Runge-Kutta法により微分方程式を解く

ファイル freevibration.c
微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.1\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \tag{1}$$

$$x(0) = -2, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 3$$

をRunge-Kutta法により解いてみよう．上式は，変数xに関する二階の微分方程式である．そこで，二個の状態変数

$$x_0 = x$$

$$x_1 = \frac{dx}{dt}$$

を導入し，(1)式を標準形に変換すると，

$$\frac{dx_0}{dt} = x_1 \tag{2}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -0.1x_1 - 4x_0 \tag{3}$$

が得られる．上式を関数 **differential** に記述すればよい．

```
void differential(int n, double x[], double t, double value[])
{
        static double damper = 0.10;
        static double spring = 4.00;

        value[0] = x[1];
        value[1] = - damper * x[1] - spring * x[0];
}
```

状態変数の数は，マクロ定数 **NumVars** で定義する．

微分方程式を解くためには，初期値を設定して，関数 **RungeKutta** を実行する．

```
        /* initial values */
        x[0] = -2.00;   /* position */
        x[1] = 3.00;    /* velocity */

        RungeKutta(fd, NumVars, x, differential, dt, kcnt);
```

ファイルディスクリプタ fd で指定したファイル freevibration.dat に，計算結果が書き込まれる．ファイル freevibration.dat は，以下の形式を持つ．

```
0.000000        -2.000000       3.000000
0.010000        -1.969617       3.076357
0.020000        -1.938477       3.151407
0.030000        -1.906593       3.225122
0.040000        -1.873979       3.297475
0.050000        -1.840649       3.368437
```

一行目は時刻 t の値を，二行目は状態変数 $x_0 = x$ の値を，三行目は状態変数 $x_1 = dx/dt$ の値を表す．したがって，一行目の値を横軸，二行目の値を縦軸に対応させてグラフを描くと，x の時間変化を見ることができる．同様に，一行目の値を横軸，三行目の値を縦軸に対応させてグラフを描くと，dx/dt の時間変化を見ることができる．以上のグラフを gnuplot で描くときのプログラムは，**freevibration.plt** である．

```
plot \
        "freevibration.dat" using 1:2 title "x (position)", \
        "freevibration.dat" using 1:3 title "dx/dt (velocity)"
```

また，二行目の値を横軸，三行目の値を縦軸に対応させてグラフを描くと，x と dx/dt の関係を見ることができる．このようなグラフを，位相図 (phase graph) とよぶ．位相図を描くプログラムは，**freevibrationPhase.plt** である．

```
plot "freevibration.dat" using 2:3 title "phase"
```

ファイル oneorder.c
微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + 2x = u(t) \tag{4}$$

をRunge-Kutta法により解いてみよう．一個の状態変数x_0を導入し，(4)式を標準形に変換すると，

$$\frac{dx_0}{dt} = -2x_0 + u(t)$$

が得られる．これをプログラムすればよい．計算結果はファイル **oneorder.dat** に書き込まれる．さらに，gnuplotプログラム **oneorder.plt** を用いると，計算結果をグラフで表すことができる．

ファイル twoorder.c
微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4x = u(t) \tag{5}$$

をRunge-Kutta法により解いてみよう．二個の状態変数x_0, x_1を導入し，(5)式を標準形に変換すると，

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{dt} &= x_1\\ \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 - 4x_0 + u(t)\end{aligned}$$

が得られる．これをプログラムすればよい．計算結果はファイル **twoorder.dat** に書き込まれる．さらに，gnuplotプログラム **twoorder.plt** を用いると，計算結果をグラフで表すことができる．