# ロボット制御理解のための分野横断図



## 制御工学（周波数空間）記号演算子s

微分方程式解法は面倒　代数計算で解を求めたい

$$(Ms^2+Bs+K)X(s)=F(s)$$

$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$　のとき

$$X(s)=\frac{1}{Ms^2+Bs+K}F(s)$$

代数計算で求解　ここまでは数学と目的と同じ

入力と出力の関係　制御工学　$s=j\omega$

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Bs+K}$$

代入して理解すると便利
フーリエ変換との関係

周波数領域，1入力1出力を基本とする表現

標準系へ　同じ方程式で表現すれば便利

2次遅れ系（分母の最高次数２）

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{M}}$　固有振動数

$\zeta=\frac{B}{2\sqrt{MK}}$

遅れ（分母ｓは積分　積分すれば位相が遅れる）

時間領域での表現

## 制御工学（状態空間）

状態量Xは時間関数

状態方程式

多入力多出力表現に便利

$$\dot{X}=AX+bu$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M}\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}$$

入力　$u=f$

出力　$y=cX$　　$y=x$　のとき　$c=[1\quad 0]$

最適性の議論可能　（最適レギュレータ，カルマンフィルタ）

## 多関節構造体（実体）

仮定のもとにモデル化

## 剛体リンクモデル

$$R(q)\ddot{q}+h(q,\dot{q})\dot{q}+B\dot{q}+g(q)=\tau$$

多変数(多自由度)　非線形

ニュートン力学　質量ｘ加速＝力

1自由度　線形化（ロボットの特徴は失われる）

## 数学基礎（微分方程式，解析学など）

斉次定係数２階線形常微分方程式　初期条件すべて０では動かない

例：　$\ddot{y}+y=0\quad y(0)=1,\quad \dot{y}(0)=0$

非斉次定係数2階線形常微分方程式　非斎次方程式右辺uは機械系の外力に対応

例：　$\ddot{y}+y=u\quad y(0)=1,\quad \dot{y}(0)=0$

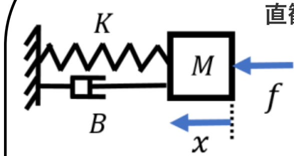
- 数学授業では微分方程式を作るよりも解く訓練が多い
- 解を三角関数と予想して係数を求めるなどが多い

自然現象を数式で表現　静力学　動力学　材料力学　流体力学　天文学　経済学
共通言語としての数学の重要性

無次元化　無属性化

## 物理モデル

### 機械系マスダンパースプリングモデル




直観的理解にはこのモデルが有用

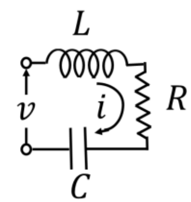
$$M\ddot{x}+B\dot{x}+Kx=f$$

$$x(0)=x_0,\qquad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$$

$M=0\quad B\dot{x}+Kx=f$　外力なしでは振動しない

$B=0\quad M\ddot{x}+Kx=f$　外力なしでも
ゼロでない初期条件で振動継続

### 電気系RLC回路モデル




$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i d\tau=v$$

文字を置き換えれば　$Q=\int_0^t i d\tau$

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=v$$

### 機械系も電気系も同じ方程式（同じ性質）

$M=L\qquad B=R\qquad K=\frac{1}{C}$

### 総エネルギー（運動エネルギー＋ポテンシャルエネルギー）

$$V(t)=\frac{1}{2}M\dot{x}^2(t)+\frac{1}{2}Kx^2(t)$$

$$V(t)=V(0)+\int_0^t \dot{x}f d\tau=V(0)+\int_0^t \dot{x}(M\ddot{x}+B\dot{x}+Kx)d\tau$$

$$=V(0)+[\tfrac{1}{2}M\dot{x}^2]_0^t+[\tfrac{1}{2}Kx^2]_0^t+\int_0^t B\dot{x}^2 d\tau=\tfrac{1}{2}M\dot{x}^2(t)+\tfrac{1}{2}Kx^2(t)+\int_0^t B\dot{x}^2 d\tau$$

$f=0$　のとき　$V(t)=V(0)$

$$\int_0^t B\dot{x}^2 d\tau=\frac{1}{2}M\dot{x}^2(0)+\frac{1}{2}Kx^2(0)-\frac{1}{2}M\dot{x}^2(t)+\frac{1}{2}Kx^2(t)$$

共振現象
$f,v$　の特定の周波数で起こる
特に，$B$，$R$　小さいとき顕著
小さな振動入力　$f,v$　によって
次第に大きなエネルギーを蓄積

エネルギー消費
$B$，$R$　で発生し，熱エネルギーに変わる

## 機械系マスダンパースプリングモデルから見えてくる世界

### フィードバック制御

力ｆをPDフィードバック制御入力で構成

$$M\ddot{x}+B\dot{x}+Kx=K_p(x_d-x)-K_v\dot{x}$$

左辺：ハードで決定される
右辺：ソフトで決定される

左辺ｘ，右辺ｘを同じとすれば，KpはKと，KvはBと同じ項にまとめられる

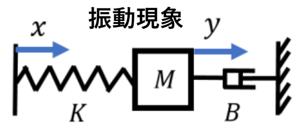
$$M\ddot{x}+(B+K_v)\dot{x}+(K+K_p)x=K_px_d$$

停止したときX≠Xd

$$(K+K_p)x=K_px_d$$

$K=0$　であればX＝Xd

### 振動現象




$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$s=j\omega\quad \omega_n=\sqrt{\frac{K}{M}}\quad \zeta=\frac{B}{2\sqrt{MK}}$

$$M\ddot{y}+B\dot{y}+Ky=Kx$$

Ｘの周波数が小さいとき　S=jω≈０のときｙはｘと同じ変位で運動
大きいとき　S=jω　伝達関数分母が大きくなりｙ変位は減少
振動抑制装置，地震計，防音装置など

### 信号処理
### 低域通過フィルター

$$\frac{Q(s)}{v(s)}=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\omega_n$：遮断周波数

アナログフィルター
（RLC回路，オペアンプ回路）
ディジタルフィルター