Fresnel 積分の計算

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x^2)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2)dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

あるいは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[ix^2]dx=\sqrt{\pi i}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$$

証明

複素積分をつかう.

$$I=\int_C \exp[iz^2]dz$$

を考える. 積分路 C を中心 O が原点で中心角が $\pi/4$ の扇形にとる. 半径を R とする（これは、あとで無限大にもっていく）. O から実軸上で B をとって, OB $=R$ とする. つぎに、B から反時計まわりに, $\pi/4$ だけ回転させ点を C として、最後に C から原点にもどる閉じた経路を考える（ 図を描いたほうがよいが、このくらいなら頭のなかで描くことが可能であろう)。さて、積分　I は, 披積分関数が扇形の領域で正則関数であることから, ゼロになる：したがって, 積分を, 積分路にそって分割して書き直すと,

$$I=\int_0^R\exp[ix^2]dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\exp[iR^2\exp(2i\theta)]d\theta+\Big(\int_R^0\exp[-r^2]dr\Big)\times\exp[i\frac{\pi}{4}]=0$$

第２項は、$R\to\infty$ において, ゼロに収束することから（証明は省く）

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R\exp[ix^2]dx=\exp[i\frac{\pi}{4}]\times\lim_{R\to\infty}\int_0^R\exp[-r^2]dr$$

ガウス積分

$$\int_0^{\infty}\exp[-r^2]dr=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

および, $\exp[i\frac{\pi}{4}]=\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)$ に注意すると

$$\int_0^{\infty}\exp[ix^2]dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[ix^2]dx=\sqrt{\pi i}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$$

実部と虚部の部分を比較することにより

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x^2)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2)dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

がでてくる. これからまた

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-ix^2]dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-i)=\sqrt{\frac{\pi}{i}}$$

が得られる.