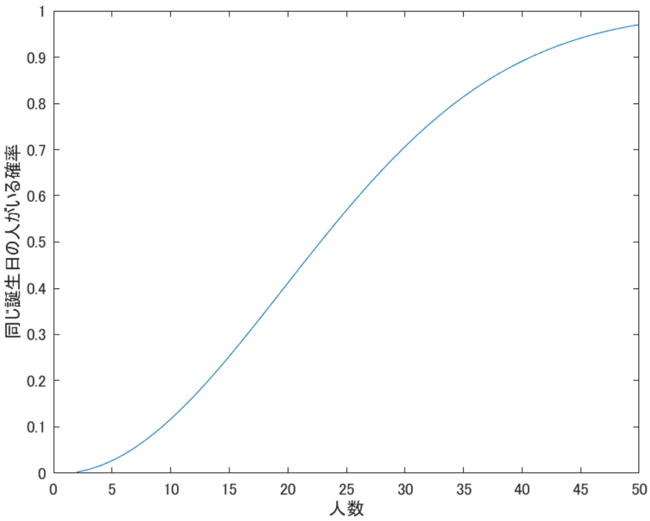

図 1: 誕生日が同じ人たちがいる確率

人数	47	確率	0.95477440
人数	48	確率	0.96059797
人数	49	確率	0.96577961
人数	50	確率	0.97037358

計算結果より，$n = 23$ で確率は 0.5 を超えることがわかる．$S(50) = 0.97$ であり，50 人のグループには高い確率で誕生日が同じ人たちがいる．図 1 より，人数が増えるにつれて，確率がほぼ一様に増えることがわかる．

モンテカルロシミュレーションで，誕生日の問題を解く．1 月 1 日，1 月 2 日，1 月 3 日，$\cdots$，12 月 31 日に，$1, 2, 3, \cdots, 365$ を対応させる．一様に値 $1, 2, 3, \cdots, 365$ を取る乱数を，n 個発生させる．n 個の値の中に同じ値があるか否かを調べる．以上の試行を複数回繰返し，同じ値がある頻度を数える．ここでは，1000 回の試行で，誕生日が同じ人がいる頻度とすべての誕生日が異なる頻度を数える．$n = 23$ で，頻度を 10 回数えた結果を示す．

23 人	同じ人がいる 493 回	すべて異なる 507 回
23 人	同じ人がいる 496 回	すべて異なる 504 回
23 人	同じ人がいる 511 回	すべて異なる 489 回
23 人	同じ人がいる 514 回	すべて異なる 486 回
23 人	同じ人がいる 476 回	すべて異なる 524 回
23 人	同じ人がいる 507 回	すべて異なる 493 回
23 人	同じ人がいる 530 回	すべて異なる 470 回
23 人	同じ人がいる 519 回	すべて異なる 481 回

```
23 人      同じ人がいる 501 回      すべて異なる 499 回
23 人      同じ人がいる 531 回      すべて異なる 469 回
```

計算結果 $S(23) = 0.51$ に近いことがわかる．また $n = 50$ で，頻度を 10 回数えた結果を示す．

```
50 人      同じ人がいる 974 回      すべて異なる 26 回
50 人      同じ人がいる 968 回      すべて異なる 32 回
50 人      同じ人がいる 972 回      すべて異なる 28 回
50 人      同じ人がいる 964 回      すべて異なる 36 回
50 人      同じ人がいる 967 回      すべて異なる 33 回
50 人      同じ人がいる 962 回      すべて異なる 38 回
50 人      同じ人がいる 970 回      すべて異なる 30 回
50 人      同じ人がいる 981 回      すべて異なる 19 回
50 人      同じ人がいる 967 回      すべて異なる 33 回
50 人      同じ人がいる 982 回      すべて異なる 18 回
```

計算結果 $S(50) = 0.97$ に近いことがわかる．