数学解析 III　試験

1．独立変数 x の関数 $q(x)$ $(0 \le x \le 1)$ に関する微分方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} & q''(x) = 0, \\ & \text{ただし} \quad q(0) = 0, \\ & \qquad\qquad q'(1) = F \ (\text{定数}) \end{aligned}$$

は

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{2} (q')^2 \ \mathrm{d}x - F\, q(1) \to \text{最小}, \\ & \text{ただし} \quad q(0) = 0 \end{aligned}$$

と等価である．有限要素法を用いて，上記の微分方程式の境界値問題を連立方程式に変換せよ．

2．変数 $[x, y, z, u, v, w]^{\mathrm{T}}$ は，パラメータ α, β, γ を用いて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha, \beta, \gamma \text{ は任意})$

と表される．原点に最も近い変数を求めよ．

3．関数 $f(x)$ のフーリエ変換は

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, \mathrm{d}x$$

で定義される．ここで j は虚数単位である．二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ は，$f(x-\alpha) = g(x)$ を満たすとする．関数 $f(x)$，$g(x)$ のフーリエ変換を $F(j\omega)$，$G(j\omega)$ で表すと，

$$\frac{G(j\omega)}{F(j\omega)} = e^{-j\omega\alpha}$$

が成り立つことを示せ．