ポアソン幾何入門

池田憲明*

立命館大学理工学部

2026 年 1 月 3 日

*E-mail: nikeda@se.ritsumei.ac.jp

目 次

第1章　Introduction

このノートは書きかけです。記述や証明は不完全です。適宜追加していきます。

第2章　ポアソン多様体

2.1　ポアソン構造

M を滑らかな多様体とする。

Definition 2.1.1 $f, g, h \in C^\infty(M)$ とする $\mathbb{R}$ 上または $\mathbb{C}$ 上の双線形形式

$$\{-,-\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M), \tag{2.1}$$

が次の性質を満たすときポアソン括弧という。

$$\{f(x), g(x)\} = -\{g(x), f(x)\}, \tag{2.2}$$

$$\{f(x)g(x), h(x)\} = \{f(x), h(x)\}g(x) + f(x)\{g(x), h(x)\}, \tag{2.3}$$

$$\{\{f(x), g(x)\}, h(x)\} + \{\{g(x), h(x)\}, f(x)\} + \{\{h(x), f(x)\}, g(x)\} = 0, \tag{2.4}$$

多様体 M 上でポアソン括弧を定義したとき、これをポアソン構造という。

式 (2.2) は反対称性（歪対称性）、(2.3) を Leibniz の公式、(2.4) を Jacobi 恒等式という。組 $(M, \{-,-\})$ をポアソン多様体という。

次に局所座標表示を考える。M の局所座標を $x^i, (i = 1, \ldots, d)$ とする。ポアソン括弧の局所座標表示は関数 $\pi^{ij}(x)$ を使って、

$$\{f(x), g(x)\} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}(x), \tag{2.5}$$

と書ける。ここで $d = \mathrm{dim}M$ である。今後上下に同じ添字が 2 つ書かれている場合は、その添字について和を取るという **Einstein の規約**を採用する。すなわち、式 (2.5) は

$$\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}(x), \tag{2.6}$$

と書く。

条件 (2.2) より、π^{ij} は行列として歪対称 $\pi^{ij}=-\pi^{ji}$ となる。(2.5) では条件 (2.3) は自動的に成り立つ。さらに、条件 (2.4) は、恒等式

$$\pi^{il}\frac{\partial\pi^{jk}}{\partial x^l}+\pi^{jl}\frac{\partial\pi^{ki}}{\partial x^l}+\pi^{kl}\frac{\partial\pi^{ij}}{\partial x^l}=0, \tag{2.7}$$

と同値である。

Example 2.1.1 (ゼロポアソン構造) M 上のすべての C^∞ 関数に対して $\{f(x),g(x)\}=0$ と定義するとポアソン構造となる。

Example 2.1.2 (標準ポアソン構造) 偶数次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n}$ を考え、座標を $(x^1,\ldots,x^n,y_1,\ldots,y_n)$ とする。このとき $f(x,y),g(x,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ に対して、

$$\{f(x,y),g(x,y)\} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial y_i}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x^i}(x,y), \tag{2.8}$$

とするとポアソン括弧となる。これを標準ポアソン構造という。

Example 2.1.3 (シンプレクティック多様体) M をシンプレクティック多様体とする。すなわち、非退化閉 2 形式 ω を持つとする。このとき $f\in C^{\infty(M)}$ に対して、

$$\iota_{X_f}\omega=-\mathrm{d}f \tag{2.9}$$

となるベクトル場 X_f を f に対するハミルトンベクトル場という。$f,g\in C^{\infty(M)}$ に対して、

$$\{f,g\} \;=\; X_f g=\iota_{X_f}\mathrm{d}g=-\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega \tag{2.10}$$

と定義すると $\{-,-\}$ はポアソン括弧となる。シンプレクティック多様体はポアソン多様体である。

Example 2.1.4 標準ポアソン構造を導出するシンプレクティック構造を標準シンプレクティック構造という。余接束 T^*M には標準シンプレクティック構造が存在する。M の局所座標を x^i、ファイバーの局所座標を p_i として、

$$\omega_{can}=\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}p_i \tag{2.11}$$

とすると、シンプレクティック形式となる。この ω_{can} から式 (2.10) によって得られるポアソン括弧が式 (2.8) となる。

シンプレクティック構造でないポアソン構造の例を挙げる。

Example 2.1.5 $\mathbb{R}^3$ は奇数次元なのでシンプレクティック構造は存在しない。$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$\{x, y\} = z, \qquad \{y, z\} = x, \qquad \{z, x\} = y, \tag{2.12}$$

と定義すると、$C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上のポアソン括弧となることが確かめられる。これは実際 Lie 代数から誘導されるポアソン括弧である。Lie 代数とポアソン構造との関係はのちに述べる。

Example 2.1.6 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$\{x, y\} = xy, \qquad \{y, z\} = yz, \qquad \{z, x\} = 0, \tag{2.13}$$

と定義すると、$C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上のポアソン括弧となる。このような右辺が２次式となるポアソン括弧を２次ポアソン括弧という。

Definition 2.1.2 $(M, \{-, -\})$ をポアソン多様体とする。$f \in C^\infty(M)$ に対して、任意の $g \in C^\infty(M)$ に対して

$$X_f g = \{f, g\}, \tag{2.14}$$

となるベクトル場 $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ を f のハミルトンベクトル場という。

$X_f(-) = \{f, -\}$ と書くこともある。ポアソン括弧が非退化でないとき、f に対するハミルトンベクトル場 X_f はただ１つとは限らない。ポアソン括弧が

$$\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}(x) \tag{2.15}$$

であるとき、ハミルトンベクトル場は

$$X_f = \{f(x), -\} = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{2.16}$$

となる。

Lemma 2.1.3 a, b を実数とすると

$$aX_f + bX_g = X_{af+bg} \tag{2.17}$$

すべての、$f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\{g, f\} = 0, \tag{2.18}$$

となる関数 $g \in C^\infty(M)$ を Casimir 関数という。

以下のようにポアソン括弧はベクトル場の Lie 括弧を誘導する。

Proposition 2.1.4

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]. \tag{2.19}$$

Proof 任意の関数 $h \in C^\infty(M)$ に対して、$X_{\{f,g\}}h = [X_f, X_g]h,$ を示せばよい。Jacobi 恒等式と反対称性より、

$$\begin{aligned} X_{\{f,g\}}h &= \{\{f,g\},h\} = -\{\{g,h\},f\} - \{\{h,f\},g\} = \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\} \\ &= (X_f X_g - X_g X_f)h = [X_f, X_g]h. \end{aligned} \tag{2.20}$$

□

Definition 2.1.5 $(M, \{-,-\})$ をポアソン多様体とする。任意の $f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$L_V(\{f,g\}) = \{L_V(f), g\} + \{f, L_V(g)\} \tag{2.21}$$

となるベクトル場 $V \in \mathfrak{X}(M)$ をポアソンベクトル場という。

ポアソンベクトル場の集合を $\mathfrak{X}_{\mathrm{P}}(M)$ とかく。

Proposition 2.1.6 *1.* すべてのハミルトンベクトル場はポアソンベクトル場である。

2. ベクトル場 V は任意の f に対して

$$[V, X_f] = X_{L_V(f)} \tag{2.22}$$

となるとき、このときに限りポアソンベクトル場である。

3. ポアソンベクトル場の集合 $\mathfrak{X}(M, \{-,-\})$ はベクトル場の集合 $\mathfrak{X}(M)$ の部分 *Lie* 代数となる。

Proof 1. $f \in C^\infty(M)$ に対するハミルトンベクトル場を X_f とすると $L_{X_f} g = X_f g = \{f, g\}$ であるから、任意の $g, h \in C^\infty(M)$ に対して、

$$L_{X_f}(\{g, h\}) = \{f, \{g, h\}\} \tag{2.23}$$

Jacobi 恒等式を使うと

$$\begin{aligned}\{f, \{g, h\}\} &= \{\{f, g\}, h\}\} + \{g, \{f, h\}\} = \{X_f g, h\} + \{f, X_f h\} \\ &= \{L_{X_f} g, h\} + \{f, L_{X_f} h\}\end{aligned} \tag{2.24}$$

したがって

$$L_{X_f}(\{g, h\}) = \{L_{X_f} g, h\} + \{f, L_{X_f} h\} \tag{2.25}$$

となり X_f はポアソンベクトル場である。

2. 任意の f に対して $[V, X_f] = X_{L_V(f)}$ であるとすると、Proposition 2.1.4 より、

$$X_{L_V(\{f,g\})} = [V, X_{\{f,g\}}] \tag{2.26}$$

だが、一方

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g] \tag{2.27}$$

であるから、

$$\begin{aligned}[V, X_{\{f,g\}}] &= [V, [X_f, X_g]] = [[V, X_f], X_g] + [X_f, [V, X_g]] \\ &= [X_{L_V(f)}, X_g]] + [X_f, X_{L_V(g)}] \\ &= X_{\{L_V(f), g\}} + X_{\{f, L_V(g)\}} = X_{\{L_V(f), g\} + \{f, L_V(g)\}}\end{aligned} \tag{2.28}$$

3. ポアソンベクトル場 U, V に対して $[U, V]$ もポアソンベクトル場で、ポアソンベクトル場 U, V, W に対して

$$[U, V] = [U, V] \tag{2.29}$$

$$[[U, V], W] + [[V, W], U] + [W, U], V] = 0 \tag{2.30}$$

を示す。

2 よりハミルトンベクトル場の集合 $\mathfrak{X}_{\mathrm{Ham}}(M,\{-,-\})$ はポアソンベクトル場の集合の Lie イデアルである。

(M,ω) をシンプレクティック多様体とする。このとき $L_V\omega=0$ を満たすベクトル場 $V\in\mathfrak{X}(M)$ をシンプレクティックベクトル場という。

Proposition 2.1.7 (M,ω) をシンプレクティック多様体とする。$\{-,-\}$ を式 (2.10) で定義されるポアソン括弧とする。このとき

1. シンプレクティックベクトル場はポアソンベクトル場である。
2. シンプレクティック多様体のハミルトンベクトル場 V はポアソン多様体としてのハミルトンベクトル場でもある。

Proof 1. シンプレクティック形式 ω からポアソン括弧は $\{f,g\}=-\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega$ で定義される。このとき V をシンプレクティックベクトル場とすると、

$$\begin{aligned}\{L_V(f),g\}+\{f,L_V(g)\} &= -\iota_{X_{L_V(f)}}\iota_{X_g}\omega-\iota_{X_f}\iota_{X_{L_V(g)}}\omega=-\iota_{[V,X_f]}\iota_{X_g}\omega-\iota_{X_f}\iota_{[V,X_g]}\omega\\ &= -L_V\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega+\iota_{X_f}L_V\iota_{X_g}\omega-\iota_{X_f}L_V\iota_{X_g}\omega-\iota_{X_f}\iota_{X_g}L_V\omega\\ &= -L_V\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega=L_V(\{f,g\}) \qquad (2.31)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}X_fg &= -\iota_{X_{L_V(f)}}\iota_{X_g}\omega-\iota_{X_f}\iota_{X_{L_V(g)}}\omega=-\iota_{[V,X_f]}\iota_{X_g}\omega-\iota_{X_f}\iota_{[V,X_g]}\omega\\ &= -L_V\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega+\iota_{X_f}L_V\iota_{X_g}\omega-\iota_{X_f}L_V\iota_{X_g}\omega-\iota_{X_f}\iota_{X_g}L_V\omega\\ &= -L_V\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega=L_V(\{f,g\}) \qquad (2.32)\end{aligned}$$

X_f をシンプレクティック多様体のハミルトンベクトル場とするとポアソン括弧は

$$\{f,g\} = X_fg \qquad (2.33)$$

と定義されるから、f はこのポアソン括弧のハミルトンベクトル場である。

Definition 2.1.8 2 つのポアソン多様体 $(M_1,\{-,-\}_1)$, $(M_2,\{-,-\}_2)$ に対して滑らかな写像 $\Phi:M_1\to M_2$ が任意の $f,g\in C^\infty(M_2)$ に対して

$$\{f\circ\Phi,g\circ\Phi\}_1=\{f,g\}_2\circ\Phi, \qquad (2.34)$$

となるときポアソン写像という。

ポアソン写像 Φ が微分同相写像のとき、**ポアソン微分同相**という。

Example 2.1.7 $\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準ポアソン構造に対して、$\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ として $\Phi : (x^i, y_i) \mapsto (y_i, -x^i)$ とするとポアソン写像である。

Theorem 2.1.9 シンプレクティック同相写像はポアソン写像である。

Theorem 2.1.10 (M_1, π_1), (M_2, π_2) を 2 つのポアソン多様体とする。このとき $(M_1 \times M_2, \pi_1 + \pi_2)$ はポアソン多様体である。また、射影 $pr_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ はポアソン写像である。

Proof $[\pi_1, \pi_2]_S = 0$ なので、$[\pi_1 + \pi_2, \pi_1 + \pi_2]_S = 0$ となるので、$\pi_1 + \pi_2$ はポアソン構造である。また、

$$\{f \circ pr_i, g \circ pr_i\} = \{f(x), g(x)\}_x + \{f(x), g(x)\}_y = \{f, g\}_x = \{f, g\} \circ pr_i, \tag{2.35}$$

より pr_i はポアソン写像である。

写像 $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ が同型写像のとき、ポアソン構造は非退化であるという。非退化であることの同値な言い方として、次のようにも言える。各点 $p \in M$ に対して、写像 $\pi^\sharp : T_p^*M \to T_pM$ が単射であるとき、ポアソン構造は非退化であるという。

2.2 Schouten 括弧とポアソンバイベクトル場

接束 TM に対して $\mathfrak{X}^\bullet(M) = \Gamma(\wedge^\bullet TM)$ を多重ベクトル場のなす外積代数とする。すなわち、ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM) = \mathfrak{X}^1(M)$ 上に歪対称な積 $X \wedge Y \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ を考え、これから生成される外積代数 $\wedge^\bullet TM$ を考える。この空間の切断の集合 $\mathfrak{X}^\bullet(M) = \Gamma(\wedge^\bullet TM)$ を多重ベクトル場の空間という。$\mathfrak{X}^\bullet(M)$ と書くこともある。

M の局所座標系 $\{x^i\}$ を取ると、ベクトル場の基底は $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ なので、m 次の多重ベクトル場は局所座標で

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{i_1, \cdots, i_m = 1}^{d} \frac{1}{m!} X^{i_1 \cdots i_m}(x) \partial_{i_1} \wedge \ldots \partial_{i_m} \\ &= \frac{1}{m!} X^{i_1 \cdots i_m}(x) \partial_{i_1} \wedge \ldots \partial_{i_m}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

と書ける。ここで、$d = \dim(M)$。2つの多重ベクトル場には外積が定義できる。m 次、n 次の多重ベクトル場 X, Y を

$$X = \frac{1}{m!} X^{i_1 \dots i_m} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_m}, \tag{2.37}$$

$$Y = \frac{1}{n!} Y^{i_1 \dots i_n} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_n}, \tag{2.38}$$

とすると $X \wedge Y$ は $m+n$ 次の多重ベクトル場で、$\alpha_i \in \Omega^1(M)$ に対して

$$X \wedge Y(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+n}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m,n}} (-1)^\sigma X(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(m)}) Y(\alpha_{\sigma(m+1)}, \dots, \alpha_{\sigma(m+n)}) \tag{2.39}$$

と定義する。ここで、$\mathfrak{S}_{m,n}$ は $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+n}$ の完全反対称化を表す。局所座標で書くと

$$\begin{aligned} X \wedge Y &= \frac{m!n!}{(m+n)!} X^{i_1 \dots i_m} Y^{j_1 \dots j_n} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_m} \wedge \partial_{j_1} \wedge \dots \wedge \partial_{j_n} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n)!} X^{i_1 \dots i_m} Y^{i_{m+1} \dots j_{m+n}} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{j_{m+n}} \end{aligned} \tag{2.40}$$

となる。外積は

$$X \wedge Y = (-1)^{mn} Y \wedge X, \tag{2.41}$$

$$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z) \tag{2.42}$$

が成り立つ。

$\wedge^\bullet TM$ 上に Schouten 括弧（Schouten-Nijenhuis 括弧）$[-,-]_S : \Gamma(\wedge^\bullet TM) \times \Gamma(\wedge^\bullet TM) \to \Gamma(\wedge^\bullet TM)$ を以下のように定義する。Schouten 括弧 $[-,-]_S$ は $\mathbb{R}$ 上の双線形形式で、ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ に対しては通常のベクトル場の Lie 括弧

$$[X, Y]_S = [X, Y], \tag{2.43}$$

と定義する。次に、一般の多重ベクトル場 $X, Y, Z \in \Gamma(\wedge^\bullet(TM))$ に対しては、

$$[X, Y]_S = -(-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)} [Y, X]_S, \tag{2.44}$$

$$[X, YZ]_S = [X, Y]_S Z + (-1)^{(|X|-1)|Y|} Y [X, Z]_S, \tag{2.45}$$

$$[X, [Y, Z]_S]_S = [[X, Y]_S, Z]_S + (-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)} [Y, [X, Z]_S]_S, \tag{2.46}$$

となるように拡張する。これはポアソン括弧の定義における3つの条件式とパラレルで符号因子をつけた関係式とみなして**奇のポアソン括弧**ということがある。すなわち、それぞれ符

号つきの歪対称性、Leibniz 則、Jacobi 恒等式である。ここで $|X|$ は X の多重ベクトル場としての次数である。

次に局所座標表示を計算する。m 次、n 次の多重ベクトル場 X, Y を

$$X = \frac{1}{m!}X^{i_1\ldots i_m}\partial_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{i_m}, \tag{2.47}$$

$$Y = \frac{1}{n!}Y^{i_1\ldots i_n}\partial_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{i_n}, \tag{2.48}$$

とする。このとき、$[X,Y]_S$ は $m+n-1$ 次の多重ベクトル場で、

$$\begin{aligned}
[X,Y]_S &= \frac{1}{(m-1)!n!}X^{i_1\ldots i_m}\partial_{i_m}Y^{j_1\ldots j_n}\partial_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{i_{m-1}}\wedge\partial_{j_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{j_n}\\
&\quad -\frac{1}{m!(n-1)!}Y^{j_1\ldots j_n}\partial_{j_n}X^{i_1\ldots i_m}\partial_{j_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{j_{n-1}}\wedge\partial_{i_1}\wedge\partial_{i_m}\\
&= \left(\frac{1}{(m-1)!n!}X^{i_1\ldots i_{m-1}j}\partial_j Y^{i_m\cdots j_{m+n-1}} - \frac{1}{m!(n-1)!}Y^{i_1\ldots i_{n-1}j}\partial_j X^{i_n\cdots i_{m+n-1}}\right)\\
&\quad \times\partial_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{j_{m+n-1}}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

と計算される。

ポアソン構造は多重ベクトル場で以下のように記述される。

Theorem 2.2.1 $\pi\in\Gamma(\wedge^2 TM)$ をバイベクトル場とする。すなわち 2 次の多重ベクトル場とする。$f,g\in C^\infty(M)$ に対して

$$\{f,g\} = \pi(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g), \tag{2.50}$$

とすると、$\{-,-\}$ が ポアソン括弧であることと

$$[\pi,\pi]_S = 0, \tag{2.51}$$

が成り立つことは同値である。

x^i を M の局所座標としてポアソン括弧が、

$$\{f(x),g(x)\} = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}(x), \tag{2.52}$$

と表されているとき、ポアソンバイベクトル場 π の局所座標表示は

$$\pi = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\partial_i\wedge\partial_j = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{2.53}$$

となる。

Proof π は反対称で微分作用素なので (2.2), (2.3) を満たす。(2.4) を示す。$\pi = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\partial_i \wedge \partial_j$ とすると、

$$[\pi, \pi]_S \;=\; \frac{1}{3}\left(\pi^{il}\frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^l} + \pi^{jl}\frac{\partial \pi^{ki}}{\partial x^l} + \pi^{kl}\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{2.54}$$

したがって、この式が 0 であることは条件 (2.4) と同値である。 □

式 (2.51) を満たす π を**ポアソンバイベクトル場**という。

これからはポアソン構造をポアソンバイベクトル場 π で定義することにする。

Definition 2.2.2 （ポアソンとは限らない）バイベクトル場 π が存在するとき、１形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$ に対して、写像 $\pi^\sharp : \alpha \to \pi^\sharp(\alpha)$ を、任意の $\beta \in \Omega^1(M)$ に対して、

$$\langle \pi^\sharp(\alpha),\, \beta \rangle = \pi(\alpha, \beta), \tag{2.55}$$

と定義すると T^*M から TM への準同型写像 $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ が得られる。２形式 $\omega \in \Omega^2(M)$ を考える。ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、写像 $\omega^\flat$ を

$$\omega^\flat(X) = \iota_X \omega \tag{2.56}$$

と定義すると、TM から T^*M への準同型写像 $\omega^\flat : TM \to T^*M$ が得られる。

π, ω が非退化のとき $\pi^\sharp, \omega^\flat$ はそれぞれ同型写像となる。ハミルトンベクトル場は

$$X_f = \pi^\sharp(df) \tag{2.57}$$

と表せる。微分１形式の空間 $\Omega^1(M)$ 上の括弧をすべての $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ に対して

$$[\alpha, \beta]_\pi = L_{\pi^\sharp(\alpha)}\beta - L_{\pi^\sharp(\beta)}\alpha - \mathrm{d}(\pi(\alpha, \beta)), \tag{2.58}$$

と定義する。この $[-, -]_\pi$ を Koszul 括弧という。この括弧は完全１形式に対しては

$$[\mathrm{d}f, \mathrm{d}g]_\pi = \mathrm{d}\{f, g\} \tag{2.59}$$

となる。さらに $\alpha, \beta \in \Omega^1(M),\ f \in C^\infty(M)$ に対して、ライプニッツ則

$$[\alpha, f\beta]_\pi = f[\alpha, \beta]_\pi + L_{\pi^\sharp(\alpha)}(f)\beta \tag{2.60}$$

がなりたつ。

Proposition 2.2.3 π がポアソンバイベクトル場であることと括弧 $[-,-]_\pi$ が *Jacobi* 恒等式を満たすことは同値である。

多重ベクトル場の空間 $\Gamma(\wedge^\bullet TM)$ 上で写像 $\mathrm{d}_\pi : \Gamma(\wedge^m TM) \to \Gamma(\wedge^{m+1} TM)$ を $X \in \Gamma(\wedge^m TM)$ に対して、

$$\mathrm{d}_\pi X = [\pi, X]_S, \tag{2.61}$$

と定義すると π がポアソンバイベクトル場のとき、$\mathrm{d}_\pi^2 = 0$ となり、多重ベクトル場の空間 $\Gamma(\wedge^m TM)$ 上の微分となる。これを Poisson-Lichnerowicz 微分という。$(\Gamma(\wedge^m TM), \mathrm{d}_\pi)$ は m を次数とした複体となる。

2.3 標準座標系

Poisson 括弧は局所的には常に標準的な座標表示が存在する。以下はシンプレクティック幾何の Darboux の定理の一般化で Weinstein の分離定理といわれる。

Theorem 2.3.1 (M, π) をポアソン多様体とする。M 上の点 $x \in M$ を取ったとき、x の座標近傍 U で x を原点とする座標を $(q^1, \ldots, q^r, p_1, \ldots, p_r, z_1, \ldots, z_s)$ とする。ここで $\dim M = d = 2r + s$ である。このような座標近傍 U でポアソン括弧は以下のような標準形に書けるものが存在する。

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i,j=1}^{s} \varphi^{ij}(z) \frac{\partial}{\partial z^i} \wedge \frac{\partial}{\partial z^j} \tag{2.62}$$

ここで関数 $\varphi^{ij}(z)$ は $\varphi^{ij}(0) = 0$ となっている z^i の滑らかな関数である。

このとき $2r$ を点 x でのポアソン構造の階数（ランク）という。

Proof r に関する帰納法で示す。階数が $r = 0$ のときは任意の座標系がこの性質を持つので成り立つ。次に $r > 0$ とする。するとハミルトンベクトル場 X_f で $x = 0$ で消えないものが存在する。するとこのとき、U を十分小さくとれば座標 (q, p) で $X_p = \frac{\partial}{\partial q}$ すなわち $q, p = 1$ となるものが取れる。座標系を $(q, w^2, w^3, \ldots, w^n)$ と取り直すと

$$q, p = 1, \tag{2.63}$$

$$[X_q, X_p] = X_{\{p,q\}} = -X_1 = 0, \tag{2.64}$$

$$X_p(w) = 0, \tag{2.65}$$

となる。

次に X_q を考える。局所座標で $X_q = \xi_1 \frac{\partial}{\partial q} + \xi_i \frac{\partial}{\partial w^i}$ と書く。上記の式を使うと、$\xi_1 = 0$ で ξ_i は q によらないことがわかる。さらに x では

$$-1 = \{p, q\}(x) = X_q(p) = \xi_i(x) \frac{\partial p}{\partial y^i}(x), \tag{2.66}$$

なので X_q はベクトル場 X_q は x で消えず、さらに q によらない。これより座標系 $(q, p, y^3, \ldots, y^n)$ を

$$X_q = -\frac{\partial}{\partial p}, \tag{2.67}$$

となるように取り直すことができる。

ポアソン括弧は

$$\{q, p\} = 1, \tag{2.68}$$
$$\{q, y^i\} = -X_q(y^i) = 0, \tag{2.69}$$
$$\{p, y^i\} = -X_p(y^i) = 0, \tag{2.70}$$

となるから

$$\pi = \frac{\partial}{\partial q} \wedge \frac{\partial}{\partial p} + \{y^i, y^j\} \frac{\partial}{\partial y^i} \wedge \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{2.71}$$

となる。ここで、ヤコビ恒等式より、$\{\{y^i, y^j\}, q\} = \{\{y^i, y^j\}, p\} = 0,$ であるから、$\{y^i, y^j\}$ は (q, p) によらない関数であることがわかる。第 2 項はランク $2(r-1)$ のポアソンバイベクトル場であるから帰納法を使うことにより

$$\pi = \frac{\partial}{\partial q^1} \wedge \frac{\partial}{\partial p_1} + \pi^{ij}(z) \frac{\partial}{\partial z^i} \wedge \frac{\partial}{\partial z^j} \tag{2.72}$$

とできることがわかる。

2.4 ポアソンコホモロジー、ポアソンホモロジー

ポアソン多様体 (M, π) 上の多重ベクトル場の空間 $\mathfrak{X}^m(M)$ を考える。この空間上に外微分 $\mathrm{d}_\pi : \mathfrak{X}^m(M) \to \mathfrak{X}^{m+1}(M)$ で $(\mathrm{d}_\pi)^2 = 0$ となるものを以下のように定義する。これをポアソン微分という。

Definition 2.4.1 任意の $X \in \mathfrak{X}^m(M)$ と $\alpha_i \in \Omega^1(M)$ に対して、ポアソン微分 $\mathrm{d}_\pi : \mathfrak{X}^m(M) \to \mathfrak{X}^{m+1}(M)$ を

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_\pi X(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}) &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i L_{\pi^\sharp(\alpha_i)} X(\alpha_1, \ldots, \check{\alpha}_i, \ldots, \alpha_{m+1}) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le m+1} (-1)^{i+j} \alpha([\alpha_i, \alpha_j]_\pi, \alpha_1, \ldots, \check{\alpha}_i, \ldots, \check{\alpha}_j, \ldots, \alpha_{m+1}) \end{aligned} \tag{2.73}$$

と定義する。

d_π は微分である。すなわち $\mathrm{d}_\pi^2 = 0$ が成り立つ。これにより $(\mathfrak{X}^m(M), \mathrm{d}_\pi)$ は複体となる。

Proposition 2.4.2 $\mathrm{d}_\pi X = [\pi, X]_S$ となる。

Definition 2.4.3

$$H_\pi^m(M, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_\pi : \mathfrak{X}^m(M) \to \mathfrak{X}^{m+1}(M)) / \mathrm{Im}(\mathrm{d}_\pi : \mathfrak{X}^{m-1}(M) \to \mathfrak{X}^m(M)) \tag{2.74}$$

を m 次のポアソンコホモロジーという。

Proposition 2.4.4 ポアソン構造 π が非退化、すなわち $\omega = \pi^{-1}$ がシンプレクティック形式のとき、ポアソンコホモロジーは *de Rham* コホモロジーと同型である。すなわち

$$H_\pi^m(M, \mathbb{R}) \simeq H_{\mathrm{dR}}^m(M, \mathbb{R}). \tag{2.75}$$

Proof π が非退化のとき、$\pi^\sharp : T^*M \to TM$ は同型写像である。この写像から同型写像

$$\mathfrak{X}^m(M) \to \Omega^m(M), \tag{2.76}$$

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_\pi : \mathfrak{X}^m(M) \to \mathfrak{X}^{m+1}(M)) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{d} : \Omega^m(M) \to \Omega^{m+1}(M)), \tag{2.77}$$

$$\mathrm{Im}(\mathrm{d}_\pi : \mathfrak{X}^{m-1}(M) \to \mathfrak{X}^m(M)) \to \mathrm{Im}(\mathrm{d} : \Omega^{m-1}(M) \to \Omega^m(M)) \tag{2.78}$$

が得られる。これより、同型

$$H_\pi^m(M, \mathbb{R}) \simeq H_{\mathrm{dR}}^m(M, \mathbb{R}). \tag{2.79}$$

が得られる。

$\mu \in \Omega^{\mathrm{top}}(M)$ を最高次の非自明な微分形式すなわち体積形式とする。このとき、ハミルトンベクトル場 X_f に対して、$L_{X_f}\mu$ も最高次の微分形式であるから

$$L_{X_f}\mu = X_\mu(f)\mu \tag{2.80}$$

となる関数 $X_\mu(f)$ が存在する。ベクトル場 X_μ をモジュラーベクトル場という。このとき、

Lemma 2.4.5 *1.*

$$\mathrm{d}_\pi X_\mu = 0 \tag{2.81}$$

2. $\mu' = e^g \mu$ のとき、

$$X_{\mu'} = X_{\mu'} - X_g \tag{2.82}$$

よって X_μ を代表元として１次のポアソンコホモロジーの元 $[X_\mu] \in H^1_\pi(M)$ を取れる。

Definition 2.4.6 $[X_\mu]$ をモジュラー類という。すなわち、

$$\mathrm{mod}(M, \pi) := [X_\mu] \in H^1_\pi(M) \tag{2.83}$$

$\mathrm{mod}(M, \pi) = 0$ のとき、(M, π) はユニモジュラーであるという。

M がシンプレクティック多様体で体積形式が Liouville 体積要素 $\mu = \frac{1}{n!}\omega^n$ のときは、すべてのハミルトンベクトル場に対して $L_{X_f}\mu = 0$ である。

第3章　力学

3.1　ハミルトン力学

ポアソン構造の基本的応用を述べる。歴史的にはポアソン括弧は力学の方程式の研究の過程で、Poisson によって発見された。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n}$ を $T^*\mathbb{R}^n$ と同一視してその座標を (x^i, p_i) とする。$i = 1, \ldots, n.$ ここに標準的なシンプレクティック形式

$$\omega_{can} = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i, \tag{3.1}$$

例 2.1.3 の公式 (2.10) を使って、$f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ に対して標準的なポアソン括弧を定義することができる。座標で書くと

$$\{f, g\} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p^i}, \tag{3.2}$$

となる。特に $\{x^i, p_j\} = \delta^i_j$ となる。このような標準シンプレクティック形式を構成する座標の組 (x^i, p_i) を正準共役量という。

上記のポアソン括弧を持つ $\mathbb{R}^{2n}$ に対して、この空間上の点の運動の軌跡を考えるため、時間に相当する実パラメータ t を導入し 1 パラメータの曲線 C を考える。曲線 C を表す式は $\mathbb{R}^{2n}$ の座標で $(x^i, p_i) = (x^i(t), p_i(t))$ と t の関数で表される。力学のハミルトン形式では、t を合わせた $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ 上の関数 $H = H(x, p, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R})$ を取り、軌跡 C はポアソン括弧を使った以下の微分方程式の解で表される。

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \;=\; \{x^i, H\}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} \;=\; \{p_i, H\}, \tag{3.4}$$

これをハミルトンの運動方程式という。ポアソン括弧を計算すると方程式は、

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} \;=\; -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \tag{3.6}$$

となる。

x^i, p_i の関数 $f(x,p)$ は $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$ を満たすとき、関数 f を**保存量**という。式 (3.5), (3.6) を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

となるので、f が t に陽に依っていない、すなわち、$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} =$ のときには、この条件は $\{f, H\} = 0$ となる。保存量を第一積分ともいう。特にハミルトニアン H 自身は $\{H, H\} = 0$ となるので第一積分である。H に対するハミルトンベクトル場 X_H を使うと、$\{f, H\} = -X_H f$ であるから、f が保存量であるとき $X_H f = 0$ を満たす。

Example 3.1.1 上記の $\mathbb{R}^{2n}$ のシンプレクティック形式とポアソン括弧を取る。m を定数として、ハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n} p_i^2, \tag{3.8}$$

とする。

$$L_{ij} = x^i p_j - x^j p_i, \tag{3.9}$$

と定義すると、$\{L_{ij}, H\} = 0$ となるので、L_{ij} は保存量である。L_{ij} を角運動量という。

f_i が 1 次独立とは $\mathrm{d}f_i \in \Omega^1(M)$ が各点 $x \in M$ を取った時 T_x^*M 上で 1 次独立であるという意味である。

Theorem 3.1.1 (Liouville-Arnold の定理) *1* 次独立な n 個の関数が存在して $f_i(x,p)$ が互いにポアソン可換、すなわちがすべての $i, j = 1, \ldots, n$ に対して

$$\{f_i, f_j\} = 0 \tag{3.10}$$

となるとき完全積分可能である。さらに、c_i を n 個の実数として、等値集合

$$N = \{(x,p) | f_i = c_i\} \tag{3.11}$$

とおく。N は滑らかな多様体となる。また、N がコンパクト連結であれば n 次元トーラス T^n となる。

この定理が成り立っているとき**Liouvilleの意味で可積分**ともいう。

このとき、n 次元トーラス T^n の座標（角度変数）θ^i とその共役運動量 $I_i = f_i$ を変数に取ることができる。$(\theta^i, I_i), i = 1, \cdots, n$ を**作用角度変数**という。すなわちシンプレクティック形式を

$$\omega = \mathrm{d}\theta^i \wedge \mathrm{d}I_i \tag{3.12}$$

と取ることができる。

シンプレクティック形式を使って $\mathbb{R}^{2n}$ の体積要素を

$$\mu = \frac{1}{n!}\omega^n \tag{3.13}$$

と定義することができる。これを Liouville 体積要素という。X_f を関数 $f \in C^\infty(M)$ のハミルトンベクトル場とすると、一般に $L_{X_f}\omega = 0$ なので

$$L_{X_f}\mu = 0 \tag{3.14}$$

となる。ハミルトンベクトル場の流れで体積要素が保存される。これを Liouville の定理という。

$\mathfrak{X}(M)$ のベクトル場の部分集合 $\mathcal{D}$ を考える。（$\mathcal{D}$ を分布 distribution という。）$\mathcal{D}$ の任意の元 $X, Y \in \mathcal{D}$ に対して $[X, Y] \in \mathcal{D}$ となるとき $\mathcal{D}$ は包合的 (involutive) であるという。また $\mathcal{D}$ は Frobenius の意味で可積分という。

3.2　変分原理

ハミルトニアン H が与えられたとき

$$L = p_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} - H, \tag{3.15}$$

をラグランジアンという。H から L を求めるこの式を逆ルジャンドル変換、逆にこれを解いて L から H を求める式、

$$H = p_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} - L, \tag{3.16}$$

をルジャンドル変換という。$z^i = \dot{x}^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$ とおくと、$L = p_i z^i - H(x, p)$ であるから、$L = L(x, p, z)$ は3変数関数であるが、(3.5) を使うと $\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0$ なので、L は p_i によらない。よって

z^i を x^i と独立な変数と考えて、ラグランジアン L は x と z の 2 変数の関数 $L = L(x, z)$、すなわち、接ベクトル束 $T\mathbb{R}^n$ 上の関数となる。p_i は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial z^i}, \tag{3.17}$$

と求められる。

L の t での積分

$$S = \int_{[0,1]} \mathrm{d}t\, L = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \left(p_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} - H \right) \tag{3.18}$$

を作用汎関数という。物理では t は積分区間は $\mathbb{R}$ だが、非有界区間での積分は収束の議論が必要なため、ここでは議論を簡単にするため区間 $[0,1]$ で定義する。(x^i, p_i) は $[0,1]$ から $\mathbb{R}^{2n}$ への連続関数の空間 $C([0,1], \mathbb{R}^{2n})$ の元とする。変分原理とは、汎関数 S の空間 $C([0,1], \mathbb{R}^{2n})$ の中の停留点が運動方程式となる。という原理である。

$(x^i(t), z^i(t))$ を変数とする関数の空間を $C([0,1], \mathbb{R}^{2n})$ とする。この集合上の (x^i, z^i) の無限小変化を $(\delta x^i, \delta z^i)$ とすると $C([0,1], \mathbb{R}^{2n})$ の元 $f(x, z)$ の無限小変化は

$$\delta f(x, z) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\delta p_i \tag{3.19}$$

となるので、作用汎関数 S の無限小変化は

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{[0,1]} \mathrm{d}t\, \delta L \\ &= \int_{[0,1]} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial L}{\partial z^i}\delta z^i \right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

となるが、$z^i = \dot{x}^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$ である。これは数学的には 1 次のジェット空間 $J^1([0,1], \mathbb{R}^{2n})$ を考えることに相当する。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z^i}\delta z^i &= \frac{\partial L}{\partial z^i}\delta \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \right) \\ &= -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial z^i} \right)\delta x^i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial z^i}\delta x^i \right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

となる。正確には、この式は変分二重複体 (variational bicomplex) の理論などで正当化される。これより、

$$\delta S \;=\; \int_{[0,1]} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial z^i} \right)\delta x^i + \int_{[0,1]} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial z^i}\delta x^i \right). \tag{3.22}$$

境界項が $\int_{[0,1]}\mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial z^i}\delta x^i\right)=\frac{\partial L}{\partial z^i}(1)\delta x^i(1)-\frac{\partial L}{\partial z^i}(0)\delta x^i(0)=0$、すなわち $x^i(0)=x^i(1)=0$ と仮定すると、

$$\delta S \;=\; \int_{[0,1]}\mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial z^i}\right)\delta x^i \tag{3.23}$$

よって、運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}=0, \tag{3.24}$$

が得られる。この方程式を Euler-Lagrange 方程式という。

ハミルトン形式の場合は以下のようになる。空間 $C([0,1],\mathbb{R}^{2n})$ での (x^i,p_i) の無限小変化を $(\delta x^i,\delta p_i)$ とすると $C([0,1],\mathbb{R}^{2n})$ の元 $g(x,p)$ の無限小変化は

$$\delta g(x,p) \;=\; \frac{\partial g}{\partial x^i}\delta x^i+\frac{\partial g}{\partial p_i}\delta p_i \tag{3.25}$$

となるので、作用汎関数 S の無限小変化は

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{[0,1]}\mathrm{d}t\,\delta L\\ &= \int_{[0,1]}\mathrm{d}t\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\delta p_i+p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x^i-\frac{\partial H}{\partial x^i}\delta x^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)\\ &= \int_{[0,1]}\mathrm{d}t\left[\left(-\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial H}{\partial x^i}\right)\delta x^i+\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]+\int_{[0,1]}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta x^i)\end{aligned} \tag{3.26}$$

となる。境界項が $\int_{[0,1]}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\delta x^i)=p_i(1)\delta x^i(1)-p_i(0)\delta x^i(0)=0$、すなわち $p_i(0)=p_i(1)=0$ と仮定すると、条件 $\delta S=0$ よりハミルトンの運動方程式 (3.5), (3.6) が得られる。

3.3 Noether の定理

今、力学を考えている $\mathbb{R}^n$ 上に Lie 群が作用しているとする。Lie 群の作用については 4 章で詳しく述べるが、ここでは Lie 群の Lie 代数が $\mathbb{R}^n$ 上の関数に無限小作用する、すなわち微分として作用することだけを使う。無限小作用を δ_G とし、座標 $x^i\in\mathbb{R}^n$ に

$$\delta_G x^i=G^i(x,z) \tag{3.27}$$

作用するとする。ここで G^i は今考えている無限小作用を決める $\mathbb{R}^{2n}=T\mathbb{R}^n$ 上の関数である。これより、$z^i=\dot{x}^i$ 上の作用

$$\delta_G z^i=\frac{\mathrm{d}G^i}{\mathrm{d}t}(x,z) \tag{3.28}$$

が誘導される。

作用積分がこの不変であると仮定する。

$$\delta_G S = 0 \tag{3.29}$$

$S = \int_{[0,1]} \mathrm{d}t \, \delta L$ は (x, z) の汎関数だから、ラグランジアン L が $T\mathbb{R}^n$ 上の関数 F で t の全微分

$$\delta_G L = \delta \mathrm{d} F \mathrm{d}t(x, z) \tag{3.30}$$

となればよい、

$$\begin{aligned} \delta_G S &= \int_{[0,1]} \mathrm{d}t \, \delta L \\ &= \int_{[0,1]} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta_G x^i + \frac{\partial L}{\partial z^i} \delta_G z^i \right) \\ &= \int_{[0,1]} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} G^i + \frac{\partial L}{\partial z^i} \frac{\mathrm{d}G^i}{\mathrm{d}t} \right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

ここで、Euler-Langrange 方程式 (3.24) を満たす部分空間に制限する。

$$\begin{aligned} \delta_G S &= \int_{[0,1]} \mathrm{d}t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial z^i} G^i + \frac{\partial L}{\partial z^i} \frac{\mathrm{d}G^i}{\mathrm{d}t} \right) \\ &= \int_{[0,1]} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial z^i} G^i \right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

式 (3.30)、(3.32) より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial z^i} G^i - F \right) = 0 \tag{3.33}$$

となる。ここで、境界条件は境界項が消えるように取った。すなわち、Euler-Langrange 方程式の解空間上で、$J(x, z) = \frac{\partial L}{\partial z^i}(x, z) G^i(x, z) - F(x, z)$ は t によらない保存量である。

第4章　Lie群、Lie代数、運動量写像

4.1　Lie群、Lie代数

G を演算 $m : G \times G \to G$ を持つ群とする。$x, y \in G$ に対して $m(x, y) = xy \in G$ と書く。

Definition 4.1.1 G を滑らかな多様体とする。さらに、G が群ですべての演算、具体的には積と逆元を取る演算、

$$(x, y) \mapsto xy, \tag{4.1}$$

$$x \mapsto x^{-1} \tag{4.2}$$

が滑らかなとき G を Lie 群という。

Example 4.1.1 実数成分の n 次正方行列の集合を $M_n(\mathbb{R})$ とする。

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\} \tag{4.3}$$

は行列の積で Lie 群となる。

Definition 4.1.2 $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のベクトル空間とする。$\mathfrak{g}$ 上の $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 双線型写像 $[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x, y] = -[y, x], \tag{4.4}$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \tag{4.5}$$

を満たすとき Lie 括弧という。Lie 括弧が定義されたベクトル空間 $(\mathfrak{g}, [-, -])$ を Lie 代数または Lie 代数という。

Example 4.1.2 $\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列の集合 $M_n(\mathbb{R})$ を考える。$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して $[A, B] := AB - BA$ と定義すると $M_n(\mathbb{R})$ は Lie 代数となる。

Lie 群 G の単位元 e の接空間 T_eG は Lie 代数となる。これを Lie 群 G の Lie 代数といい、$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ と書く。

具体的には以下のように定義する。Lie 群に対して、$L_g : G \to \mathrm{Aut}(G)$ を $gh = L_g h$ と定義する。これを左移動という。右移動 $R_g : G \to \mathrm{Aut}(G)$ を $hg = R_g h$ と定義する。Lie 群 G 上のベクトル場 X がすべての G 対して、$(L_g)_* X = X$ となるとき X を左不変ベクトル場という。ベクトル場に対しては、a, b を定数として

$$
\begin{aligned}
(L_g)_*(aX + bY) &= a(L_g)_* X + b(L_g)_* Y, &(4.6)\\
(L_g)_*[X, Y] &= [(L_g)_* X, (L_g)_* Y], &(4.7)
\end{aligned}
$$

が成り立つから、X, Y が左不変ベクトル場のとき、$aX + bY$, $[X, Y]$ も左不変ベクトル場である。すなわち左不変ベクトル場の集合は Lie 代数となる。

Definition 4.1.3 Lie 群 G の左不変ベクトル場の集合を $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ と書き Lie 群 G の Lie 代数という。

左不変ベクトル場 X に対して G 単位元 e での接ベクトル $X_e \in T_eG$ がただ一つ決まる。この集合を $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ と書いて Lie 群 G の Lie 代数ということもある。逆に T_eG の元が与えられたときこれから左不変ベクトル場を作ることができる。$a \in T_eG$ を一つ取り a で生成される１パラメータ群を $e^{ta} = \exp(ta)$ と書く。これは微分方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(ta) = \exp(ta)a$ の解である。ここで $t \in \mathbb{R}$ をパラメータとする。

$e^{ta} \in G$ ととると ge^{ta} で g を通る軌道が取れる。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ge^{ta}|_{t=0}$ は T_gG における接ベクトル X_g となる。これよりベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(G)$ が決まる。このベクトル場は左不変である。このベクトル場を基本ベクトル場という。

以下のように Lie 代数の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ には標準的にポアソン構造が入る。

Example 4.1.3 [Killirov-Kostant-Souriau ポアソン構造] $\mathfrak{g}$ を有限次元 Lie 代数とする。すなわち $\mathfrak{g}$ は Lie 括弧 $[-, -]$ が定義された有限次元ベクトル空間とする。Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ を考える。$\mathfrak{g}^*$ もベクトル空間であるから、通常のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と考えて、C^∞ 関数の空間 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ を考えることができる。

$C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 上にポアソン括弧を以下のように定義することができる。$\xi \in \mathfrak{g}^*$ として関数 $f(\xi), g(\xi) \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ を考える。$\mathfrak{g}^*$ はベクトル空間なので接空間 $T_\xi \mathfrak{g}^*$ を同一視して微分写像 $\mathrm{d}_\xi f : T\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ を $\mathfrak{g}^{**} \simeq \mathfrak{g}$ の元とみなす。このとき、

$$
\{f, g\}(\xi) = \langle \xi,\, [\mathrm{d}_\xi f, \mathrm{d}_\xi g] \rangle \tag{4.8}
$$

と定義すると、ポアソン括弧となる。これを線形ポアソン構造という。このポアソン構造のポアソンバイベクトル場 $\pi_{\mathfrak{g}^*}$ は $u, v \in \mathfrak{g} = T^*_\xi \mathfrak{g}^*$ に対して

$$\pi_{\mathfrak{g}^*}(u,v)_\xi := \langle \xi,\, [u,v] \rangle \tag{4.9}$$

と定義される。x_a を $\mathfrak{g}^*$ の座標、C^c_{ab} を Lie 代数の構造定数とする。すなわち、e_a を $\mathfrak{g}$ の基底、e^a を $\mathfrak{g}^*$ の基底とすると $\xi = x_a e^a$, $[e_a, e_b] = C^c_{ab} e_c$ とする。このとき、局所座標で書くと

$$\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2} C^c_{ab} x_c \frac{\partial f}{\partial x_a} \frac{\partial g}{\partial x_b}, \tag{4.10}$$

となる。

Proposition 4.1.4 $\mathfrak{g}$ を *Lie* 代数とするとき、$\mathfrak{g}^*$ はポアソン多様体である。

4.1.1 Lie 群、Lie 代数の作用

Definition 4.1.5 群 G の M への作用とは、写像 $a : G \times M \to M$ であって以下の $1, 2$ の性質をみたすもののことである。（右）作用を $(g, x) \mapsto g \cdot x$ とすると、

1. $g, h \in G$ と $x \in M$ に対して

$$g \cdot (h \cdot x) \;\; = \;\; (gh) \cdot x. \tag{4.11}$$

2. 単位元 $e \in G$ に対して

$$e \cdot x \;\; = \;\; x. \tag{4.12}$$

Lie 群の作用があったとき、Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の作用が以下のように誘導される。$\mathfrak{g}$ の元 g と対応する T_eG の元を a とすると $t \in \mathbb{R}$ として $g = e^{ta}$ である。一方 $X_e = a$ となる左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{g}$ が取れる。これは $X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{ta}|_{t=0}$ となっている。Lie 群の作用は

$$g \cdot x \;\; = \;\; (\exp ta) \cdot x, \tag{4.13}$$

となるので T_eG での作用は、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\exp ta) \cdot x|_{t=0} = Xx, \tag{4.14}$$

となる。ここで、写像 $\rho : \mathfrak{g} = T_e G \to TM$ を $X = \rho(a)$ と定義すると、この式は、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp ta) \cdot x|_{t=0} = \rho(a)x$ となる。ρ を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の M への作用を定義する写像と考えることができる。

$g \in G$ に対して Lie 群の随伴作用 ϕ_g を $h \in G$ に対して

$$\phi_g(h) := ghg^{-1} \tag{4.15}$$

と定義する。ϕ_g の微分を Ad_g と書く。すなわち $h = e^{tX}$ として、$a \in \mathfrak{g}$ を Lie 群 G の Lie 代数の元とするとき、

$$\mathrm{Ad}_g X := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi_g(e^{ta})\big|_{t=0} \tag{4.16}$$

を Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上への随伴作用という。これを $\mathrm{Ad}_g a = gag^{-1}$ とも書く。

余随伴作用 $\mathrm{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ を $\xi \in \mathfrak{g}^*, a \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$\langle \mathrm{Ad}^*_g(\xi),\, a\rangle := \langle \xi,\, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(a)\rangle \tag{4.17}$$

と定義する。この写像の g に関する微分を $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*)$ と書く。すなわち $g = e^{tb}$ として

$$(\mathrm{ad}^*_b)(\xi) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Ad}^*_{\exp(tb)}(\xi)\big|_{t=0} \tag{4.18}$$

と定義する。

$$\mathrm{ad}_{g^{-1}}(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Ad}_{e^{-tb}}(a))\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-tb} a e^{tb})\big|_{t=0} = -[b,a] \tag{4.19}$$

であるから、式 (4.17) より

$$\langle(\mathrm{ad}^*_b)(\xi),\, a\rangle = -\langle \xi,\, [b,a]\rangle \tag{4.20}$$

となる。

式 (4.23) の左辺は $\mu([a_1, a_2]) = -\mu(\mathrm{ad}_{a_1} a_2)$ とかける。ここで ad は Lie 代数の随伴作用である。$\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ のペアリングを $\langle -, - \rangle$ とすると $\mu(a) = \langle \mu,\, a\rangle$ と書けるから、$\mathfrak{g}^*$ 上の余随伴作用 ad^* を

$$\langle \mathrm{ad}^*_{a_1}\mu,\, a_2\rangle = -\langle \mu,\, \mathrm{ad}_{a_1} a_2\rangle \tag{4.21}$$

で定義すると、式 (4.23) は $\mathrm{ad}^*_{a_1}\mu = -\rho(a_1)\mu$ と書ける。

シンプレクティック多様体に Lie 群作用が存在するとき運動量写像が構成できる。

Definition 4.1.6 (M,ω) をシンプレクティック多様体とする。写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ が $a, a_1, a_2 \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$\mathrm{d}\mu(a) = -\iota_{\rho(a)}\omega, \tag{4.22}$$
$$(\mathrm{Ad}^*_g\mu)(a) = \mu(g \cdot a) \tag{4.23}$$

を満たすとき、μ を**運動量写像**という。

上記を満たす４つ組 (M,ω,G,μ) をハミルトン G 空間という。２つ目の条件 (4.23)（同変性）は無限小の Lie 代数レベルでは

$$\rho(a_1)\mu(a_2) = \mu([a_1,a_2]) \tag{4.24}$$

と書ける。

Definition 4.1.7 M を可微分多様体、$\omega \in \Omega^2(M)$ を微分２形式、$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ とする。このとき、以下を満たすとき (M,ω,μ) は**ハミルトニアン G 空間 (Hamiltonian G-space)** という。

1. Lie 群 G が M に作用する。
2. ω はシンプレクティック形式
3. 任意の $\epsilon \in \mathfrak{g}$ に対して、$\iota_{X_{\mu(\epsilon)}}\omega = \mathrm{d}\langle\mu,\epsilon\rangle$。ここで $X_{\mu(\epsilon)}$ は $\mathfrak{g}$ の M への作用 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ から求められるベクトル場 $X_{\mu(\epsilon)} \in \mathfrak{X}(M)$ である。

条件 3 より ω は $L_{X_{\mu(\epsilon)}}\omega = (\iota_{X_{\mu(\epsilon)}}\mathrm{d} + \mathrm{d}\iota_{X_{\mu(\epsilon)}}\omega) = \mathrm{d}^2\langle\mu,\epsilon\rangle = 0$ を満たす。M が連結なら G 不変, $g^*\omega = \omega$ となる。$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ は G 同変である。すなわち $\mu(g\cdot x) = \mathrm{Ad}^*_g\mu(x)$.

式 (4.22) より１次のコホモロジー類 $[\iota_{X_{\mu(g)}}\omega] \in H^1(M,\mathbb{R})$ がゼロでなければ運動量写像は存在しない。すなわち $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$ のとき運動量写像が存在する。

Proposition 4.1.8 G が半単純のとき運動量写像が存在する。

Proposition 4.1.9 μ と μ' が２つの運動量写像のとき $\mu' - \mu = const. \in \mathfrak{g}^*$

これは式 (4.22) よりわかる。

4.1.2 余随伴軌道

$G_x := \{g \in G | g \cdot x = x\}$ を安定化部分群または等方部分群 (isotropy subgroup) という。$\mathcal{O}_x := G \cdot x = \{g \cdot x | g \in G\}$ を $x \in M$ を通る軌道 (orbit) という。

Definition 4.1.10 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ とするとき、$\mathcal{O}_\xi := \{\mathrm{Ad}_g^* \xi | g \in G\}$ を余随伴軌道 (coadjoint orbit) という。

$\mathcal{O}_\xi$ には G が推移的に作用する。すなわち $\mathcal{O}_\xi = G/G_\xi$ となる。微分写像を考えると

$$a_{\mathcal{O}_\xi} : \mathfrak{g} \to T_\xi \mathcal{O}_\xi \tag{4.25}$$

を $a \mapsto (\mathrm{ad}_a^*)_\xi$ と決めると全射である。特に

$$T_\xi \mathcal{O}_\xi = \{(\mathrm{ad}_a^*)_\xi | a \in \mathfrak{g}\} \tag{4.26}$$

Theorem 4.1.11 $\mathcal{O}_\xi$ 上にシンプレクティック形式 ω が存在する。また $(\mathcal{O}_\xi, \omega, \mu : \mathcal{O}_\xi \hookrightarrow \mathfrak{g}^*)$ はハミルトニアン G 空間である。

$T_\xi \mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ として、$v : \mathfrak{g} \to T_\xi \mathcal{O}$ を $v_\xi(a) = \mathrm{ad}_a^*(\xi)$ と定義する。この写像は全射で、特に

$$T_\xi \mathcal{O} \;\; = \;\; \{\mathrm{ad}_a^*(\xi) | v \in \mathfrak{g}\} \tag{4.27}$$

となる。

$\eta \in \mathcal{O}_\xi$, $a, b \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\omega(v_\xi(a), v_\xi(b)) \;\; = \;\; \langle \xi, [a, b] \rangle \tag{4.28}$$

とする。これは閉 2 形式である。また、これは v の全射性より非退化となることが示せる。よってシンプレクティック形式である。この ω_η から $\mathcal{O}_\xi$ に作られるポアソン括弧は例 4.1.3 の (4.9) と一致する。

Proof

Example 4.1.4 3.1 章で説明した $\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック形式とポアソン括弧を取る。ここで、$\mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$ とみなしている。$\mathbb{R}^n$ への回転群 $SO(n)$ の作用を考える。$SO(n)$ の Lie 代数 $\mathfrak{so}(n)$ は n 次の交代行列の集合、

$$\mathfrak{so}(n) \;\; = \;\; \{A \in M_n(\mathbb{R}) | {}^t A = -A\}, \tag{4.29}$$

で、$\mathbb{R}^n$ にはベクトル場として作用する。その基底は

$$\rho_{ij} \quad = \quad x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{4.30}$$

である。ρ_{ij} に対する運動量写像は $\iota_{\rho_{ij}}\omega = -\mathrm{d}L(e_{ij})$ を解いて、

$$L_{ij} \quad = \quad L(e_{ij}) = x^i p_j - x^j p_i, \tag{4.31}$$

となる。ここで e_{ij} は $\mathfrak{so}(n)$ の基底で、(i, j) 成分が $(-1)^{i+j}$、(j, i) 成分が $-(-1)^{i+j}$、他の成分が 0 の n 次正方行列である。$n = 3$ の時は $\mathbb{R}^3$ は 3 次元の空間となり、L_{ij} は角運動量といわれる。

第5章　Poisson-Lie群

5.1　Poisson-Lie群

Definition 5.1.1 G を Lie 群とする。さらに、G がポアソン多様体であるとする。すなわち、G 上にポアソンバイベクトル場 $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TG)$ が定義されているとする。このとき、群の積、

$$m : G \times G \to G, \qquad (g, h) \mapsto gh, \tag{5.1}$$

がポアソン写像であるとき、G を Poisson-Lie 群という。

ここで、$G\times G$ 上には定理2.1.10で定義される直積空間上のポアソン構造を入れる。Poisson-Lie 群の条件は $x_0, y_0 \in G,\ f, g \in C^\infty(G)$ に対して、

$$\{f, g\}(x_0 y_0) \quad = \quad \{f, g\}_x(x y_0)|_{x=x_0} + \{f, g\}_y(x_0 y)|_{y=y_0} \tag{5.2}$$

を意味する。

$$R_x y \quad := \quad yx, \tag{5.3}$$

$$L_x y \quad := \quad xy, \tag{5.4}$$

と定義すると、式 (5.2) はポアソンバイベクトル場では、

$$\pi(xy) \quad = \quad (\mathrm{d}_x R_y \otimes \mathrm{d}_x R_y)\pi(x) + (\mathrm{d}_y L_x \otimes \mathrm{d}_y L_x)\pi(y) \tag{5.5}$$

と書ける。もしくは、、

$$\pi_{xy} \quad = \quad (R_y)_* \pi_x + (L_x)_* \pi_y \tag{5.6}$$

とも書かれる。この式を満たすとき、ポアソンバイベクトル場は**乗法的 (multiplicative)** であるという。

Remark 5.1.1 定義から $\pi(e) = 0$ となるので、このポアソン構造はシンプレクティック構造ではない。

Example 5.1.1 実数係数の n 次正方行列の集合を $M_n(\mathbb{R})$ とする。

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\} \tag{5.7}$$

とする。行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

とおくと、$ad - bc = 1$ であるとき、$A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ である。この A に対して、

$$\{a, b\} = \frac{1}{4}ab, \quad \{a, c\} = \frac{1}{4}ac, \quad \{a, d\} = \frac{1}{2}bc, \tag{5.9}$$

$$\{b, c\} = 0, \quad \{b, d\} = \frac{1}{2}bd, \quad \{c, d\} = \frac{1}{4}cd, \tag{5.10}$$

と定義すると Poisson-Lie 群となる。このポアソン括弧は $\{x, ad - bc\} = 0$ を満たす。

次に、Poisson-Lie 群に対応する Lie 代数として Lie 双代数 (Lie bialgebra) を定義する。

Definition 5.1.2 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする。このとき、線形写像 $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ が存在して $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), 1 \otimes y + y \otimes 1] + [x \otimes 1 + 1 \otimes x, \delta(y)] \tag{5.11}$$

を満たすとき余括弧（cobracket）という。

Theorem 5.1.3 余積 δ が存在するとき、$\mathfrak{g}^*$ 上に括弧 $[-,-]_{\mathfrak{g}^*}$ が以下のように定義できる。$\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$ の括弧積を、任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\langle [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, x \rangle = \langle \delta(x), \xi \otimes \eta \rangle \tag{5.12}$$

とすると、$[-,-]_{\mathfrak{g}^*}$ は双線型写像となる。

交代化積 Alt を $\mathrm{Alt}(a \otimes b \otimes c) = a \otimes b \otimes c + b \otimes c \otimes a + c \otimes a \otimes b$ と定義する。

Definition 5.1.4 $\mathfrak{g}$ を Lie 代数として余括弧 δ が定義されているとする。余括弧が

$$\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{id})\delta(x) = 0 \tag{5.13}$$

を満たすとき、$(\mathfrak{g}, \delta)$ を Lie 双代数 (Lie bialgebra) という。

Theorem 5.1.5 $\mathfrak{g}$ が *Lie* 双代数のとき括弧 $[-,-]_{\mathfrak{g}^*}$ は *Lie* 括弧となる。すなわち *Jacobi* 恒等式を満たし $\mathfrak{g}^*$ は *Lie* 代数となる。

Definition 5.1.6 $(\mathfrak{g}, [-,-], \delta)$ を Lie 双代数とする。このとき $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$ を Drinfeld ダブルという

$\mathfrak{d}$ は Lie 代数となる。

Example 5.1.2

$$\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) | \mathrm{tr}(A) = 0\} \tag{5.14}$$

とする。基底を

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

ととると、

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f \quad [e, f] = h \tag{5.16}$$

余括弧を

$$\delta e = \frac{1}{2} e \wedge h, \quad \delta f = \frac{1}{2} f \wedge h, \quad \delta h = 0, \tag{5.17}$$

と定義すると Lie 双代数となる。

実際

$$\delta([h, e]) = \delta(2e) = e \wedge h, \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}_h \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_h)\delta(e) - (\mathrm{ad}_e \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_e)\delta(h) \\
&= (\mathrm{ad}_h \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_h)\frac{1}{2} e \wedge h + 0 \\
&= \frac{1}{2}[h, e] \wedge h = e \wedge h,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

となる。

Theorem 5.1.7 G を単連結 *Poisson-Lie* 群とする。このとき $\mathfrak{g} = T_e G$ は *Lie* 双代数である。

Proof ???? $\pi : G \to \wedge^2\mathfrak{g}$ をポアソンバイベクトル場とする。Poisson-Lie 群より、

$$\pi(xy) \;=\; \pi(x) + (\mathrm{Ad}(x)\otimes\mathrm{Ad}(x))\pi(y) \tag{5.20}$$

$a \in \mathfrak{g}$、$t \in \mathbb{R}$ として $x = e^{ta}$ を代入して $\pi(e^{ta}y)'|_{t=0}$ を計算し微分写像を考えると、

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\pi(y) &= \mathrm{d}_e\pi(a) + [a\otimes 1 + 1\otimes a, \mathrm{d}\pi(y)] \\ &= \delta(a) + \mathrm{ad}(a)\mathrm{d}\pi(y), \qquad (5.21) \\ \pi(e) &= 0, \qquad (5.22) \end{aligned}$$

$x = e^{ta}$, $y = e^{tb}$ を代入して $\pi(e^{ta}y)'|_{t=0}$ を計算し微分写像を考えると、

$$\mathrm{d}\pi([a,b]) \;=\; [a\otimes 1 + 1\otimes a, \mathrm{d}\pi(b)] - [b\otimes 1 + 1\otimes b, \mathrm{d}\pi(a)] \tag{5.23}$$

$\delta = \mathrm{d}\pi$ とおくと、Lie 双代数となる。

Definition 5.1.8 V をベクトル空間とする。$C^n = \mathrm{Hom}(\wedge^n\mathfrak{g}, V)$ を考える。このとき、$f \in C^n$,$x_i \in \mathfrak{g}$ として、境界作用素 ∂ を

$$\begin{aligned} \partial f(x_1 \wedge \dots x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} x_i f(x_1 \wedge \dots \wedge \check{x}_i \wedge \dots \wedge x_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1 \wedge \dots \wedge \check{x}_i \wedge \dots \wedge \check{x}_j \wedge \dots \wedge x_{n+1}) \qquad (5.24) \end{aligned}$$

と定義する。ここで $\check{x}_i$ は x_i を取り除くことを表す。

Theorem 5.1.9 $\partial^2 = 0$ となる。

Theorem 5.1.10 $\delta : \mathfrak{g} \to \wedge^2\mathfrak{g}$ は $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \wedge^2\mathfrak{g})$ の元となる。δ が余括弧すなわち式 (5.11) を満たすことは $V = \wedge^2\mathfrak{g}$ に値を取る 1 コサイクルであることと同値である。つまり $\partial\delta = 0$.

Definition 5.1.11 $\wedge^2\mathfrak{g}$ を $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \wedge^2\mathfrak{g})$ と同一視する。このとき、$r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ で $\delta = \partial r$ となるものが存在するとき、すなわち、任意の $a \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\delta(a) = \partial r(a) = [a\otimes 1 + 1\otimes a, r], \tag{5.25}$$

となるとき、$(\mathfrak{g}, [-,-], \delta)$ はコバウンダリ Lie 双代数という。

$x \in \mathfrak{g}^{\otimes 2} = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ が $x = \sum_i y_i \otimes z_i \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ と表されているとき、$x_{12} = \sum_i y_i \otimes z_i \otimes 1 \in \mathfrak{g}^{\otimes 3}$, $x_{13} = \sum_i y_i \otimes 1 \otimes z_i \in \mathfrak{g}^{\otimes 3}$ とする。

Theorem 5.1.12 r が古典 *Yang-Baxter* 方程式 $\mathfrak{g}^{\otimes 2} \to \mathfrak{g}^{\otimes 3}$

$$r \mapsto \mathrm{CYB}(r) = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0, \tag{5.26}$$

を満たすとき、$(\mathfrak{g}, [-,-], \delta)$ はコバウンダリ *Lie* 双代数である。

このとき r は古典 r-行列という。

Proof

$$\mathrm{Alt}((\delta \otimes \mathrm{id})\delta(x)) + [x, \mathrm{CYB}(r)] = 0. \tag{5.27}$$

第6章　亜群と亜代数

6.1　Lie亜群

亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ を定義する。

Definition 6.1.1 $(\mathcal{G}, M)$ を集合とし $s : \mathcal{G} \to M$ および $t : \mathcal{G} \to M$ をそれぞれ $\mathcal{G}$ から M への写像とする。以下の条件を満たすとき $(\mathcal{G}, M)$ を亜群 (groupoid) という。

$\mathcal{G}$ の 2 つの元 g, h に対して $t(g) = s(h)$ のとき積 $gh \in \mathcal{G}$ が定義され、$s(gh) = s(g)$、$t(gh) = t(h)$ となる。さらにこの積に対して以下が成り立つ。ここで $s(g) = x$, $t(g) = y$ とおく。

1. 積が定義される $\mathcal{G}$ の 3 つの元 g, h, k に対して結合律 $(gh)k = g(hk)$ が成り立つ。

2. 各 x に対して $g1_y = 1_x g = g$、$s(1_x) = t(1_x) = x$ を満たす $1_x \in \mathcal{G}$ が存在する。1_x を単位元という。

3. $\mathcal{G}$ の任意の元 g に対して $gg^{-1} = 1_y$, $g^{-1}g = 1_x$ となる $\mathcal{G}$ の元 g^{-1} が存在する。このとき $s(g^{-1}) = y$, $t(g^{-1}) = x$ となる。

$\mathcal{G}$ の元をアロー (arrow) といい、s をソース写像、t をターゲット写像という。亜群を $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ という記号で書く。

Definition 6.1.2 $\mathcal{G}$,M が滑らかな多様体ですべての演算が滑らかであり、（s, t が沈め込み写像であるとき、）亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ を Lie 亜群 (Lie groupoid) という。

Example 6.1.1 (群) $M = \{*\}$ を１つ元の集合とする。このとき、$s = t$ となり、$\mathcal{G}$ は群である。

Example 6.1.2 (pair groupoid) M を集合とする。$\mathcal{G} = M \times M$ とし、$g = (x, y) \in \mathcal{G}$ に対して $s(g) = x$, $t(g) = y$ と定義する。次に、積を $(x, y) \in \mathcal{G}$, $(y, z) \in \mathcal{G}$ に対して $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$ と定義すると亜群となる。

Example 6.1.3 (action groupoid) 集合 M に群 H が作用しているとする。$x \in M$, $\alpha \in H$ に対して、$\mathcal{G}$ の元を $g = (\alpha x, x)$ と決め、$s(g) = \alpha x$, $t(g) = x$ と定義する。すると $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ は亜群となる。

Example 6.1.4 (fundamental groupoid) M を多様体として、$\mathcal{G}$ の元 g を M の 2 つの点 x から y への向きのついた連続曲線 γ とし、$s(g) = x$, $t(g) = y$ とする。

$\mathcal{G}$ の 2 つの元の積を以下のように決める。M 上の点 x から y への曲線 g と y から z への曲線 h に対して、gh を 2 つの曲線をつなげた x から z への曲線とする。すると $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ は亜群となる。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] & y \arrow[r, bend left, "h"] & z \end{tikzcd}$$

6.2 シンプレクティック亜群

亜群 $\mathcal{G}$ 上の関数 $f \in C^\infty(\mathcal{G})$ が**乗法的 (multiplicative)** とは、任意の $g, h \in \mathcal{G}$ に対して、

$$f(g \cdot h) = f(g) + f(h) \tag{6.1}$$

であることである。$\mathcal{G}^{(2)} = \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ として積を $m : \mathcal{G}^{(2)} \to \mathcal{G}$, $m(g,h) = g \cdot h$ と書く。$\mathcal{G}^{(2)}$ の第１成分と第 2 成分への射影をそれぞれ pr_1、pr_2 とする。すると、式 (6.1) は

$$m^* f = pr_1^* f + pr_2^* f \tag{6.2}$$

と書ける。

一般に $\mathcal{G}$ 上の微分形式 $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{G})$ が

$$m^* \alpha = pr_1^* \alpha + pr_2^* \alpha \tag{6.3}$$

を満たすとき乗法的微分形式という。

$(\mathcal{G}, M)$ を Lie 亜群とする。ここで $\mathcal{G}$ がシンプレクティック多様体であるとする。すなわち、$\mathcal{G}$ 上に非退化閉 2 形式 ω が存在するとする。

Definition 6.2.1 $\mathcal{G}^{(3)} = \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ の部分多様体 $L = \{(x, y, z) | xy = z\}$ を $\mathcal{G}$ のグラフという。

Definition 6.2.2 $\mathcal{G}$ がシンプレクティック多様体のとき、$\mathcal{G}^{(3)}$ 上のシンプレクティック形式を $\omega^{(3)} = (-\omega) \times (-\omega) \times \omega$ とする。L がこのシンプレクティック形式で $\mathcal{G}$ の Lagrangian 部分多様体のとき、すなわち、$\omega^{(3)}|_L = 0$ のとき、$\mathcal{G}$ をシンプレクティック亜群という。

Proposition 6.2.3 シンプレクティック亜群のシンプレクティック形式は乗法的である。

Example 6.2.1

6.3 Lie 亜代数

Definition 6.3.1 E を滑らかな多様体上のベクトル束とする。E 上にアンカー写像 (anchor map) と呼ばれる束写像 $\rho : E \to TM$ と Lie 括弧 $[-,-] : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ が存在して、任意の $e_i \in \Gamma(E)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対してライプニッツ則

$$[e_1, fe_2] \;\; = \;\; f[e_1, e_2] + \rho(e_1)f \cdot e_2, \tag{6.4}$$

が成り立つとき $(E, \rho, [-,-])$ を Lie 亜代数 (Lie algebroid) という。

Lie 亜代数は Lie 代数や多様体上のベクトル場の空間の一般化である。

Example 6.3.1 (Lie 代数) M が１点からなる集合 $M = \{pt\}$ のとき、Lie 亜代数は Lie 代数である。

Example 6.3.2 (接 Lie 亜代数 (tangent Lie algebroid)) ベクトル束を接束 $E = TM$ とし $\rho = \mathrm{id}$ とする。括弧 $[-,-]$ を通常のベクトル場の Lie 括弧とする。すると $(TM, \mathrm{id}, [-,-])$ は Lie 亜代数となる。これを接 Lie 亜代数という。

Example 6.3.3 (作用 Lie 亜代数 (Action Lie algebroid)) 滑らかな多様体 M に Lie 群 G が滑らかな作用をしているとする。$g, h \in G$, $p \in M$ として、作用とは写像 $M \times G \to M$, $(p, g) \mapsto p \cdot g$ で、

$$((p, g), h) = (p, gh) \qquad (p, e) = p \tag{6.5}$$

を満たすもののことである。$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数として、これの微分写像 $M \times \mathfrak{g} \to M$ によって Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の多様体 M への作用が求められる。これより束写像 $\rho : M \times \mathfrak{g} \to TM$ が決まる。これは $e_i \in \mathfrak{g}$ として Lie 代数の準同型となる。すなわち

$$[\rho(e_1), \rho(e_2)] \quad = \quad \rho([e_1, e_2]), \tag{6.6}$$

を満たす。$(\rho, [-,-])$ は Lie 亜代数の定義みたすことが示せる。$(E = M \times \mathfrak{g}, \rho, [-,-])$. この Lie 亜代数を作用 Lie 亜代数 (action Lie algebroid) という。

Example 6.3.4 (ポアソン多様体の余接束) 重要な Lie 亜代数としてポアソン構造から構成される Lie 亜代数がある。

(M, π) をポアソン多様体とする。ポアソンバイベクトル場 $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ から束写像 $\pi^\sharp : T^*M \to TM$, $\alpha \mapsto \pi^\sharp(\alpha)$ をすべての微分 1 形式 $\beta \in \Omega^1(M)$ に対して $\langle \pi^\sharp(\alpha), \beta \rangle = \pi(\alpha, \beta)$ と定義する。微分 1 形式の空間 $\Omega^1(M)$ 上の Lie 括弧をすべての $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ に対して

$$[\alpha, \beta]_\pi = L_{\pi^\sharp(\alpha)}\beta - L_{\pi^\sharp(\beta)}\alpha - \mathrm{d}(\pi(\alpha, \beta)), \tag{6.7}$$

と定義する。この括弧を Koszul 括弧という。上記の写像 $\pi^\sharp : T^*M \to TM$ をアンカー $\rho = -\pi^*$ とする。すると、$(T^*M, -\pi^\sharp, [-,-]_\pi)$ は Lie 亜代数という。これをポアソ Lie 亜代数という。

Example 6.3.5 (捻ったポアソン構造 (Twisted Poisson structure)) 多様体 M 上でバイベクトル場 $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ と 3 形式 $H \in \Omega^3(M)$ を考える。$\langle \otimes^3 \pi, H \rangle$ は任意の 1 形式 $\alpha_1 \in \Omega^1(M)$ に対して、
$\langle \otimes^3 \pi, H \rangle(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := H(\pi^\sharp(\alpha_1), \pi^\sharp(\alpha_2), \pi^\sharp(\alpha_3))$ と定義する。このとき π と H が、

$$\frac{1}{2}[\pi, \pi]_S = \langle \otimes^3 \pi, H \rangle, \tag{6.8}$$

$$\mathrm{d}H = 0, \tag{6.9}$$

を満たすとき (M, π, H) を捻ったポアソン多様体という。これは $H = 0$ のときポアソン多様体である。束写像アンカーをポアソン多様体のときと同様に $\rho = -\pi^\sharp : T^*M \to TM$ と定義する。また $\Omega^1(M)$ 上の Lie 括弧を任意の $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ に対して

$$[\alpha, \beta]_{\pi,H} = \mathcal{L}_{\pi^\sharp(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi^\sharp(\beta)}\alpha - \mathrm{d}(\pi(\alpha, \beta)) + \iota_{\pi^\sharp(\alpha)}\iota_{\pi^\sharp(\beta)}H, \tag{6.10}$$

と定義すると、$(T^*M, -\pi^\sharp, [-,-]_{\pi,H})$ は Lie 亜代数となる。

次に Lie 亜群と Lie 亜代数の関係を考える。これは Lie 群と Lie 代数の関係の一般化となっている。

Definition 6.3.2 Lie 亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ の左不変ベクトル場とは以下を満たすベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$ である。

1. X はターゲット写像 t に接する。

2. ２つの積が可能な元 $g, h \in \mathcal{G}$ に対して

$$\mathrm{d}L_g X_h = X_{gh} \tag{6.11}$$

u を亜群の単位元とする。多様体 M 上の Lie 亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ に対してターゲット写像の微分の単位元上のベクトル束 $A = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}t)|_{u(M)} \to M$ を考える。これは $e \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}t)|_{u(M)}$ に対して $\mathrm{d}L_g(e|_{1_{s(g)}})$ とすることにより $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ の左不変ベクトル場の空間と同一視できる。

Theorem 6.3.3 アンカー写像 $\rho : A \to M$ を

$$\rho_x := \mathrm{d}_{1_x} s : A_x = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}t)|_{1_x} \to T_x M, \tag{6.12}$$

さらに A_x 上の *Lie* 括弧をベクトル場の *Lie* 括弧を制限したものとして決める。つまり、$e_1, e_2 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}t)|_{u(M)}$ に対応した左不変ベクトル場 $\widehat{e}_1, \widehat{e}_2$ に対して

$$\widehat{[e_1, e_2]} := [\widehat{e}_1, \widehat{e}_2] \tag{6.13}$$

と定義する。このとき、$(A, [-,-], \rho)$ はリー亜代数となる。

Proof $f \in C^\infty(M)$ $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathrm{Lie}(\mathcal{G}))$ とする。$\widehat{(f\tau)} = (s^* f)\widehat{\tau}$ と ($\widehat{\sigma} = \rho(\sigma)$ より）$\widehat{\sigma}(s^* f) = s^*(\rho(\sigma))f$ であることから

$$\widehat{[\sigma, f\tau]} = [\widehat{\sigma}, s^* f \widehat{\tau}] = s^* f[\widehat{\sigma}, \widehat{\tau}] + s^*(\rho(\sigma)f)\widehat{\tau} = f[\sigma,\tau]\widehat{+(\rho}(\sigma)f)\tau. \tag{6.14}$$

Lie 群と Lie 環については以下のように Lie 環に対して対応する Lie 群が必ず存在する。

Theorem 6.3.4 (Lie の第 3 定理) 任意の実有限次元 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ に対して、$\mathfrak{g} = T_e G$ となる単連結 *Lie* 群 G が存在する。

これは Lie 亜群と Lie 亜代数についてはかならずしも成り立たない。

6.4 Lie 亜代数上の Lie 亜代数微分

リー亜代数 E に対して、双対束 E^* の外積代数 $\wedge^\bullet E^*$ を考え、その切断の空間 $\Gamma(\wedge^\bullet E^*)$ を考える。$\Gamma(\wedge^\bullet E^*)$ の元を E 微分形式という。E^* の基底を e^a とすると、$\alpha \in \Gamma(\wedge^m E^*)$ は局所的に

$$\alpha = \frac{1}{m!}\alpha_{a_1\dots a_m}(x) e^{a_1}\wedge\dots\wedge e^{a_m}, \tag{6.15}$$

と、交代テンソルで表される。

この空間上に外微分 ${}^E\mathrm{d}: \Gamma(\wedge^m E^*) \to \Gamma(\wedge^{m+1}E^*)$ で $({}^E\mathrm{d})^2 = 0$ となるものを以下のように定義できる。これを Lie 亜代数の E 微分 (Lie 亜代数微分) という。

Definition 6.4.1 任意の $\alpha \in \Gamma(\wedge^m E^*)$ と $e_i \in \Gamma(E)$ に対して、E 微分 ${}^E\mathrm{d}: \Gamma(\wedge^m E^*) \to \Gamma(\wedge^{m+1}E^*)$ を

$$\begin{aligned} {}^E\mathrm{d}\alpha(e_1,\dots,e_{m+1}) &= \sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}\rho(e_i)\alpha(e_1,\dots,\check{e}_i,\dots,e_{m+1}) \\ &+ \sum_{1\le i<j\le m+1}(-1)^{i+j}\alpha([e_i,e_j],e_1,\dots,\check{e}_i,\dots,\check{e}_j,\dots,e_{m+1}), \end{aligned} \tag{6.16}$$

と定義する。*

Lie 亜代数の定義式を使うと $({}^E\mathrm{d})^2 = 0$ が示せる。

Proof

———————————————————-

Definition 6.4.2

$$H^m_{LA}(M) = \mathrm{Ker}({}^E\mathrm{d}: \Gamma(\wedge^m E^*) \to \Gamma(\wedge^{m+1}E^*))/\mathrm{Im}({}^E\mathrm{d}: \Gamma(\wedge^{m-1}E^*) \to \Gamma(\wedge^m E^*)), \tag{6.17}$$

を m 次の Lie 亜代数コホモロジーという。

*式 (6.16) で、添え字 i, j は M の局所座標ではなく $\Gamma(E)$ の元の順序を表す。

6.5 接続

Lie 亜代数 E はベクトル束なので、ベクトル束の通常の接続 ∇ を考えることができる。ベクトル束 E の接続とは $\mathbb{R}$-線形写像 $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes T^*M)$ で、任意の $e \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ に対してライプニッツ則、

$$\nabla(fe) = f\nabla e + (\mathrm{d}f) \otimes e, \tag{6.18}$$

を満たすものである。

E^* 上の双対接続を任意の $\mu \in \Gamma(E^*)$ と $e \in \Gamma(E)$ に対して、

$$\mathrm{d}\langle \mu,\, e\rangle = \langle \nabla\mu,\, e\rangle + \langle \mu,\, \nabla e\rangle, \tag{6.19}$$

と定義する。

局所座標表示を考える。e_a を E の基底、e^a を E^* の基底とすると、接続 1 形式は $\omega = \omega_{ai}^b \mathrm{d}x^i \otimes e^a \otimes e_b$ と書け、これを使って接続は $\nabla_i e_a = -\omega_{ai}^b \mathrm{d}x^i \otimes e_b$ および $\nabla_i e^a = \omega_{bi}^a \mathrm{d}x^i \otimes e^b$ と書ける。一般の切断 $u = u^a e_a \in \Gamma(E)$ および $\alpha = \alpha_a e^a \in \Gamma(E^*)$ の共変微分は

$$\begin{aligned} \nabla_i u^a &= \partial_i u^a - \omega_{bi}^a u^b, \qquad (6.20)\\ \nabla_i \alpha_a &= \partial_i \alpha_a + \omega_{ai}^b \alpha_b, \qquad (6.21) \end{aligned}$$

となる。

接続と双対接続はベクトル束 F に値を取る微分作用素として拡張できる。これを共変外微分という。$\Omega^l(M, F) = \Gamma(M, \wedge^l T^*M \otimes F)$ を F に値を取る l 次微分形式の空間とする。共変微分 $\nabla : \Gamma(F) \to \Gamma(F \times T^*M)$ が与えられたとき、微分形式の次数を 1 上げる微分作用素（共変外微分）$\nabla : \Omega^l(M, F) \to \Omega^{l+1}(M, F)$ は $\alpha \in \Omega^k(M, F)$, $\beta \in \Omega^l(M, F)$ に対して

$$\nabla(\alpha \wedge \beta) = \nabla\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \nabla\beta. \tag{6.22}$$

という性質を要求すると一意に決定される。

たとえば $F = E^{\otimes m} \otimes E^{*\otimes n}$ に値を取る l 形式を $\alpha \in \Omega^l(M, E^{\otimes m} \otimes E^{*\otimes n})$ とする。$\omega = \omega_{bi}^a \mathrm{d}x^i \otimes e_a \otimes e^b$ を接続 $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes T^*M)$ の接続 1 形式とすると、局所座標表示は以下のようになる。

$$\nabla_j \alpha_{k_1 \ldots k_l}{}^{a_1 \ldots a_m}{}_{b_1 \ldots b_n} = \partial_j \alpha_{k_1 \ldots k_l}{}^{a_1 \ldots a_m}{}_{b_1 \ldots b_n} - \sum_{i=1}^m \omega_{cj}^{a_i} \alpha_{k_1 \ldots k_l}{}^{a_1 \ldots a_{i-1} c a_{i+1} \ldots a_m}{}_{b_1 \ldots b_n} + \sum_{i=1}^n \omega_{b_i j}^{c} \alpha_{k_1 \ldots k_l}{}^{a_1 \ldots a_m}{}_{b_1 \ldots b_{i-1} c b_{i+1} \ldots b_n}. \tag{6.23}$$

6.5.1 Lie 亜代数接続

E を Lie 亜代数とするとき、もう一つの「共変微分」が定義できる。

Definition 6.5.1 E を Lie 亜代数とする。E' をベクトル束とする。$e \in \Gamma(E)$, $e' \in \Gamma(E')$, $f \in C^\infty(M)$ とする。$\mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）線形写像 ${}^E\nabla : \Gamma(E') \to \Gamma(E' \otimes E^*)$ がライプニッツ則、

$$ {}^E\nabla_e(fe') = f {}^E\nabla_e e' + (\rho(e)f)e', \tag{6.24} $$

を満たときベクトル束 E' 上の E 接続（Lie 亜代数接続）という。

このとき、通常の接続は $E = TM$ としたときの特別な場合 $\nabla = {}^{TM}\nabla$ と考えることができる。すなわち $e = X \in \mathfrak{X}(M)$ をベクトル場として $\rho(X)f = Xf$ と考える。

逆に、通常の接続 ∇ が存在するとき標準的な E 接続が構成できる。まず E' が接束 $E' = TM$ のとき、任意の $e \in \Gamma(E)$、$v \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、写像 ${}^E\nabla : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM \otimes E^*)$ を

$$ {}^E\nabla_e v \ := \ L_{\rho(e)}v + \rho(\nabla_v e) = [\rho(e), v] + \rho(\nabla_v e), \tag{6.25} $$

とすると E 接続となる。これを接束 TM 上の（標準的）E 接続という。この E 接続は逆接続ともよばれる。

Lie 亜代数 E 自身の上の微分写像 ${}^E\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes E^*)$ を任意の $e, e' \in \Gamma(E)$ に対して、

$$ {}^E\nabla_e e' := \nabla_{\rho(e)} e', \tag{6.26} $$

と定義すると E 接続となる。これを E 上の標準 E 接続という

(M, π) をポアソン多様体とするとき、例 6.3.4 より余接束 T^*M 上に Lie 亜代数が定義される。この T^*M 上の Lie 亜代数上の E 接続を反変接続ともいう。

共変外微分と同様に以下の E 共変外微分 ${}^E\mathrm{d}^\nabla$ が定義される。$\Omega(E, E') = \Gamma(\wedge^m E^* \otimes E')$ を E' に値を取る m 次の E 微分形式の空間とする。E' に値を取る m 次の E 微分形式 $\alpha \in \Omega(E, E')$ が与えられたとき、E 共変外微分 ${}^E\mathrm{d}^\nabla$ を E 微分形式の次数を 1 上げる微分作用素 ${}^E\mathrm{d}^\nabla : \Omega^m(E, E') \to \Omega^m(E, E')$ は $\alpha \in \Omega^k(E, E')$, $\beta \in \Omega^l(E, E')$ に対して

$$ {}^E\mathrm{d}^\nabla(\alpha \wedge \beta) \ = \ {}^E\mathrm{d}^\nabla\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge {}^E\mathrm{d}^\nabla\beta. \tag{6.27} $$

という性質を要求すると一意に決定される。ここで、$\alpha \in \Omega^0(E, E') = \Gamma(E')$ に対しては ${}^E\mathrm{d}^\nabla\alpha = {}^E\nabla\alpha$ とする。

具体的には $\alpha \in \Omega^m(E, E')$ に対して、$e_i \in \Gamma(E)$ として以下の式で定義される。

$$
\begin{aligned}
{}^E\mathrm{d}^\nabla \alpha(e_1, \ldots, e_{m+1}) &:= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i-1 E}\nabla_{e_i} \alpha(e_1, \ldots, \check{e}_i, \ldots, e_{m+1}) \\
&\quad + \sum_{1 \le i < j \le m+1} (-1)^{i+j} \alpha([e_i, e_j], e_1, \ldots, \check{e}_i, \ldots, \check{e}_j, \ldots, e_{m+1}). \quad (6.28)
\end{aligned}
$$

6.5.2 曲率、振率

接続から導出される重要な幾何学的な概念に曲率と振率がある。

Definition 6.5.2 ∇ を通常の接続とする。$v, v' \in \mathfrak{X}(M)$ をベクトル場とする。曲率 $R \in \Omega^2(M, E \otimes E^*)$、振率 $\Theta \in \Omega^2(M, E)$ は、

$$
\begin{aligned}
R(v, v') &:= [\nabla_v, \nabla_{v'}] - \nabla_{[v, v']}, \\
\Theta(v, v') &:= \nabla_v v' - \nabla_{v'} v - [v, v'],
\end{aligned}
$$

と定義される。

この E 接続版が定義される。

Definition 6.5.3 ${}^E\nabla$ を $E' = TM$ 上の E 接続、$e, e' \in \Gamma(E)$ とする。このとき E 曲率 ${}^ER \in \Gamma(M, E \otimes E^* \otimes \wedge^2 E^*)$ および E 振率 $T \in \Gamma(M, E \otimes \wedge^2 E^*)$ を、

$$
\begin{aligned}
{}^ER(e, e') &:= [{}^E\nabla_e, {}^E\nabla_{e'}] - {}^E\nabla_{[e, e']}, \\
T(e, e') &:= {}^E\nabla_e e' - {}^E\nabla_{e'} e - [e, e'],
\end{aligned}
$$

と定義する。

さらに E 曲率に対して以下の関係があるテンソル S を基本曲率という。

$$
{}^ER = \langle \rho, S \rangle, \quad (6.29)
$$

ここで $\langle -, - \rangle$ は TM と T^*M のペアリングである。具体的には、基本曲率 $S \in \Omega^1(M, E \otimes \wedge^2 E^*)$ は

$$
\begin{aligned}
S(s, s') &:= \mathcal{L}_s(\nabla s') - \mathcal{L}_{s'}(\nabla s) - \nabla_{\rho(\nabla s)} s' + \nabla_{\rho(\nabla s')} s \\
&\quad - \nabla[s, s'] = (\nabla T + 2\mathrm{Alt}\, \iota_\rho R)(s, s'),
\end{aligned}
$$

と定義される。ここで Alt は E^* に関する交代化を意味する。

局所座標表示で表すと、

$$
\begin{aligned}
T_{ab}^c &\equiv -C_{ab}^c + \rho_a^i \omega_{bi}^c - \rho_b^i \omega_{ai}^c, && (6.30)\\
R_{ijb}^a &\equiv \partial_i \omega_{aj}^b - \partial_j \omega_{ai}^b + \omega_{aj}^c \omega_{ci}^b - \omega_{ai}^c \omega_{cj}^b, && (6.31)\\
S_{iab}^c &\equiv \nabla_i T_{ab}^c + \rho_b^j R_{ija}^c - \rho_a^j R_{ijb}^c, \\
&= -\partial_i C_{ab}^c + \omega_{di}^c C_{ab}^d - \omega_{ai}^d C_{db}^c - \omega_{bi}^d C_{ad}^c + \rho_a^j \partial_j \omega_{bi}^c - \rho_b^j \partial_j \omega_{ai}^c \\
&\quad + \partial_i \rho_a^j \omega_{bj}^c - \partial_i \rho_b^j \omega_{aj}^c + \omega_{ai}^d \rho_d^j \omega_{bj}^c - \omega_{bi}^d \rho_d^j \omega_{aj}^c, && (6.32)\\
{}^E R_{abc}^d &= \rho_c^i S_{iab}^d, && (6.33)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、共変微分 $\nabla_i T_{ab}^c$ は

$$
\nabla_i T_{ab}^c \equiv \partial_i T_{ab}^c - \omega_{di}^c T_{ab}^d + \omega_{ai}^d T_{db}^c + \omega_{bi}^d T_{ad}^c. \quad (6.34)
$$

6.6 Courant 亜代数

Lie 亜代数の他に様々な亜代数を考えることができる。その中で重要な亜代数として Courant 亜代数がある。この亜代数は物理の弦理論などに応用されている。

初めに Courant 亜代数を定義する。

Definition 6.6.1 (Courant 亜代数) E を多様体 M 上のベクトル束とする。
この上に以下の 3 つの演算を考える。内積つまり $\Gamma(E)$ 上の対称非退化双線形形式 $\langle -, - \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$、束写像、すなわちアンカー写像 $\rho : E \to TM$、Dorfman 括弧といわれる $\Gamma(E)$ 上の双線形形式、$[-,-]_D : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$. [†]この 3 つの演算が $e_i \in \Gamma(E)$、$f \in C^\infty(M)$ に対して次の公理を満たすとする。

1. $[e_1, [e_2, e_3]_D]_D = [[e_1, e_2]_D, e_3]_D + [e_2, [e_1, e_3]_D]_D$.

2. $\rho([e_1, e_2]_D) = [\rho(e_1), \rho(e_2)]$.

3. $[e_1, f e_2]_D = f[e_1, e_2]_D + (\rho(e_1) \cdot f) e_2$.

[†]Dorfman 括弧は反対称とは仮定しない。

4. $[e, e]_D = \frac{1}{2}\mathcal{D}(e, e)$.

5. $\rho(e_1) \cdot \langle e_2,\, e_3\rangle = \langle [e_1, e_2]_D,\, e_3\rangle + \langle e_2,\, [e_1, e_3]_D\rangle$.

ここで、$\mathcal{D}$は$\langle \mathcal{D}f,\, x\rangle = \frac{1}{2}\rho(x)f$で定義される$\Gamma(E)$上の微分である。4つ組$(E, [-,-]_D, \rho, \langle -,\, -\rangle)$が以上の条件を満たすとき **Courant 亜代数** (*Courant algebroid*) という。

Example 6.6.1 滑らかな多様体Mに対して接束と余接束の直積束$TM \oplus T^*M$を考える。この上の切断$X + \alpha, Y + \beta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$に対して内積を、

$$\langle X + \alpha,\, Y + \beta\rangle = \iota_X\beta + \iota_Y\alpha, \tag{6.35}$$

アンカー写像を$f \in C^\infty(M)$に対して、

$$\rho(X + \alpha)f = Xf, \tag{6.36}$$

閉3形式$H \in \Omega^3(M)$に対してDorfman括弧を

$$[X + \alpha, Y + \beta]_D = [X, Y] + \mathcal{L}_X\beta - \iota_Y \mathrm{d}\alpha + \iota_X\iota_Y H, \tag{6.37}$$

と定義すると、$(TM \oplus T^*M, \langle -,\, -\rangle, \rho, [-,-]_D)$はCourant亜代数となる。このCourant亜代数は（3形式Hを持つ）標準*Courant*亜代数という。

Example 6.6.2 (M, π)をポアソン構造$\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$を持つポアソン多様体とする。$R \in \Gamma(\wedge^3 TM)$を3次の多重ベクトル場として$[\pi, R]_S = 0$を満たすものとする。ここで$[-,-]_S$はSchouten括弧である。

M上のベクトル束$E = TM \oplus T^*M$上に以下の3つの演算を考える。内積$\langle -,-\rangle$は標準Courant亜代数と同じで

$$\langle X + \alpha,\, Y + \beta\rangle = \iota_X\beta + \iota_Y\alpha, \tag{6.38}$$

とする。アンカー写像を$\rho(X + \alpha) = \pi^\sharp(\alpha)$と定義する。ここで$\pi^\sharp : T^*M \to TM$はポアソンバイベクトル場$\pi$より、任意の1形式$\alpha = \alpha_i(x)dx^i$に対して$\pi^\sharp(\alpha) = \pi^{ij}\alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$と定義される写像である。

双線形形式$[-,-]^\pi_R$は$X + \alpha, Y + \beta \in \Gamma(TM \oplus T^*M)$に対して

$$[X + \alpha, Y + \beta]^\pi_R := [\alpha, \beta]_\pi + L^\pi_\alpha Y - \iota_\beta \mathrm{d}_\pi X - \iota_\alpha\iota_\beta R,$$

と定義する。ここで、微分は Lichnerowicz-Poisson 微分 $\mathrm{d}_\pi(-) = [\pi, -]_S$、括弧 $[-,-]_\pi : T^*M \times T^*M \to T^*M$ はポアソンバイベクトル場 π より定義される Koszul 括弧 $[\alpha, \beta]_\pi = L_{\pi^\sharp(\alpha)}\beta - L_{\pi^\sharp(\beta)}\alpha - \mathrm{d}(\pi(\alpha, \beta))$. $\iota_\beta X = \beta(X)$, $L^\pi_\alpha Y = \mathrm{d}_\pi \alpha(Y) + \alpha(\mathrm{d}_\pi Y)$ である。この 4 つ組 $(E = TM \oplus T^*M, \langle -, - \rangle, [-,-]^\pi_R, \rho = 0 \oplus \pi^\sharp)$ は Courant 亜代数となる。これを *Poisson Courant* 亜代数（反変 Courant 亜代数）という。

Definition 6.6.2 (Leibniz 代数) $\mathfrak{g}$ をベクトル空間とする。$\mathfrak{g}$ 上の $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 双線型写像 $[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \tag{6.39}$$

を満たすとき Leibniz 括弧という。Leibniz 括弧が定義されたベクトル空間 $(\mathfrak{g}, [-,-])$ を Lie 代数または Leibniz 代数という。

Lie 括弧から条件 $[x, y] = -[y, x]$ を取り除いた括弧が Leibniz 括弧である。Dorfman 括弧は Leibniz 括弧である。

Definition 6.6.3 (Leibniz 亜代数) E を多様体 M 上のベクトル束とする。
この上に以下の 3 つの演算を考える。内積つまり $\Gamma(E)$ 上の対称非退化双線形形式 $\langle -, - \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$、アンカー写像といわれる束写像 $\rho : E \to TM$、Dorfman 括弧といわれる $\Gamma(E)$ 上の双線形形式、$[-,-]_D : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$. [‡]この 3 つの演算が $e_i \in \Gamma(E)$、$f \in C^\infty(M)$ に対して次の公理を満たすとする。

1. $[e_1, [e_2, e_3]_D]_D = [[e_1, e_2]_D, e_3]_D + [e_2, [e_1, e_3]_D]_D$.
2. $[e_1, f e_2]_D = f[e_1, e_2]_D + (\rho(e_1) \cdot f)e_2$.

4 つ組 $(E, [-,-]_D, \rho, \langle -, - \rangle)$ が以上の条件を満たすとき **Leibniz 亜代数** (*Leibniz algebroid*) という。

6.7 Dirac 構造

Definition 6.7.1 (Courant algebroid) 多様体 M 上の Courant 亜代数 E の部分束 L が以下の条件を満たすとき Dirac 構造という。

[‡]Dorfman 括弧は反対称とは仮定しない。

1. すべての $e_1, e_2 \in \Gamma(L)$ に対して、$(e_1, e_2) = 0$.

2. $\mathrm{rank}(L) = \frac{1}{2}\mathrm{rank}(E)$.

3. すべての $e_1, e_2 \in \Gamma(L)$ に対して、$[e_1, e_2]_D \in \Gamma(L)$.

条件１，２を満たす場合、概 Dirac 構造という。

Example 6.7.1 例 6.6.1 の標準 Courant 亜代数 $TM \oplus T^*M$ を取る。$\omega \in \Omega^2(M)$ を 2 形式とする。

$$D_\omega = \{X + \omega^\flat(X) | X \in \mathfrak{X}(M)\} \tag{6.40}$$

を考える。ω がプレシンプレクティック形式、すなわち閉 2 形式とすると、D_ω は Dirac 構造となる。

Example 6.7.2 例 6.6.1 の標準 Courant 亜代数 $TM \oplus T^*M$ を取る。$\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ をポアソンとは限らないバイベクトル場として、

$$D_\pi = \{\pi^\sharp(\alpha) + \alpha | \alpha \in \Omega^1(M)\} \tag{6.41}$$

を考える。π が捩ったポアソン構造のとき、D_π は Dirac 構造となる。

$\pi \in \mathfrak{X}(M)$ をポアソンバイベクトル場とし、$\pi^\sharp : T^*M \to M$ のグラフ $D_\pi = \{\pi^\sharp(\alpha) + \alpha | \alpha \in \Omega^1(M)\} \subset \Gamma(TM \oplus T^*M)$ を考えると、D_π は Dirac 構造である。このとき、閉 2 形式 $B \in \Omega^2(M)$ として、変換

$$\tau_B(X + \alpha) = X + \alpha + B(X) \tag{6.42}$$

を定義する。τ_B をゲージ変換、もしくは B 変換という。このとき、$\tau_B D_\pi$ も Dirac 構造である。もしバイベクトル場 π' が存在して $D_{\pi'} = \tau_B D_\pi$ となるならば、π' はポアソン構造である。

$$\pi' \ = \ \pi(1 + B\pi)^{-1} \tag{6.43}$$

と書ける。これは π, π' が非退化なら

$$\pi'^{-1} \ = \ \pi^{-1} + B \tag{6.44}$$

と同値である。$\tau_B = e^B$ は定義 12.2.10 でのゲージ変換である。

第7章　次数付き幾何

7.1　次数付き代数

7.1.1　記号

V を（通常の）ベクトル空間とする。ベクトル空間 V に整数 $n \in \mathbb{Z}$ を付随させる。特に記号 V_n で整数 n のラベルを持つベクトル空間を表す。これを次数 n の次数付きベクトル空間という。単に次数 n のベクトル空間ということもある。空間として、すべての次数のベクトル空間の直和、

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n \tag{7.1}$$

を考える。

V_m と V_n の元、$u \in V_m$, $v \in V_n$ に対して、次数付き可換な積 $uv \in V_{m+n}$ を定義する。すなわち積は V_{m+n} の元であって $uv = (-1)^{mn} vu$ を満たすとする。今後は次数付き可換な積の構造も常に仮定する。次数は次数と整合的な積構造が入っていることを前提とした記号である。これを次数付き可換代数という。

記号 $V[n]$ でもとの次数から次数を n ずらしたベクトル空間を表す。より一般に V_m が次数 m のベクトル空間のとき $V_m[n]$ は次数 $m+n$ のベクトル空間である。これは $V_{m+n} = V_m[n]$ とも書く。

V が次数 n であるとき、双対空間 V^* は次数 $-n$ とする。

$n \in \mathbb{Z}_2$ とした場合、V を超ベクトル空間という。このときは次数の偶奇を入れ替える記号 Π を使うことがある。たとえば V が通常のベクトル空間の時、ΠV は元が奇のベクトルであるベクトル空間である。次数 $\mathbb{Z}$ で考えているとき、$\mathbb{Z}$ 法 2 で考えると超ベクトル空間とみなせる。

7.1.2 次数付き微分 Lie 代数

ここでは次数付きベクトル空間 V を $\mathfrak{g}$ と書く。次数付きベクトル空間

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n \tag{7.2}$$

を考える。この上に、双線形形式 $[-,-] : \mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_l \to \mathfrak{g}_{k+l-n}$ が存在して、$x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[x,y] = -(-1)^{(|x|-n)(|y|-n)}[y,x] \tag{7.3}$$

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + (-1)^{(|x|-n)(|y|-n)}[y,[x,z]] \tag{7.4}$$

を満たすとき、次数 $-n$ の次数付き Lie 括弧という。$(\mathfrak{g}, [-,-])$ を次数 $-n$ の次数付き Lie 代数という。

次数付き Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [-,-])$ 上の次数 $+1$ の微分作用素 d とは線形写像 $\mathrm{d} : \mathfrak{g}^k \to \mathfrak{g}^{k+1}$ で、

$$\mathrm{d}^2 = 0, \tag{7.5}$$

$$\mathrm{d}[x,y] = [\mathrm{d}x, y] + (-1)^{|x|-n}[x, \mathrm{d}y] \tag{7.6}$$

を満たすものである。

３つ組 $(\mathfrak{g}, [-,-], \mathrm{d})$ を次数付き微分 Lie 代数という。

7.1.3 L_∞-代数と L_∞-射

次数付き微分 Lie 代数の一般化として L_∞-代数を定義し、L_∞-射を定義する。

次数付きベクトル場 $V = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k$ の次数付きテンソル代数 $T(V) = \oplus_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n}$ を考える。

$v_k \in T(V)$ として、余積といわれる写像 $\triangle : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ を

$$\triangle(v_1, \cdots, v_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon(\sigma) \frac{1}{k!(n-k)!} (v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) \otimes (v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(n)}),$$

とする。ここで σ は置換で、$\epsilon(\sigma)$ は置換 σ の符号である。余積は $(\mathrm{id}_{T(V)} \otimes \triangle) \circ \triangle = (\triangle \otimes \mathrm{id}_{T(V)}) \circ \triangle$ のとき余結合的という。また、$\sigma : T(V) \otimes T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ を $\sigma : v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$ として、$\triangle = \sigma \circ \triangle$ のとき余可換という。余積が余結合的、余可換となることを仮定する。次に次数１の多重線形写像

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_k : \quad & V^{\otimes k} \longrightarrow V, \\ & (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \mapsto \mathfrak{l}_k(v_1 \cdots v_k), \end{aligned}$$

を考え余微分 *codifferential* $Q=\sum_{k=1}^{\infty}Q_k$ を

$$Q_k(v_1,\cdots,v_n) \;=\; \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\epsilon(\sigma)\frac{1}{k!(n-k)!}\mathfrak{l}_k(v_{\sigma(1)}\cdots v_{\sigma(k)})\otimes v_{\sigma(k+1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(n)}.$$

と定義する。

Definition 7.1.1 組 (V,Q) は $Q^2=0$ となるとき、L_∞-代数（強ホモトピー Lie 代数）という。

$Q^2=0$ を次数で展開すると、最初の項は $\mathfrak{l}_1^2=0$ となるので、$\mathfrak{l}_1=d$ は微分である。次の項 $\mathfrak{l}_2(-,-)$ は (7.3) と (7.6) を満たす次数 -1 の双線形形式 $\mathfrak{l}_2(-,-)=[-,-]$ となる。$\mathfrak{g}_{k-1}=V_{k-1}$ で $k\geq 3$ のとき $\mathfrak{l}_k=0$ とすると、$Q^2=0$ の 3 次の項より $\mathfrak{l}_2(-,-)=[-,-]$ の Jacobi 恒等式 (7.4) を満たすので次数付き微分 Lie 代数となる。

次に L_∞-代数の L_∞-射を定義する。

Definition 7.1.2 2 つの L_∞-代数 (V_1,Q_1) の写像 $U:(V_1,Q_1)\longrightarrow(V_2,Q_2)$, は次数を保ち、$\triangle\circ U=(U\otimes U)\circ\triangle$ を満たすとき、余準同型 (cohomomorphism) という。

Definition 7.1.3 2 つの L_∞-代数の間の余準同型 U が $UQ_1=Q_2U$ となるとき L_∞-射という。

記号 $e^v:=1+v+\frac{1}{2!}v\otimes v+\frac{1}{3!}v\otimes v\otimes v+\cdots$ と $\mathfrak{l}_*(e^v):=\mathfrak{l}_1(v)+\frac{1}{2!}\mathfrak{l}_2(v\otimes v)+\frac{1}{3!}\mathfrak{l}_3(v\otimes v\otimes v)+\cdots$ とする。

Definition 7.1.4 $\mathfrak{l}_*(e^v)=0$ を L_∞-代数 (V,Q) の Maurer-Cartan 方程式という。

Maurer-Cartan 方程式 $\mathfrak{l}_*(e^v)=0$ は $Q(e^v)=\mathfrak{l}_*(e^v)\otimes e^v=0$ とも書ける。L_∞-代数が次数付き微分 Lie 代数のとき、$k\geq 3$ のとき $\mathfrak{l}_k=0$ なので $Q(e^v)=0$ は通常の Maurer-Cartan 方程式 $dv+\frac{1}{2}[v,v]=0$ となる。

7.2 次数付き多様体

7.2.1 層と局所環付き空間

多様体上の層とは 3 つ組 $(\mathcal{S},pr,M)$ のことである。ここで、M は多様体、$\mathcal{S}$ は位相空間で、$pr:\mathcal{S}\to M$ は射影である。ここでは M,$\mathcal{S}$ は可微分多様体とする。$x\in M$ に対して

$\mathcal{S}_x = pr^{-1}(x)$ を茎 (stalk) という。$\mathcal{S}$ の適当な近傍 V を取れば $pr : V \to pr(V)$ は（微分）同相写像となるとなる。M の開集合 U に対して、$s : U \to \mathcal{S}$ で $pr(s(x)) = x$ となるものを U の断面 (section) という。

ここでは M の各開集合 U に対して、環 $\mathcal{C}(U)$ を対応させる。このとき、層を $\mathcal{O}_M = \mathcal{S}$ とも書いて $(M, \mathcal{O}_M)$ を局所環付き空間といい、層 $\mathcal{O}_M$ を構造層という。

Example 7.2.1 $C(U)$ を M の開集合 U 上の連続関数の集合とする。これは関数の和と積で環となる（可換環)。2つの開集合 $U_1 \subset U_2$ に対して制限写像 $C(U_2) \to C(U_1)$ を考える。これを使って帰納的極限を C_x とする。

$$C_x = \lim_{U \to x} C(U). \tag{7.7}$$

$\mathcal{U}_x$ を $\mathcal{U}$ の元の中で x を含むものの集合とすると $C_x = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_x} C(U)/\sim$ となる。ここで、$f \in C(U_1)$ と $g \in C(U_2)$ の同値関係は $\rho_V^{U_1}(f) = \rho_V^{U_2}(g)$ となる x の近傍 $V \subset U_1 \cap U_2$ が存在することとする。$C(M) = \cup_{x \in M} C_x$ とおく。$C(M)$ の位相は以下のように定義する。関数 $f \in C(U)$ によって定義される。$C(M)$ 部分集合 $\{f_x | x \in U\}$ を開集合とする。$C(M) \simeq \Gamma(M, C)$ は環になる。これを連続関数の層という。

上記と同値な別の層の定義を述べる。M の開集合の全体を $\mathcal{U}$ と書く。各開集合 $U \in \mathcal{U}$ に対してある集合 $\mathcal{S}(U)$ を対応させ、以下の条件を満たすとき集合の前層という。

1. $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ で $U_1 \subset U_2$ となるものに対して、写像（制限写像）$\rho_{U_1}^{U_2} : \mathcal{S}(U_2) \to \mathcal{S}(U_1)$ が与えられている。
2. $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{U}$ が $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ ならば、$\rho_{U_1}^{U_2} \circ \rho_{U_2}^{U_3} = \rho_{U_1}^{U_3}$ を満たす。

ここで前層 $\{\mathcal{S}(U)\}$ に対して

$$\mathcal{S} = \bigcup_{x \in M} \mathcal{S}_x, \qquad \mathcal{S}_x = \lim_{U \to x} \mathcal{S}(U). \tag{7.8}$$

とおく。$f \in \mathcal{S}(U)$ のとき、これに対応する $\mathcal{S}_x$ の元を $f_x \in \mathcal{S}_x$ とかく。$\{f_x | x \in U\}$ を開集合として $\mathcal{S}$ の位相が定義される。写像 $\mathcal{S}(U) \to \Gamma(U, \mathcal{S})$, $x \mapsto f_x$ を考える。前層で次の2つの条件が成り立つとき層という。

1. $f, g \in \mathcal{S}(U)$, $U = \cup_i U_i$ に対して全ての i について $\rho_{U_i}^U f = \rho_{U_i}^U g$ のとき $f = g$.
2. $U = \cup_i U_i$, $f_i \in \mathcal{S}(U_i)$ とする。このとき全ての i について $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i} f_i = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j} f_j$ が成り立つとき $\rho_{U_i}^U f = f_i$ となる $f \in \mathcal{S}(U)$ が存在する。

7.2.2 次数付き多様体

次数付き多様体 (*graded manifold*) を定義する。

通常の多様体 M 上の次数付き多様体は次数付き可換代数を M 上の構造層とする局所環付き空間である。これを、次数付き多様体 $\mathcal{M} = (M, \mathcal{O}_M)$ と表す。ここで、M は通常の多様体で、$\mathcal{O}_M$ は構造層を表す。次数は次数付きベクトル空間としての積を考える。

M の局所座標開近傍を $U \subset M$ とする。V を次数付きベクトル空間、$S^{\cdot}(V)$ は V 上の次数付き自由可換代数とする。すると構造層は局所的に $C^\infty(U) \otimes S^{\cdot}(V)$ と表される。

$n \in \mathbb{Z}_2$ の場合は $\mathcal{M}$ を超多様体という。

以降では n は非負の整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。この場合、$N-$ 多様体という。負の整数も許す場合は次数付き多様体の定義に問題が生ずる場合がある。

7.2.3 記号

ここでは次数付き多様体の例として次数つきベクトル束を考え、その記号を説明する。同時に次数付きベクトル束の記号を説明する。

M を通常の多様体とする。与えられたベクトル束 $E \longrightarrow M$ に対して $E[n]$ をファイバー方向の座標を次数 n ずらしたベクトル束とする。多様体 M の座標は次数 0 である。ファイバーの次数を n ずらした接束、余接束はそれぞれ$T[n]M, T^*[n]M$ と書く。この記号は底空間 M および E のファイバーが次数つきである場合にも同様の記号で書く。$TM[1]$ は底空間とファイバーの両方が次数 1 の接束を表す。これを底空間の次数、ファイバーの次数の順で次数 $(1, 1)$ という。ベクトル空間 V と双対空間 V^* の次数は逆なので $T^*M[1]$ は底空間の次数が 1 でファイバーの次数 -1 の余接束を表す。$T^*[n]M[1]$ は $T^*M[1]$ でファイバーの次数を n ずらしたものなので次数 $(1, n-1)$ の余接束を表す。

Example 7.2.2 E を多様体 M 上のベクトル束としてその余接束 T^*E を考える。これは二重ベクトル束の特別な場合である。

底多様体 M の局所座標を x^i、E のファイバーの局所座標を q^a とし、それらの余接空間の局所座標を (ξ_i, p_a) とする。

次数付きベクトル束 $T^*[n]E[1]$ とは局所座標に以下のように次数をつけたものである。(x^i, q^a) は次数 $(0, 1)$、(ξ_i, p_a) は次数 n ずらして $(0+n, -1+n) = (n, n-1)$ となる。

$\mathbb{Z}_2$ の次数を考えた超多様体の時は ΠTM は通常の多様体 M 上の奇のファイバーをもつベクトル束である。自然な同型として $\Pi TM \simeq T[1]M$ となる。

次数付きベクトル空間 $E[1]$ 上の関数の空間 $C^\infty(E[1])$ を考える。これは通常のベクトル束 E の外積代数 $\wedge^\bullet E$ の切断の空間と同型である。すなわち $C^\infty(E[1]) \simeq \Gamma(\wedge^\bullet E)$. これは以下のように対応させる。$E[1]$ の次数 1 の座標 q^a に対して外積代数の基底 e^a を対応させる。すると、$C^\infty(E[1])$ の関数

$$\frac{1}{s!} f_{a_1 \cdots a_s}(x) q^{a_1} \cdots q^{a_s} \in C^\infty(E[1]) \tag{7.9}$$

は

$$\frac{1}{s!} f_{a_1 \cdots a_s}(x) e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_s} \in \Gamma(\wedge^\bullet E). \tag{7.10}$$

に対応する。これにより $C^\infty(E[1])$ の積は $\Gamma(\wedge^\bullet E)$ の積に同型写像で移る。

Example 7.2.3 多様体の余接束 T^*M に対して、ファイバーの座標の次数を 1 ずらした余接束 $\mathcal{M} = T^*[1]M$ を考える。T^*M の局所座標を (x^i, ξ_i) とする。ここで x^i は M の局所座標 ξ_i は $\xi = \xi_i \mathrm{d}x^i$ となる余接空間の局所座標とする。定義から局所座標は座標変換で以下のように変換する。

$$\begin{aligned} x'^i &= x'^i(x), & (7.11)\\ \xi'_i &= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \xi_j. & (7.12) \end{aligned}$$

ここで、$x'^i(x)$ は x^i から x'^i への座標変換関数である。ξ_i の次数を 1 ずらしたものを考える。すなわち、$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$ となる積を定義する。すると (x^i, ξ_i) は $T^*[1]M$ の局所座標となる。この空間の上の関数の空間 $C^\infty(T^*[1]M)$ を考えると、ξ_i は反対称な積が入っているので、その元 f は ξ_i については $d = \dim(M)$ 以下の多項式となるので

$$f(x, \xi) = \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k!} f^{i_1 \ldots i_k} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k} \tag{7.13}$$

と書ける。

$$f(x, \xi) = \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k!} f^{i_1 \ldots i_k} \partial_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_k} \tag{7.14}$$

$\Gamma(\wedge^\bullet TM) = \bigoplus_{k=0}^d \mathfrak{X}^k(M)$ $C^\infty(T^*[1]M) \simeq \bigoplus_{k=0}^d \mathfrak{X}^k(M)$

Example 7.2.4 E を多様体 M 上のベクトル束とする。E の余接束 T^*E を考え、次数をずらした対応する次数付き多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]E[1]$ を構成しよう。M の座標近傍系の一つの開集合 U 上の局所座標を x^i, E のファイバーの局所座標を η^a とし、余接束 T^*E のファイバーの x^i, η^a に対応する座標をそれぞれ ξ_i, ζ_a とする。$\mathcal{M} = T^*[2]E[1]$ を構成するので、それぞれの局所座標 $(x^i, \eta^a, \xi_i, \zeta_a)$ の次数を $(0, 1, 2, 1)$ にずらす。今はファイバーに内積 $\langle -, - \rangle$ が入っていると仮定し、基底に対して、$\langle e_a, e_b \rangle = k_{ab}$ となるとする。この内積を用いて $\zeta_a = k_{ab}\eta^b$ と ζ_a を η^a で表す。すると局所座標系は次数 $(0, 1, 2)$ の (x^i, η^a, ξ_i) となる。

$M_b^a(x)$ をベクトル束 E の変換関数とする。すなわち E のファイバーの基底を e_a とすると、基底は座標変換で $e'_a = M_a^b(x)e_b$ と変換する。このとき、$T^*[2]E[1]$ の 2 つの座標近傍系の座標変換を定義する。局所座標系は座標変換で以下のように変換するように決める。

$$x'^i = x'^i(x) \tag{7.15}$$

$$\eta'^a = M_b^a \eta^b \tag{7.16}$$

$$\xi'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\xi_j - \frac{1}{2}k_{ac}M_b^a \partial_i M_d^b \eta^c \eta^d. \tag{7.17}$$

この座標変換で M 全体につなげたものを次数付き多様体 $T^*[2]E[1]$ と定義する。

(7.17) の第 2 項より $T^*[2]E[1]$ 上の関数をなにかのベクトル束の切断とみなすことはできない。

$T^*[2]E[1]$ は余接束なので標準的なシンプレクティック構造を導入できる。シンプレクティック形式は局所座標では

$$\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\xi_i + \frac{1}{2}\mathrm{d}(k_{ab}\eta^a) \wedge \mathrm{d}\eta^b, \tag{7.18}$$

と書ける。

7.3 次数付き微分幾何

7.3.1 ベクトル場と微分形式

次数付き多様体上の基本的な概念を説明する。

以下次数付き多様体 $\mathcal{M}$ の局所座標を z^a とする。次数付き多様体上の関数 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上の写像 $D : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ で、微分 (derivation) であるもの、すなわち $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対

して Leibniz 則

$$D(fg) = (Df)g + (-1)^{|f||D|} f(Dg), \tag{7.19}$$

を満たすものの集合を $\mathrm{Der}(\mathcal{M})$ とおく。$\mathrm{Der}(\mathcal{M})$ を $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) = \Gamma(T\mathcal{M})$ と書き次数付きベクトル場の空間という。$\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ は通常のベクトル場と同様に次数付き Lie 括弧が定義される。

$$[D, D'] = DD' - (-1)^{|D||D'|} D'D. \tag{7.20}$$

今後 D は通常のベクトル場と同じ記号 $X = D$ で表す。ベクトル場 X を局所座標で表すと

$$X = X^a(z) \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^a}, \tag{7.21}$$

と表される。ここで $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^a}$ は、$\mathcal{M}$ 上の関数 f の z^a での左偏微分で、$k = 1, 2, \ldots n$ として

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^{a_k}} (z^{a_1} z^{a_2} \ldots z^{a_k} \ldots z^{a_n}) = (-1)^{|z^{a_1}| + \ldots + |z^{a_{k-1}}|} (z^{a_1} z^{a_2} \ldots \check{z}^{a_k} \ldots z^{a_n}), \tag{7.22}$$

と符号を決める。$\check{z}^{a_k}$ は z^{a_k} を取り除く意味である。右偏微分は

$$\frac{f\overleftarrow{\partial}}{\partial z^a} \quad := \quad (-1)^{(|f| - |z^a|)|z^a|} \frac{\overrightarrow{\partial} f}{\partial z^a}, \tag{7.23}$$

で定義する。次数 m の関数 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対して、$\varepsilon(f) = mf$ となるベクトル場を Euler ベクトル場という。局所座標では

$$\varepsilon = |z^a| z^a \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^a} \tag{7.24}$$

となる。2 つの次数付きベクトル場を $X = X^a(z) \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^a}$ と $Y = Y^a(z) \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^a}$ とする。これらの次数付き Lie 括弧は局所座標で

$$[X, Y] \quad = \quad X^a \frac{\overrightarrow{\partial} Y^b}{\partial z^a} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^b} - (-1)^{|X||Y|} Y^a \frac{\overrightarrow{\partial} X^b}{\partial z^a} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^b}, \tag{7.25}$$

となる。

通常の拡張としてベクトル場の空間の双対空間として次数付き微分形式の空間が定義される。次数付き外微分は

$$\mathrm{d}f(z) \quad = \quad \mathrm{d}z^a \frac{\overrightarrow{\partial} f}{\partial z^a}, \tag{7.26}$$

となる。ここで、$\mathrm{d}z^a$ は $T^*\mathcal{M}$ のファイバーの基底である。基底は

$$\mathrm{d}z^a\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^b}\right) \ = \ \delta^a{}_b, \tag{7.27}$$

を満たす。次数付き微分形式の空間を $\Omega^\bullet(\mathcal{M}) = \Gamma(\wedge^\bullet T^*\mathcal{M})$ と書く。ここで $\wedge^\bullet$ は次数付きの外積である。次数付き微分形式 α に対して $|\alpha|$ を全次数とする。全次数とは「微分形式の次数 + 次数付きの次数」である。すなわち $|\mathrm{d}| = 1$, $|\mathrm{d}z^a| = |z^a| + 1$ となる。

今後 $(z^a, \mathrm{d}z^a)$ を $T[1]\mathcal{M}$ の座標と考え、$\mathcal{M}$ 上の微分形式、すなわち $\Omega^\bullet(\mathcal{M})$ の元を $C^\infty(T[1]\mathcal{M})$ と考える。これは通常の微分形式の空間が次数付き多様体の接束上の関数の空間と同型であることと同様である。

このとき、ベクトル場 X に対して、（次数付き）内部積は以下の $T[1]\mathcal{M}$ 上の次数付きベクトル場（微分作用素）として定義する。

$$\iota_X \ = \ (-1)^{|X|}X^a(z)\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \mathrm{d}z^a}, \tag{7.28}$$

ここで $\mathrm{d}z^a$ は $T[1]\mathcal{M}$ のファイバーの座標で、微分演算子は $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \mathrm{d}z^a}\mathrm{d}z^b = \delta^b{}_a$. を満たす。$|\iota_X| = |X| - 1$ である。

以上の記号の下で関数 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対して、ベクトル場での微分は

$$Xf \ = \ (-1)^{|X|}\iota_X \mathrm{d}f = (-1)^{(|f|+1)|X|}\mathrm{d}f(X), \tag{7.29}$$

となる。

Proof 式 (7.29) は以下のように確認できる。$Xf = X^a(z)\frac{\overrightarrow{\partial}f}{\partial z^a}$ なので、

$$(-1)^{|X|}\iota_X \mathrm{d}f \ = \ (-1)^{|X|}(-1)^{|X|}X^a(z)\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial dz^a}\left(\mathrm{d}z^a\frac{\overrightarrow{\partial}f}{\partial z^a}\right), \tag{7.30}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(X) \ &= \ \mathrm{d}z^a\frac{\overrightarrow{\partial}f}{\partial z^a}\left(X^b(z)\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^b}\right) \\
&= \ (-1)^{(|f|-|z|)|X|}\left[\mathrm{d}z^a\left(X^b(z)\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^b}\right)\right]\frac{\overrightarrow{\partial}f}{\partial z^a} \\
&= \ (-1)^{(|f|-|z|)|X|}(-1)^{(|X|-|z|)(|z|+1)}X^b(z)\left[\mathrm{d}z^a\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^b}\right)\right]\frac{\overrightarrow{\partial}f}{\partial z^a} \\
&= \ (-1)^{(|f|+1)|X|}X^a(z)\frac{\overrightarrow{\partial}f}{\partial z^a},
\end{aligned} \tag{7.31}$$

であり、右辺となる。

7.3.2 Cartan 公式

Lie 微分の拡張として次数付き Lie 微分を

$$L_X = \iota_X \mathrm{d} + (-1)^{|X|} \mathrm{d}\iota_X, \tag{7.32}$$

と定義する。L_X の次数は $|L_X| = |X|$ である。α と β を次数付き微分形式とする。このとき、外微分 d, 内部積 ι_X, Lie 微分 L_X の以下の公式を示すことができる。

$$\alpha \wedge \beta = (-)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha, \tag{7.33}$$

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta, \tag{7.34}$$

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = \iota_X \alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|(|X|+1)} \alpha \wedge \iota_X \beta, \tag{7.35}$$

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha||X|} \alpha \wedge L_X \beta, \tag{7.36}$$

$$L_X \mathrm{d} = (-1)^{|X|} \mathrm{d} L_X, \tag{7.37}$$

$$\iota_X \iota_Y - (-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)} \iota_Y \iota_X = 0, \tag{7.38}$$

$$L_X \iota_Y - (-1)^{|X|(|Y|-1)} \iota_Y L_X = \iota_{[X,Y]}, \tag{7.39}$$

$$L_X L_Y - (-1)^{|X||Y|} L_Y L_X = L_{[X,Y]}. \tag{7.40}$$

これは $(\mathrm{d}, \iota_X, L_X)$ が次数付き Lie 代数をなすことを示す。

7.3.3 微分形式

微分形式とベクトル場に関する公式をまとめる。α を $\mathcal{M}$ 上の m 形式とする。局所座標表示を $\alpha = \frac{1}{m!} dz^{a_1} \wedge \cdots dz^{a_m} \alpha_{a_1 \cdots a_m}(z)$ とする。ベクトル場 X との縮約 $\alpha(X, -, \cdots, -)$ は

$$\alpha(X, -, \cdots, -) = (-1)^{|X|(|\alpha|+1)} \iota_X \alpha(-, \cdots, -). \tag{7.41}$$

となる。実際以下のように示せる。

Proof

$$
\begin{aligned}
\alpha(X,-,\cdots,-) &= \frac{1}{m!}\mathrm{d}z^{a_1}\wedge\cdots\mathrm{d}z^{a_m}\alpha_{a_1\cdots a_m}(z)\left(X^b\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^b}\right)\\
&= \frac{1}{m!}(-1)^{|X|(|\alpha|-|z|-1)}\mathrm{d}z^{a_1}\left(X^b\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial z^b}\right)\mathrm{d}z^{a_2}\wedge\cdots\mathrm{d}z^{a_m}\alpha_{a_1\cdots a_m}(z)\\
&= \frac{1}{(m-1)!}(-1)^{|X|(|\alpha|-|z|-1)}(-1)^{(|X|-|z|)(|z|+1)}\\
&\quad \times X^{a_1}\mathrm{d}z^{a_2}\wedge\cdots\mathrm{d}z^{a_m}\alpha_{a_1\cdots a_m}(z)\\
&= \frac{1}{(m-1)!}(-1)^{|X||\alpha|}X^{a_1}\mathrm{d}z^{a_2}\wedge\cdots\mathrm{d}z^{a_m}\alpha_{a_1\cdots a_m}(z)\\
&= (-1)^{|X||\alpha|}(-1)^{|X|}\iota_X\alpha. \qquad (7.42)
\end{aligned}
$$

式 (7.41) を使って以下の公式が帰納的に得られる。

$$\alpha(X_m,X_{m-1},\cdots,X_1) = -(-1)^{\sum_{i=1}^m |X_i|(|\alpha|+i)}\iota_{X_m}\cdots\iota_{X_1}\alpha, \qquad (7.43)$$

$$\alpha(X_m,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots X_1) = -(-1)^{|X_i||X_j|}\alpha(X_m,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots X_1). \qquad (7.44)$$

特に α が 2 形式のときは、

$$\alpha(X,Y) = -(-1)^{|X||Y|}\alpha(Y,X), \qquad (7.45)$$

となる。

外微分

関数に対する外微分は式 (7.29) で定義される。すなわち、

$$\mathrm{d}f(X) = (-1)^{|X|(|f|+1)}Xf. \qquad (7.46)$$

α を $\mathcal{M}$ 上の 1 形式とすると Cartan 公式より、

$$d\alpha(X_1,X_2) = (-1)^{|X_1||\alpha|}X_1\alpha(X_2) - (-1)^{|X_2||\alpha|}(-1)^{|X_1||X_2|}X_2\alpha(X_1) - \alpha([X_1,X_2]). \qquad (7.47)$$

となる。2 形式 α に対しては、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha(X_1,X_2,X_3) &= (-1)^{|X_1|(|\alpha|+1)}X_1\alpha(X_2,X_3) - (-1)^{|X_2|(|\alpha|+1)}(-1)^{|X_1||X_2|}X_2\alpha(X_1,X_3)\\
&\quad + (-1)^{|X_3|(|\alpha|+1)}(-1)^{(|X_1|+|X_2|)|X_3|}X_3\alpha(X_1,X_2) - \alpha([X_1,X_2],X_3)\\
&\quad + (-1)^{|X_2||X_3|}\alpha([X_1,X_3],X_2) - (-1)^{|X_1|(|X_2|+|X_3|)}\alpha([X_2,X_3],X_1). \qquad (7.48)
\end{aligned}
$$

となる。m 形式 $\alpha = \frac{1}{m!} dz^{a_1} \wedge \cdots dz^{a_m} \alpha_{a_1 \cdots a_m}(z)$ に対しては帰納的に以下の公式が示せる。

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha(X_1, X_2, \cdots, X_m) &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} (-1)^{|X_i|(|\alpha|+m)} (-1)^{\sum_{k=1}^{i-1} |X_i||X_k|} X_i \alpha(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_m) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (-1)^{\sum_{k=1}^{i-1} |X_i||X_k| + \sum_{l=1, l \neq j}^{j-1} |X_j||X_l|} \\ &\quad \times \alpha([X_i, X_j], \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_m). \end{aligned} \tag{7.49}$$

7.3.4 次数付きシンプレクティック形式と次数付きポアソン括弧

次数付き微分形式のうち $\mathcal{M}$ 上の非退化閉 2 形式 ω を次数付きシンプレクティック形式という。ω には微分形式としての次数（2 形式）のほかに次数付き多様体としての次数があるのでそれを n とするとき、ω を次数 n の次数付きシンプレクティック形式と言って、$(\mathcal{M}, \omega)$ を次数 n の次数付きシンプレクティック多様体という。次数付き微分シンプレクティック多様体は QP 多様体ともいう。

ω の全次数は $n+2$ である。通常の場合と同様に $\mathcal{M}$ の次元は偶数次元である。$\mathcal{M}$ の次元を $2d$ 次元とする。局所座標 $z = (q^a, p_a)(a = 1, \ldots d)$ が Darboux 座標であるとき、シンプレクティック形式は

$$\begin{aligned} \omega &= (-1)^{|q|(|p|+1)} \mathrm{d}q^a \wedge \mathrm{d}p_a = (-1)^{n|q|} \mathrm{d}q^a \wedge \mathrm{d}p_a \\ &= (-1)^{n|q|} (-1)^{(|q|+1)(|p|+1)} \mathrm{d}p_a \wedge \mathrm{d}q^a = (-1)^{|p|+1} \mathrm{d}p_a \wedge \mathrm{d}q^a. \end{aligned} \tag{7.50}$$

と表されるとする。ここで $|q| + |p| = n$. 局所的に $\omega = -d\vartheta$ となる 1 形式 ϑ を Liouville 1 形式という。このとき、

$$\vartheta = (-1)^{|p|} p_a \mathrm{d}q^a = -(-1)^{n+1-|q|} p_a \mathrm{d}q^a = (-1)^{|q||p|} \mathrm{d}q^a p_a \tag{7.51}$$

$$= -(-1)^{|q|(|p|+1)} q^a \mathrm{d}p_a = -\mathrm{d}p_a q^a, \tag{7.52}$$

となる。一般に $\mathcal{M}$ 上大域的に ϑ が存在するとは限らない。しかし、次数 $n \neq 0$ のときは常に存在する。

Proposition 7.3.1 次数 $n \neq 0$ のとき、

$$\vartheta = -\frac{1}{n} \iota_\varepsilon \omega \tag{7.53}$$

となる。ここで、ε は *Euler* ベクトル場である。

これは Euler ベクトル場の定義より確認できる。

関数 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対して、ベクトル場 X_f で

$$\iota_{X_f}\omega \;=\; -\mathrm{d}f, \tag{7.54}$$

となるものをハミルトンベクトル場という。f を X_f に対するハミルトン関数という。次数は $|X_f| = |f| - n$ となる。ベクトル場の局所座標表示を $X = X_a \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_a} + Y^a \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q^a}$ とすると、式 (7.54) の左辺は

$$\begin{aligned} \iota_{X_f}\omega &= \left((-1)^{|X|+p} X_a \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \mathrm{d}p_a} + (-1)^{|X|+q} Y^a \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \mathrm{d}q^a}\right) \cdot \left((-1)^{n|q|} \mathrm{d}q^a \wedge \mathrm{d}p_a\right) \\ &= -\mathrm{d}q^a \frac{\overrightarrow{\partial} f}{\partial q^a} - \mathrm{d}p_a \frac{\overrightarrow{\partial} f}{\partial p_a}, \end{aligned} \tag{7.55}$$

と計算されるので、ハミルトンベクトル場は、

$$X_f \;=\; \frac{f\overleftarrow{\partial}}{\partial q^a} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_a} - (-1)^{|q||p|} \frac{f\overleftarrow{\partial}}{\partial p_a} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q^a}. \tag{7.56}$$

となる。シンプレクティック形式より以下の次数付きポアソン括弧が得られる。

$$\{f, g\} \;=\; X_f g = (-1)^{|f|+n} \iota_{X_f} \mathrm{d}g = (-1)^{|f|+n+1} \iota_{X_f} \iota_{X_g} \omega, \tag{7.57}$$

と定義される。この次数付きポアソン括弧は以下の恒等式を満たす。

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -(-1)^{(|f|-n)(|g|-n)} \{g, f\}, \\ \{f, gh\} &= \{f, g\}h + (-1)^{(|f|-n)|g|} g\{f, h\}, \\ \{f, \{g, h\}\} &= \{\{f, g\}, h\} + (-1)^{(|f|-n)(|g|-n)} \{g, \{f, h\}\}. \end{aligned}$$

次数付きポアソン括弧の定義をまとめておこう。

Definition 7.3.2 $\mathcal{M}$ を次数付き多様体とする。$f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$ とする双線形形式

$$\{-, -\} : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}), \tag{7.58}$$

が次の性質を満たすとき次数 $-n$ の次数付きポアソン括弧という。

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -(-1)^{(|f|-n)(|g|-n)} \{g, f\}, \\ \{f, gh\} &= \{f, g\}h + (-1)^{(|f|-n)|g|} g\{f, h\}, \\ \{f, \{g, h\}\} &= \{\{f, g\}, h\} + (-1)^{(|f|-n)(|g|-n)} \{g, \{f, h\}\}. \end{aligned}$$

次数 $-n$ のポアソン括弧を持つ次数付き多様体 $(\mathcal{M}, \{-,-\})$ を次数 $-n$ のポアソン多様体という。

Example 7.3.1 例7.2.2の次数付き余接束 $\mathcal{M} = T^*[1]M$ を考える。$C^\infty(T^*[1]M) \simeq \Gamma(\wedge^\bullet TM)$、この上の滑らかな関数は M 上の多重ベクトル場と同一視される。この次数付き多様体上の次数 -1 の次数付きポアソン括弧は Schouten 括弧と同型である。すなわち、上記の同型から自然に次数 -1 のポアソン括弧と Schouten 括弧の同型が得られる。$\{-,-\} \simeq [-,-]_S$.

Darboux 座標に対しては、

$$\{q^a, p_b\} \;=\; \delta^a{}_b, \qquad \{p_b, q^a\} = -(-1)^{|q||p|}\delta^a{}_b, \tag{7.59}$$

となる。2つの関数を $f = f(q,p)$, $g = g(q,p)$ とするとポアソン括弧は局所座標で

$$\{f, g\} \;=\; \frac{f\overleftarrow{\partial}}{\partial q^a}\frac{\overrightarrow{\partial} g}{\partial p_a} - (-1)^{|q||p|}\frac{f\overleftarrow{\partial}}{\partial p_a}\frac{\overrightarrow{\partial} g}{\partial q^a}, \tag{7.60}$$

となる。

ベクトル場 X が $L_X\omega = 0$、すなわち $d\iota_X\omega = 0$ を満たすとき、X をシンプレクティックベクトル場という。

Proposition 7.3.3 X, Y をシンプレクティックベクトル場とする。このとき、$[X, Y]$ はハミルトンベクトル場である。このとき、対応するハミルトン関数は $-(-1)^{|X|}\iota_X\iota_Y\omega$ である。

Proof 公式(7.39)より、

$$\begin{aligned}\iota_{[X,Y]}\omega &= (L_X\iota_Y - (-1)^{|X|(|Y|-1)}\iota_Y L_X)\omega = (-1)^{|X|}\mathrm{d}\iota_X\iota_Y\omega \\ &= -\mathrm{d}[-(-1)^{|X|}\iota_X\iota_Y\omega].\end{aligned} \tag{7.61}$$

□

さらに2つのハミルトンベクトル場 $X = X_f$, $Y = X_g$ に対して、

$$\iota_{[X_f, X_g]}\omega \;=\; (-1)^{|f|+n}\mathrm{d}\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega \tag{7.62}$$

となるので、したがって、

$$X_{\{f,g\}} \;=\; -[X_f, X_g] \tag{7.63}$$

となる。また $\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega = -(-1)^{|f|n+|g|(n+1)}\omega(X_g, X_f)$ なので、ポアソン括弧は以下の式と等しい。

$$\begin{aligned}\{f,g\} &= (-1)^{|f|+n+1}\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega \\ &= (-1)^{(|f|+|g|)(n+1)}\omega(X_g, X_f) \\ &= (-1)^{|f||g|+n+1}\omega(X_f, X_g).\end{aligned} \tag{7.64}$$

Example 7.3.2 $\mathcal{M} = T^*[1]M$ は余接束なので、標準的なシンプレクティック構造が存在する。T^*M の局所座標を (x^i, ξ_i) とするとシンプレクティック形式 ω は、

$$\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\xi_i \tag{7.65}$$

これが大局的に定義されていることを確かめる。ω に対する $\omega = -\mathrm{d}\vartheta$ となる Liouville 1 形式

$$\vartheta = \xi_i \mathrm{d}x^i \tag{7.66}$$

で確認すれば十分である。Liouville 1 形式は (7.11), (7.12) より

$$\vartheta' = \xi'_i \mathrm{d}x'^i = \xi_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k = \xi_k \mathrm{d}x^k = \vartheta \tag{7.67}$$

となり座標変換不変である。

Example 7.3.3 例 7.2.4 の次数付き多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]E[1]$ を考える。この上の標準なシンプレクティック形式は局所座標では

$$\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\xi_i + \frac{1}{2}\mathrm{d}(k_{ab}\eta^a) \wedge \mathrm{d}\eta^b \tag{7.68}$$

と書ける。これに対する Liouville 1 形式は

$$\vartheta = \xi_i \mathrm{d}x^i - \frac{1}{2}k_{ab}\eta^a \mathrm{d}\eta^b \tag{7.69}$$

で、座標変換 (7.15)–(7.17) を使うと ϑ が座標変換で不変であることが示せる。

7.3.5　Q 多様体と QP 多様体

$\mathcal{M}$ を次数付き多様体とする。$\mathcal{M}$ 上の次数 $+1$ のベクトル場 Q で $Q^2 = 0$ となるものをホモロジカルベクトル場という。

Definition 7.3.4 次数付き多様体 $\mathcal{M}$ とホモロジカルベクトル場 Q の組 $(\mathcal{M}, Q)$ を微分次数付き多様体、または **Q 多様体**という。

Example 7.3.4 多様体 M 上のベクトル束を E として、次数付き多様体 $\mathcal{M} = E[1]$ を考える。局所座標として (x^i, η^a) を取る。ここで x^i は次数 0 の M の座標で、η^a は E のファイバーの次数 1 の座標である。ホモロジカルベクトル場 Q は次数 +1 なので、可能なものは局所座標で、

$$Q \;\; = \;\; \rho_a^i(x)\eta^a \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2} C_{ab}^c(x)\eta^a\eta^b \frac{\partial}{\partial \eta^c} \tag{7.70}$$

と書ける。ここで、$\rho_a^i(x)$ と $C_{ab}^c(x)$ は x の関数である。Q がホモロジカル、すなわち $Q^2 = 0$ の条件から、局所関数 $\rho_a^i(x)$ と $C_{ab}^c(x)$ の条件式が出る。

E のファイバーの基底を e_a とする。2 つの演算、$\rho : E \to TM$, $[-,-] : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \rho(e_a) \;\; &:= \;\; \rho_a^i(x)\partial_i, \\ [e_a, e_b] \;\; &:= \;\; C_{ab}^c e_c. \end{aligned}$$

すると、$Q^2 = 0$ の条件は $(E, \rho, [-,-])$ が Lie 亜代数となることと同値であることが計算でわかる。すなわち、$E[1]$ が Q 多様体であることは、ベクトル束 E が Lie 亜代数であることと同値である。

$(\mathcal{M}, \omega)$ を次数 n のシンプレクティック多様体とする。$\mathcal{M}$ 上の次数 +1 のベクトル場で $Q^2 = 0$ となるものを特に Q と書く。

Definition 7.3.5 3 つ組 $(\mathcal{M}, \omega, Q)$ が $Q^2 = 0$ かつ $L_Q\omega = 0$ を満たすとき、次数 n の次数付き微分シンプレクティック多様体、または次数 n の **QP 多様体**という。

シンプレクティック構造 ω から構成されるポアソン括弧を $\{-,-\}$ とする。ホモロジカルベクトル場 Q に対するハミルトン関数 $\Theta \in C^\infty(\mathcal{M})$ をホモロジカル関数という。Θ は

$$Q = \{\Theta, -\}. \tag{7.71}$$

を満たし、次数は $n+1$ となる。$Q^2 = 0$ より Θ は

$$\{\Theta, \Theta\} = 0 \tag{7.72}$$

を満たす。$n \neq -1$ のとき、Θ は常に存在する。これは以下の命題よりわかる。

Proposition 7.3.6 X が $|X| \neq -n$ であって $L_X\omega = 0$ を満たすとする。このとき、

$$\iota_X\omega = \pm \mathrm{d}\left(\frac{1}{|X|+n}\iota_X\iota_\varepsilon\omega\right) \tag{7.73}$$

となる。

これは具体的計算より示せる。この命題で、$X = Q$ とおくと $|Q| = 1$ であるので $n \neq -1$ であれば対応するハミルトン関数が $\Theta = \pm\frac{1}{|X|+n}\iota_X\iota_\varepsilon\omega$ と求められる。

Example 7.3.5 $M = \mathfrak{g}$ をベクトル空間とする。d をこのベクトル空間の次元とする。次数付き多様体 $\mathcal{M} = T^*[1]\mathfrak{g}^*$ を考える。これは、$\mathfrak{g}^*$ の座標として x_a、ファイバーの座標として ξ^a を取る。この空間は、$\wedge^\bullet\mathfrak{g}^*$ と同型である。実際、$\mathfrak{g}^*$ の基底を e^a とすると、$\mathcal{M}$ 上の関数

$$f(x,\xi) = \sum_{k=0}^{d}\frac{1}{k!}f^{(k)}_{a_1\ldots a_k}(x)\xi^{a_1}\ldots\xi^{a_k} \tag{7.74}$$

に対して、$\wedge^\bullet\mathfrak{g}$ の元、

$$\sum_{k=0}^{d}\frac{1}{k!}f^{(k)}_{a_1\ldots a_k}(x)t^{a_1}\wedge\ldots\wedge t^{a_k} \tag{7.75}$$

を対応させる。

$\mathcal{M} = T^*[1]\mathfrak{g}^*$ の標準シンプレクティック構造 $\omega = \mathrm{d}x_a \wedge \mathrm{d}\xi^a$ を取る。ω が次数 1 なのでホモロジカル関数 Θ は次数 2 である。

$$\Theta = \frac{1}{2}C^c_{ab}x_c\xi^a\xi^b \tag{7.76}$$

とする。ξ^a が次数 1 であるから、$C^c_{ab} = -C^c_{ba}$ である。また、Θ がホモロジカル関数であることは C^c_{ab} が Lie 環の構造定数であることと同値である。すなわち、e_a を $\mathfrak{g}$ の基底として、括弧積を $[e_a, e_b] := C^c_{ab}e_c$ と定義したとき、括弧積のヤコビ恒等式と同値である。よって、$\mathcal{M} = T^*[1]\mathfrak{g}^*$ が QP 多様体であることは、$\mathfrak{g}$ が Lie 環であることと同値である。

Example 7.3.6 例 7.2.3 の次数付き多様体 $\mathcal{M} = T^*[1]M$ を考え、標準シンプレクティック構造 $\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\xi_i$ を取る。ω が次数 1 なのでホモロジカル関数 Θ は次数 2 である。$\pi^{ij}(x)$ を局所的な関数として

$$\Theta = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\xi_i\xi_j \tag{7.77}$$

とすると、Θ がホモロジカル関数であることは $\pi = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\partial_i \wedge \partial_j$ がポアソンバイベクトル場であることと同値である。これは具体的な計算で確認できる。

7.3.6 次数付き多様体の誘導括弧

次数付き多様体上の QP 構造は、次数付きでない通常の代数や亜代数との対応関係がある。2つをつなぐものが次数付き多様体上の**誘導括弧** **(derived bracket)** である。

Definition 7.3.7 $(\mathcal{M}, \omega, Q)$ を QP 多様体とする。ω から構成される（次数付き）ポアソン括弧を $\{-,-\}$、ホモロジカルベクトル場 Q に対するホモロジカル関数を Θ とする。このとき、以下で定義される双線形形式 $[-,-]_D : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$

$$[-,-]_D := -\{\{-,\Theta\},-\} \tag{7.78}$$

を**誘導括弧** **(derived bracket)** という。

QP 多様体の次数が n すなわち $|\omega| = n$ のとき、Θ の次数は $n+1$ なので、誘導括弧 $[-,-]_D$ の次数は $-n+1$ である。誘導括弧は以下のよう次数付き Leibniz 公式、および次数付き Jacobi 恒等式を満たす。

Proposition 7.3.8 $f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$ とすると

$$[fg, h]_D = f[g,h]_D + (-1)^{|f-n+1||g|} g[f,h]_D \tag{7.79}$$

$$[f,[g,h]_D]_D = [[f,g]_D, h]_D + (-1)^{|f-n+1||g-n+1|}[g,[f,h]_D]_D \tag{7.80}$$

が成り立つ。この公式は、$\{-,-\}$ の次数付きポアソン括弧の恒等式および、$\{\Theta,\Theta\} = 0$ を使い証明できる。

Remark 7.3.1 誘導括弧は必ずしも（次数付き）歪対称ではない。すなわち一般には

$$[f,g]_D \neq -(-1)^{|f-n+1||g-n+1|}[g,f]_D \tag{7.81}$$

歪対称化した括弧 $[f,g]_C = [f,g]_D - (-1)^{|f-n+1||g-n+1|}[g,f]_D$ を考えることもできるが、$[-,-]_C$ は Jocobi 恒等式 (**??**) を満たすとは限らない。

Example 7.3.7 例 7.2.4 の次数付き多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]E[1]$ を考える。E のファイバーに内積を $\langle -, - \rangle$ を定義しておく。e_a を E のファイバーの基底として、$k_{ab} := \langle e_a, e_b \rangle$ とする。$k_{ab} = k_{ba}$ であることに注意する。次に、$\mathcal{M}$ 上にシンプレクティック構造 $\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\xi_i + \frac{1}{2}\mathrm{d}(k_{ab}\eta^a) \wedge \mathrm{d}\eta^b$ を取る。ω より誘導された次数付きポアソン括弧を $\{-,-\}$ で表す。たとえば、$\mathcal{M}$ の座標に関する次数付きポアソン括弧は、

$$\{x^i, \xi_j\} = \delta^i_j, \qquad \{\eta^a, \eta^b\} = k^{ab} \tag{7.82}$$

となる。ここで、k^{ab} は k_{ab} の逆行列である。

ω が次数 2 なのでホモロジカル関数 Θ は次数 3 で一般の形は $\rho_a^i(x), H_{abc}(x)$ を局所的な関数として

$$\Theta = \rho_a^i(x)\xi_i\eta^a + \frac{1}{3!}H_{abc}(x)\eta^a\eta^b\eta^c \tag{7.83}$$

となる。Θ のホモロジカル関数の条件 $\{\Theta, \Theta\} = 0$ に式 (7.83) を代入すると $\rho_a^i(x), H_{abc}(x)$ に対する以下の条件式が得られる。

$$k^{ab}\rho_a^i\rho_b^j = 0, \tag{7.84}$$

$$\rho_b^j\partial_j\rho_a^i - \rho_a^j\partial_j\rho_b^i + k^{ef}\rho_e^i C_{fab} = 0, \tag{7.85}$$

$$\rho_d^j\partial_j C_{abc} - \rho_a^j\partial_j C_{bcd} + \rho_b^j\partial_j C_{cda} - \rho_c^j\partial_j C_{dab} + k^{ef}C_{eab}C_{cdf} + k^{ef}C_{eac}C_{dbf} + k^{ef}C_{ead}C_{bcf} = 0. \tag{7.86}$$

Courant 亜代数の定義 6.6.1 において、$\Gamma(E)$ の基底 e_a に対して、アンカー写像の局所座標表示を $\rho(e_a) = \rho_a^i(x)\partial_i$, Dorfman 括弧の局所座標表示を $[e_a, e_b]_D = C_{ab}^c(x)e_c$ と決めると、Courant 亜代数の定義より、$\rho_a^i(x)$, $C_{ab}^c(x)$ が、条件式 (7.84)-(7.86) を満たすことが計算で確認できる。逆に、$\rho_a^i(x)$, $C_{ab}^c(x)$ が、条件式 (7.84)-(7.86) を満たすとき、上式で決めたアンカー写像と、Dorfman 括弧が Courant 亜代数の定義を満たす。

したがって、次数付き多様体 $\mathcal{M} = T^*[2]E[1]$ が QP 多様体であるとき、ベクトル束 E 上に Courant 亜代数構造が誘導される。逆に、ベクトル束 E 上に Courant 亜代数構造があるとき、$\mathcal{M} = T^*[2]E[1]$ が QP 多様体となる。

Example 7.3.8 M と可微分多様体とする。n を $n \geq 2$ の自然数として、次数付き多様体 $\mathcal{M} = T^*[n]T[1]M$ を考える。

$T[1]M$ の局所座標として (x^i, q^i) をとる。ここで、x^i は底空間 M の次数 0 の座標で、q^i はファイバーの次数 1 の座標である。$T^*[n]$ の座標を (ξ_i, p_i) とする。ξ_i は M のファイバーの次数 n の座標で、p_i は q^i に対する次数 $n-1$ の座標である。

$\mathcal{M} = T^*[n]T[1]M$ は余接束なので次数 n の標準シンプレクティック構造を持つ。局所座標で書くと、$\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\xi_i + (-1)^n \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$ となる。ω より誘導された次数付きポアソンかっこを $\{-, -\}$ で表す。たとえば、基本的なゼロでない次数付きポアソン括弧は

$$\{x^i, \xi_j\} = \delta_j^i, \qquad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i \tag{7.87}$$

となる。

ω が次数 n なのでホモロジカル関数 Θ は次数 $n+1$ である。ここでは例として、$H_{i_1\ldots i_{n+1}}(x)$ を局所的な関数として、

$$\Theta \;=\; \xi_i q^i + \frac{1}{(n+1)!} H_{i_1\ldots i_{n+1}}(x) q^{i_1} \ldots q^{i_{n+1}} \tag{7.88}$$

の形を考える。Θ としては次数 $n+1$ の項を他にも加えることもでき、さらに一般の形が可能である。ここで

$$H := \frac{1}{(n+1)!} H_{i_1\ldots i_{n+1}}(x) q^{i_1} \ldots q^{i_{n+1}} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_{n+1}} \tag{7.89}$$

と定義すると、H は M 上の $n+1$ 形式となる。式 (7.88) の Θ は H が閉形式、つまり $\mathrm{d}H = 0$ のとき、すなわち、局所座標で表示すると、

$$\frac{\partial H_{i_1\ldots i_{n+1}}}{\partial x^{i_{n+2}}} + (i_1 \ldots i_{n+2} \text{ cyclic}) = 0 \tag{7.90}$$

その時に限りホモロジカル関数の条件 $\{\Theta, \Theta\} = 0$ を満たす。ここで $(i_1 \ldots i_{n+2} \text{ cyclic})$ は添字 $i_1 \ldots i_{n+2}$ を巡回的に入れ替えた項を足す、という意味である。

ここで、$\mathcal{M} = T^*[n]T[1]M$ 上の上記の QP 構造を用いた誘導括弧 $\{\{-, \Theta\}, -\}$ を考える。誘導括弧は $T^*[n]T[1]M$ 上の関数の空間 $C^\infty(T^*[n]T[1]M)$ 上の $\mathbb{R}$ 双線型形式であるが、今、この誘導括弧次数 0 および $n-1$ の関数の空間 $C^\infty_0(T^*[n]T[1]M) \oplus C^\infty_{n-1}(T^*[n]T[1]M)$ 上で考える。次数 0 の関数は、すなわち M 上の関数であるから、$C^\infty_0(T^*[n]T[1]M) \simeq C^\infty(M)$ である。その元を $f(x) \in C^\infty(M)$ とする。次数 $n-1$ の関数は、局所座標では

$$\underline{X} + \underline{\alpha} = X^i(x) p_i + \frac{1}{(n-1)!} \alpha_{i_1\ldots i_{n-1}}(x) q^{i_1} \ldots q^{i_{n-1}} \tag{7.91}$$

とかける。M 上の微分同相写像で同じ変換をすることから、p_i をベクトル場の基底 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$、$q^i$ を微分 1 形式の基底 $\mathrm{d}x^i$ と対応させせることができる。この対応を使うと、式 (7.91) の項は $TM \oplus \wedge^{n-1} T^*M$ の切断、すなわち

$$X + \alpha = X^i(x)\partial_i + \frac{1}{(n-1)!} \alpha_{i_1\ldots i_{n-1}}(x) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_{n-1}} \ldots q^{i_{n-1}} \in \mathfrak{X}(M) \oplus \Omega^{n-1}(M) \tag{7.92}$$

と同一視できる。ここで、下線を引いたものはベクトル場、微分形式に対応する次数付き多様体の元である。

次数 0 と $n-1$ の関数の空間 $C_0^\infty(T^*[n]T[1]M) \oplus C_{n-1}^\infty(T^*[n]T[1]M)$ 上で誘導括弧を考える。$f, g \in C_0^\infty(T^*[n]T[1]M)$, $\underline{X}+\underline{\alpha}, \underline{Y}+\underline{\beta} \in C_{n-1}^\infty(T^*[n]T[1]M)$ として、具体的に式 (7.88), (7.91) を代入して計算すると、

$$-\{\{f, \Theta\}, g\} = 0, \tag{7.93}$$

$$-\{\{\underline{X}+\underline{\alpha}, \Theta\}, f\} = Xf \tag{7.94}$$

$$-\{\{\underline{X}+\underline{\alpha}, \Theta\}, \underline{Y}+\underline{\beta}\} = \underline{[X, Y] + \mathcal{L}_X\beta - \iota_Y \mathrm{d}\alpha + \iota_X\iota_Y H} \tag{7.95}$$

となる。

誘導括弧 $-\{\{\underline{X}+\underline{\alpha}, \Theta\}, f\}$ より、アンカー写像を $f \in C^\infty(M)$ に対して、

$$\rho(X+\alpha)f = Xf \tag{7.96}$$

と定義する。また、高次 Dorfman 括弧を $-\{\{\underline{X}+\underline{\alpha}, \Theta\}, \underline{Y}+\underline{\beta}\}$ より、

$$[X+\alpha, Y+\beta]_D = [X, Y] + \mathcal{L}_X\beta - \iota_Y \mathrm{d}\alpha + \iota_X\iota_Y H \tag{7.97}$$

と定義する。すると、式 (7.79)、(7.80) が成り立つので $(TM \oplus \wedge^{n-1}T^*M, \langle -, -\rangle, \rho, [-,-]_D)$ は Leibniz 亜代数となる。これを L_n 亜代数ともいう。ここで、$H \in \Omega^{n+1}(M)$ は閉形式であることに注意する。

したがって、次数付き多様体 $\mathcal{M} = T^*[n]T[1]M$ が QP 多様体であるとき、ベクトル束 $TM \oplus \wedge^{n-1}T^*M$ 上に Leibniz 亜代数構造が誘導される。逆にたどると、ベクトル束 $TM \oplus \wedge^{n-1}T^*M$ 上に Leibniz 亜代数構造があるとき、$\mathcal{M} = T^*[n]E[1]$ が QP 多様体となる。

7.4 Batalin-Vilkovisky(BV) 代数

$\mathcal{M}$ を次数付き多様体とする。次数付き多様体 $\mathcal{M}$ 上の測度を μ とする。μ としては通常 Berezin 測度を取る。

QP 構造（dg 多様体構造）の拡張として BV 代数がある。これはゲージ理論の量子化などで使われる。

次数 n を奇数として $(\mathcal{M}, \omega)$ を次数 n の次数付き多様体とする。$\mathcal{M}$ 上に体積要素 $\mu = \mathrm{d}v$ が存在するとする。測度としては通常 Berezin 測度を取る。Berezin 測度とは、

このとき、発散 $\mathrm{div} : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ を、任意の $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対して、

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}v(\mathrm{div}_\mu X)f \quad = \quad -\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}v Xf \tag{7.98}$$

と定義する。発散を使って奇のラプラス作用素 $\Delta : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ を

$$\Delta f \quad := \quad \frac{1}{2}(-1)^{|f|}\mathrm{div}_\mu X_f \tag{7.99}$$

と定義する。ここで、X_f は関数 f に対するハミルトンベクトル場である。このとき $\Delta^2 = 0$ となることが示せる。

逆に、次数付き多様体 $\mathcal{M}$ 上に奇のラプラス作用素 $\Delta : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ が存在するとする。すなわち、$|\Delta|$ が奇数で、$\Delta^2 = 0$ となる $\mathbb{R}$ 線形 2 階微分作用素が存在するとする。これを BV 作用素という。このとき、$f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対して、

$$\{f, g\} \quad := \quad (-1)^{|f|}\Delta(fg) - (-1)^{|f|}(\Delta f)g - f(\Delta g), \tag{7.100}$$

とおくと、$\{-,-\}$ は次数 $-n$ のポアソン括弧となる。

$(\mathcal{M}, \Delta)$ を BV(Batalin-Vilkovisky) 代数という。

第8章　ポアソン構造と場の理論

8.1　ポアソンシグマ模型

(M,π) をポアソン多様体とする。Σ を 2 次元可微分多様体として、Σ から M へのなめらかな写像 $X:\Sigma\to M$ の集合 $\mathrm{Map}(\Sigma,M)$ を考える。このとき写像空間 $\mathrm{Map}(\Sigma,M)$ に M のポアソン構造と無矛盾なゲージ理論が構成できる。接束 TM の X による引き戻し X^*TM に値を取る Σ 上の１形式 $A\in\Omega^1(\Sigma,X^*TM)$ を取る。このとき作用積分を

$$S \;=\; \int_\Sigma \left(\langle A,\,\mathrm{d}X\rangle + (\pi\circ X)(A,A)\right), \tag{8.1}$$

とする。ここで d は Σ 上の外微分で、$\pi\circ X$ は $X:\Sigma\to M$ と π の合成である。M の局所座標を x^i とし、$\pi=\frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\partial_i\wedge\partial_j$ とすると、

$$S \;=\; \int_\Sigma \left(A_i\wedge \mathrm{d}X^i + \frac{1}{2}\pi^{ij}(X)A_i\wedge A_j\right), \tag{8.2}$$

となる。運動方程式は

$$DX \;=\; 0, \tag{8.3}$$

$$F_A \;=\; 0, \tag{8.4}$$

となる、ここで

$$DX \;=\; \mathrm{d}X + (\pi\circ X)(-,A), \tag{8.5}$$

$$F_A \;=\; \mathrm{d}A + (\mathrm{d}(\pi\circ X))(A,A), \tag{8.6}$$

作用積分 S は以下のゲージ変換で不変である。

$$\delta X^i \;=\; (\pi\circ X)^\sharp(\epsilon) \tag{8.7}$$

$$\delta A_i \;=\; \mathrm{d}\epsilon + \mathrm{d}(\pi\circ X)(A,\epsilon) \tag{8.8}$$

ここで、$\epsilon \in C^\infty(\Sigma, X^*TM)$ である。ゲージ変換の局所座標表示は

$$\delta X^i = -\pi^{ij}(X)\epsilon_j, \tag{8.9}$$

$$\delta A_i = \mathrm{d}\epsilon_i + \partial_i \pi^{jk}(X) A_j \epsilon_k, \tag{8.10}$$

となる。

8.2 AKSZ シグマ模型

AKSZ シグマ模型は位相的場の理論で、微分次数付き多様体すなわち QP 多様体から構成されるクラスのことである。QP 多様体から直接ゲージ理論の BV 形式、BFV 形式に相当する理論が構成される。

AKSZ シグマ模型は 2 つの次数付き多様体の写像空間上の QP 構造のことで以下のように構成する。2 つの次数付き多様体を $\mathcal{X}$, $\mathcal{M}$ とする。$\mathcal{X}$ は微分 D を持つ次数付き微分多様体 $(\mathcal{X}, D)$ とする。また、$\mathcal{X}$ 上で D 不変な非退化な測度 μ が存在するとする。もう一つの次数付き多様体 $\mathcal{M}$ は次数 n の QP 多様体 $(\mathcal{M}, \omega, Q)$ とする。ここで ω は次数 n の次数付きシンプレクティック形式、Q は Q 構造とする。また、$n \neq 0$ であれば Q に対するハミルトニアン Θ が存在する。$\mathcal{X}$ から $\mathcal{M}$ へのなめらかな写像の集合を $\mathcal{M}^{\mathcal{X}} = \mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ とする。

両多様体の可微分写像の空間 $\mathrm{Diff}(\mathcal{X}) \times \mathrm{Diff}(\mathcal{M})$ 自然に写像空間 $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ に作用する。両多様体の微分 D と Q から自然に $\mathcal{X} \times \mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の微分 $\hat{D}$ と $\check{Q}$ が得られる。具体的に書くと、$z \in \mathcal{X}$ と $f \in \mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ として $(z, f) \in \mathcal{X} \times \mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ を取る。この元に対して $\hat{D}(z, f) = D(z)\mathrm{d}f(z)$ および $\check{Q}(z, f) = Qf(z)$ と定義する。

以下の 2 つの写像を導入する。代入写像 $\mathrm{ev}: \mathcal{X} \times \mathcal{M}^{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{M}$ は、$z \in \mathcal{X}$ および $f \in \mathcal{M}^{\mathcal{X}}$ に対して

$$\mathrm{ev}: (z, f) \longmapsto f(z),$$

で定義される。

次数付き微分形式上の鎖写像 $\mu_*: \Omega^\bullet(\mathcal{X} \times \mathcal{M}^{\mathcal{X}}) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{M}^{\mathcal{X}})$ は ω を次数付き微分形式、v を $\mathcal{X}$ 上の次数付きベクトル場として、

$$\mu_*\omega(f)(v_1, \ldots, v_k) = \int_{\mathcal{X}} \mu(z)\omega(z, f)(v_1, \ldots, v_k),$$

で定義される。ここで $\int_{\mathcal{X}} \mu(z)$ は $\mathcal{X}$ 上の次数付き積分である。次数付きの場合、積分はいわゆる Berezin 積分である。

２つの写像の（引き戻しの）合成写像 $\mu_* \mathrm{ev}^* : \Omega^\bullet(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{M}^{\mathcal{X}})$ を転入写像といい、$\mathcal{M}$ 上の次数付き微分形式を写像空間 $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の微分形式へ移す。

以上のデータより $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上に次数付きシンプレクティックが以下のように定義される。

Proposition 8.2.1 $\mathcal{M}$ 上の次数付きシンプレクティック形式を ω とすると $\boldsymbol{\omega} := \mu_* \mathrm{ev}^* \omega$ は $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の次数付きシンプレクティック形式となる。

実際、転入写像 $\mu_* \mathrm{ev}^*$ は非退化性と閉微分形式の条件を保つので $\boldsymbol{\omega}$ は非退化で閉２形式である。Berezin 積分 μ_* によって、転入写像 $\mu_* \mathrm{ev}^*$ は次数を μ の次数分だけ下げるので、QP 多様体の次数は $|\boldsymbol{\omega}| = |\omega| - |\mu|$ である。すなわち、ω の次数が n であれば、$\boldsymbol{\omega}$ の次数は $n - |\mu|$ である。$\boldsymbol{\omega}$ から $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上に次数付きポアソン括弧 $\{-,-\}$ が定義される。

次に、$\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ のホモロジカルベクトル場 $\boldsymbol{Q}$、もしくは対応するホモロジカル関数 S を構成する。S は２つのデータの和、$S = S_0 + S_1$ と２つの項の和であらわされる。$\mathcal{M}$ 上の次数付きシンプレクティック形式 ω に対する。標準（Liouville-）１形式を ϑ とすると $\omega = -\delta\vartheta$ となる。ここで δ は次数付き外微分である。なお、$n \neq 0$ のときは必ず標準１形式 ϑ が大域的に存在する。これを使って、

$$S_0 := \iota_{\hat{D}} \mu_* \mathrm{ev}^* \vartheta$$

と定義する。ここで、$\hat{D}$ は $\mathcal{X}$ の微分 D から誘導された $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の微分である。第２項 S_1 は $\mathcal{M}$ 上のホモロジカル関数 Θ を転入写像で引き戻して、

$$S_1 := \mu_* \mathrm{ev}^* \Theta$$

と定義する。$S = S_0 + S_1$ とすると、ホモロジカル条件 $\{S, S\} = 0$ が示される。すなわち S は $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上のホモロジカル関数である。ここで $\{-,-\}_s$ は $\boldsymbol{\omega}$ から誘導された次数付きポアソン括弧である。

実際、ホモロジカル条件の左辺は $\{S, S\} = \{S_0, S_0\} + 2\{S_0, S_1\} + \{S_1, S_1\}$ であるが、$D^2 = 0$ より $\{S_0, S_0\} = 0$ がいえ、$\{\Theta, \Theta\} = 0$ より $\{S_1, S_1\}$ が導かれる。$S_0 = \iota_{\hat{D}} \mu_* \mathrm{ev}^* \vartheta$ は $\boldsymbol{\omega}$ に関する微分 $\hat{D}$ のハミルトン関数 $X_{S_0} = \hat{D}$ すなわち、$\{\iota_{\hat{D}} \mu_* \mathrm{ev}^* \vartheta, \mu_* \mathrm{ev}^* f\} = \{S_0, \mu_* \mathrm{ev}^* f\} = (-1)^{|S_0|} \iota_{\hat{D}} \iota_{X_{\mu_* \mathrm{ev}^* f}} \boldsymbol{\omega}$ であること示せる。これより公式、

$$\begin{aligned} \{\iota_{\hat{D}} \mu_* \mathrm{ev}^* \vartheta, \mu_* \mathrm{ev}^* f\} &= \{S_0, \mu_* \mathrm{ev}^* f\} \\ &= (-1)^{|S_0|} \iota_{\hat{D}} \iota_{X_{\mu_* \mathrm{ev}^* f}} \boldsymbol{\omega} \\ &= -\iota_{\hat{D}} \mu_* \mathrm{ev}^* \mathrm{d} f. \end{aligned} \tag{8.11}$$

が示せるので、ストークスの定理より、$\mu_* \mathrm{ev}^* \mathrm{d} f = 0$ となり、$f = \Theta$ を代入すると $\{S_0, S_1\} = 0$ が示される。これより $ssbvSS = 0$ となり S がホモロジカル関数となる。

まとめると、

Proposition 8.2.2 D 不変な非退化な測度 μ を持つ次数付き微分多様体 $(\mathcal{X}, D)$ と QP 多様体 $(\mathcal{M}, \omega, Q)$ に対して、写像空間 $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上 $\boldsymbol{\omega} := \mu_* \mathrm{ev}^* \omega$, $S = S_0 + S_1 = \iota_{\hat{D}} \mu_* \mathrm{ev}^* \vartheta + \mu_* \mathrm{ev}^* \Theta$ とすると、$(\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M}), \boldsymbol{\omega}, S)$ は S をホモロジカル関数とする QP 多様体である。

$(\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M}), \boldsymbol{\omega}, S)$ の次数は $n - |\mu|$ である。

今次数付き多様体の例として、X を通常の多様体として、次数付き接束 $\mathcal{X} = T[1]X$ をとると、$|\mu| = \mathrm{dim} X$ であるから、QP 多様体の次数は $n - \mathrm{dim} X$ となる。

Remark 8.2.1 例えば、$\mathrm{dim} X = n + 1$ とすると、$\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ の次数は -1 となるがこれは物理の BV 形式に相当する。この場合の QP 構造は位相的場の理論に対応する。

$\mathrm{dim} X = n$ とすると、$\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ の次数は 0 となる。次数 0 のシンプレクティック構造からは次数 0 の次数付きポアソン括弧、すなわち通常のポアソン括弧が得られるのでこれは物理の BFV 形式に相当する。

Definition 8.2.3 X を $n+1$ 次元多様体として次数付き多様体を $\mathcal{X} = T[1]X$ とする。D を X 上の de Rham 微分から誘導された微分とする。$\mathcal{M}$ を次数 n の QP 多様体とする。このとき命題 8.2.2 で写像空間 $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上に構成される QP 多様体構造を AKSZ シグマ模型という。

このとき、写像空間 $\mathcal{N} = \mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上の QP 多様体の次数は -1 である。方程式 $\{S, S\} = 0$ を古典マスター方程式という。

「量子化」のためには写像空間 $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上に BV 代数構造を構成する。$\mathcal{N} = \mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ 上に測度 $\boldsymbol{\rho}$ を仮定すると、この上に例 7.4 のように BV 代数を構成できる。今の場合空間は $\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ である。このとき、QP 多様体の次数が n が奇数であれば $\Delta^2 = 0$ となり、$(\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M}), \Delta)$ は BV 代数となる。

Remark 8.2.2 一般に $\mathcal{N} = \mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ が無限次元のとき積分 $\int_{\mathrm{Map}(\mathcal{X}, \mathcal{M})} \boldsymbol{\rho}$ は発散するので、この時奇のラプラシアンの上記の定義は形式的である。一般に次数付き多様体が有限次元であっても、奇のラプラシアンは well-defined とは限らない。

7.4 章の議論より、古典マスター方程式は以下の量子マスター方程式

$$\Delta(e^{\frac{i}{\hbar} S_q}) = 0, \tag{8.12}$$

に修正される。ここで、S_q は $\mathrm{Map}(\mathcal{X},\mathcal{M})$ 上の関数で、$\hbar$ は実数とすることもあるが一般には不定元である。一般には古典マスター方程式の解 S を $\hbar$ を変形パラメータとして変形したものが解となる。Δ が 2 階微分作用素であることに注意すると、式 (8.12) は

$$(-2i\hbar\Delta S_q + \{S_q, S_q\})e^{\frac{i}{\hbar}S_q} = 0, \tag{8.13}$$

よって

$$-2i\hbar\Delta S_q + \{S_q, S_q\} = 0. \tag{8.14}$$

と同値である。

Example 8.2.1 (M,π) をポアソン多様体とすると、例 7.3.6 より $\mathcal{M} = T^*[1]M$ は次数 1 の QP 多様体となる。$\mathcal{M}$ 上の次数付きシンプレクティック形式を ω、ホモロジカル関数を Θ とする。Σ を 2 次元多様体として、$\mathcal{X} = T[1]\Sigma$ と置く。すると $\mathrm{Map}(\mathcal{X} = T[1]\Sigma, \mathcal{M} = T^*[1]M)$ 上に AKSZ シグマ模型が構成される。

例 7.3.6 のように $\mathcal{M} = T^*[1]M$ の局所座標を $(x^i, \xi_i), i = 1, \cdots, \dim(M)$ とする。また、$T[1]\Sigma$ の局所座標を $(\sigma^\mu, \theta^\mu), \mu = 1, 2$ とする。ここで σ^μ は Σ の座標、θ^μ はファイバーの座標である。

(x^i, ξ_i) を転入写像で写した写像空間上の局所座標を $(\boldsymbol{\phi}^i, \boldsymbol{A}_i) = (\mu_*\mathrm{ev}^*x^i, \mu_*\mathrm{ev}^*\xi_i)$ と書く。この写像空間上の局所座標を超場 (superfield) という。

??

$T[1]\Sigma$ 上の Berezin 測度による積分を

$$\int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \tag{8.15}$$

と表記する。また、超微分 $\mathbf{d} = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial \sigma^\mu}$ を導入する。すると、写像空間 $\mathrm{Map}(T[1]\Sigma, T^*[1]M)$ 上のホモロジカル関数は

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_1 = \iota_{\hat{D}}\mu_*\mathrm{ev}^*\vartheta + \mu_*\mathrm{ev}^*\Theta \\ &= \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta\, [\langle \boldsymbol{A}, \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}\rangle + (\pi\circ\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A})] \\ &= \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \left[\boldsymbol{A}_i \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}^i + \frac{1}{2}\pi^{ij}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j\right]. \end{aligned} \tag{8.16}$$

となる。$\boldsymbol{\phi}^i$, $\boldsymbol{A}_i$ を θ^μ で展開すると、θ^μ は次数 1 であるから 2 次までで終わり、

$$\boldsymbol{\phi}^i = X^i - \underline{A}^{+i} + \underline{c}^{+i} = X^i - \theta^\mu A^{+i}_\mu + \frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu c^{+i}_{\mu\nu}, \tag{8.17}$$

$$\boldsymbol{A}_i = -\underline{c}_i + \underline{A}_i + \underline{X}^+_i = -c_i + \theta^\mu A_{\mu i} + \frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu X^+_{\mu\nu i}, \tag{8.18}$$

となる。展開した場 Φ に対して、Φ^+ は Φ に対するアンチフィールド (antifield) （の Hodge 双対）と言われる。$\boldsymbol{\phi}^i$ と $\boldsymbol{A}_j$ の次数付きポアソン括弧、

$$\{\boldsymbol{\phi}^i(\sigma,\theta), \boldsymbol{A}_j(\sigma,\theta)\} \quad = \quad \delta^i_j\delta^2(\sigma-\sigma')\delta^2(\theta-\theta'), \tag{8.19}$$

を展開すると、(Φ, Φ^+) は正準共役関係を満たすことがわかる。

ここで、$T[1]\Sigma$ の σ^μ の次数を 0、ファイバー方向 θ^μ の次数を 1 とする次数を導入する。すなわち、X^i, $\underline{A}^{+i}$, $\underline{c}^{+i}$, $\underline{c}_i$, $\underline{A}_i$, $\underline{X}^+_i$ 次数はそれぞれ、$(0,1,2,0,1,2)$ とする。これを $\deg\Phi$ と書く。$\mathcal{M} = T^*[1]M$ での次数 $|\Phi|$ に対して $|\Phi| - \deg\Phi$ をゴースト数 $\mathrm{gh}\,\Phi$ という。たとえば、$|\boldsymbol{\phi}^i| = 0$、$|\boldsymbol{A}_i| = 1$ だから、$\mathrm{gh}\, X^i = 0$, $\mathrm{gh}\, A^{+i} = -1$, $\mathrm{gh}\, c^{+i} = -2$ $\mathrm{gh}\, c_i = 1$, $\mathrm{gh}\, A_i = 0$, $\mathrm{gh}\, X^+_i = -1$ となる。AKSZ 作用積分（ホモロジカル関数）S_{BV} は $|S_{BV}| = 0$, $\deg S_{BV} = 0$, $\mathrm{gh} S_{BV} = 0$ である。

展開 (8.17), (8.18) を式 (8.16) に代入すると

$$\begin{aligned} S_{BV} \quad = \quad & \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \left[\underline{A}_i\, \mathbf{d}\underline{X}^i + \tfrac{1}{2}\pi^{ij}\underline{A}_i\,\underline{A}_j - \pi^{ij}\underline{X}^+_i\underline{c}_j + \underline{A}^{+i}\left(\mathbf{d}\underline{c}_i + \frac{\partial\pi^{jk}}{\partial X^i}\underline{A}_j\,\underline{c}_k\right)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial\pi^{ij}}{\partial X^k}\,\underline{c}^{+k}\underline{c}_i\,\underline{c}_j + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\pi^{ij}}{\partial X^n\partial X^k}\underline{A}^{+n}\underline{A}^{+k}\underline{c}_i\,\underline{c}_j\right]. \end{aligned} \tag{8.20}$$

$\underline{A}^{+i} = \underline{c}^{+i} = c_i = \underline{X}^+ = 0$ と置いて θ^μ 積分をおこなうとポアソンシグマ模型の作用積分 (8.2) に一致する。ゲージ変換は、場 Φ に対して、

$$\delta\Phi = \{S_{BV}, \Phi\} \tag{8.21}$$

と定義する。これは、 $\underline{A}^{+i} = \underline{c}^{+i} = c_i = \underline{X}^+ = 0$ とすると、式 (8.10) に一致する。

8.3 Chern-Simons 理論とシンプレクティック幾何

N を 3 次元多様体として、Lie 群 G を構造群とする主ファイバー束 P を考える。P 上に接続を定義し、その接続 1 形式を A とする。A は G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に値を取る 1 形式である。

このとき、以下の積分を Chern-Simons 汎関数という。

$$S_{CS} \quad = \quad \frac{k}{4\pi}\int_N \mathrm{tr}\left(A\wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{8.22}$$

k はレベルまたは結合定数といわれる整数である。k が整数でなければならない理由はのちに説明する。この S_{CS} を作用積分とする力学および量子論を Chern-Simons 理論という。

Remark 8.3.1 Chern-Simons 理論は AKSZ シグマ模型の例である。

Chern-Simons 汎関数の性質を述べる。曲率は

$$F_A \;=\; \mathrm{d}A + A\wedge A = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A] \tag{8.23}$$

と求められる。変分原理によって Euler-Lagrange 方程式を求める。$S_{CS}(A)$ に対して、

$$\frac{\mathrm{d}S_{CS}}{\mathrm{d}t}(A+ta)|_{t=0} \;=\; \frac{k}{2\pi}\int_N \mathrm{tr}(F_A\wedge a) \tag{8.24}$$

となるので変分原理より $F_A = 0$ となる。よってこの理論は平坦接続を記述する。

N が 4 次元多様体 M の境界となっているとする。すなわち $N = \partial M$。M 上の位相不変量（1 次ポントリャーギン類）

$$p_1(M) = \frac{k}{8\pi}\int_M F_A\wedge F_A \tag{8.25}$$

を考える。ストークスの定理より

$$\frac{k}{8\pi}\int_M \mathrm{tr}(F_A\wedge F_A) = \frac{k}{4\pi}\int_{\partial M}\mathrm{tr}\left(A\wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right) = S_{CS} \tag{8.26}$$

となるので S_{CS} は $p_1(M)$ の境界項である。

次に、A の Lie 群によるゲージ変換 $A' = g^{-1}Ag + g^{-1}\mathrm{d}g$ によってどのように変化するか計算する。ここで $g\in C^\infty(N, G) = \mathrm{Map}(N, G)$ は G に値を取る関数である。これをゲージ群 $\mathcal{G}$ という。曲率 F_A は

$$F'_A = g^{-1}F_A g \tag{8.27}$$

と随伴に変換する。ゲージ変換 $A\mapsto A'$ は Lie 群 G の接続の空間 $\mathcal{A}$ への作用となることが確かめられる。これより $g = e^\epsilon$ として Lie 代数の $\mathcal{A}$ への作用が求められる。Lie 代数の作用は

$$\iota_{X_\mathcal{A}}\delta A \;=\; \mathrm{d}\epsilon + [A, \epsilon] \tag{8.28}$$

となる。ここで $\epsilon\in C^\infty(N, \mathfrak{g}) = \mathrm{Map}(N, \mathfrak{g})$ であり、$X_\mathcal{A}$ は ϵ より誘導された $\mathcal{A}$ 上のベクトル場である。これを無限小ゲージ変換という。この変換で S_{CS} は不変 $\iota_{X_\mathcal{A}}S_{CS} = 0$ である。さらに、S_{CS} は Lie 群のゲージ変換で

$$S_{CS}(A') = S_{CS}(A) + \frac{k}{4\pi}\int_{\partial N}\mathrm{tr}(A\wedge \mathrm{d}gg^{-1}) + \frac{k}{12\pi}\int_N \mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g)^3 \tag{8.29}$$

と変換する。今$\partial N=\emptyset$とすると、$S_{CS}(A')=S_{CS}+2\pi kn$となるここで$n=\frac{k}{24\pi^2}\int_N \mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g)^3\in\mathbb{Z}$ は$g:N\to G$の写像度である。すなわち第3項は$g:N\to G$の写像度に比例した整数となる。特にGの3次ホモトピー群が$\pi_3(G)\neq 0$であれば0でないものが取れる。

ここで、Σを2次元リーマン面として3次元多様体Nが$N=\Sigma\times\mathbb{R}$となっているとする。

Proposition 8.3.1 Σ上で

$$\omega \;=\; \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{tr}(\delta A\wedge\delta A) \tag{8.30}$$

とすると、これは$\mathcal{A}$上のシンプレクティック形式である。

ここで、δはΣ上の平坦接続のモジュライ空間$\mathcal{A}_\Sigma$上の外微分で、δAは$T^*\mathcal{A}_\Sigma$の元である。具体的には一つ接続をA_0を固定すると、一般の$A\in\mathcal{A}$は$a\in\Omega^1(\Sigma,\mathfrak{g})$を使って$A=A_0+a$と表される。すなわち$\mathcal{A}$はアフィン空間である。$a$の集合と$A$での$\mathcal{A}$の接空間$T_A\mathcal{A}_\Sigma$を同一視する。この下で$a,b\in T_A\mathcal{A}_\Sigma=\Omega^1(\Sigma,\mathfrak{g})$としたとき、シンプレクティック形式は

$$\omega(a,b) \;=\; \int_\Sigma \frac{1}{2}\mathrm{tr}(a\wedge b) \tag{8.31}$$

を意味する。

(8.28) より

$$\begin{aligned}
\iota_{X_A}\omega &= \int_\Sigma \mathrm{tr}[(\mathrm{d}\epsilon+[A,\epsilon])\wedge\delta A] \\
&= \int_{\partial\Sigma}\mathrm{tr}(\epsilon\delta A)+\delta\int_\Sigma \mathrm{tr}\left[\epsilon\left(\mathrm{d}A+\frac{1}{2}[A,A]\right)\right] \\
&= \int_{\partial\Sigma}\mathrm{tr}(\epsilon\delta A)+\delta\int_\Sigma \mathrm{tr}[\epsilon F_A]
\end{aligned} \tag{8.32}$$

$\partial\Sigma=\emptyset$のとき、

$$\iota_{X_A}\omega \;=\; \delta\int_\Sigma \mathrm{tr}[\epsilon F_A] \tag{8.33}$$

となるので、これより、$\mu=-F_A$とおくと運動量写像の条件$\iota_{X_{\mu(g)}}\omega=-\mathrm{d}\mu(g)$を満たす。式(8.27)より随伴作用が同変であることが示せるので以下がわかる。

Proposition 8.3.2 $\mathcal{A}$へのゲージ群の作用に対する運動量写像は$\mu=-F_A$となる。

第9章　幾何的量子化

9.1　正準量子化

3章のハミルトニアン力学を思い出そう。$\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準シンプレクティック構造 $\omega_{can} = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i$ を考える。これより、正準共役量 (x^i, p_i) のポアソン括弧は $\{x^i, p_j\} = \delta^i_j$ となる。

正準量子化とは、(x^i, p_i) を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の2乗可積分な関数の空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上の次の作用素に置き換える操作である。$\mathcal{H}$ を波動関数のなすヒルベルト空間という。すなわち、x^i を掛け算作用素 x^i, p_i を微分作用素 $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}$ に置き換える。ここで、$L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上微分は超関数としての微分である。ここで $\hbar$ は Planck 定数と呼ばれる定数である。この置き換えを量子化写像 $\mathcal{Q}$ で表す。すなわち、

$$\mathcal{Q}(x^i) = x^i, \qquad \mathcal{Q}(p_i) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{9.1}$$

となる。ポアソン括弧は交換子になり、

$$\mathcal{Q}(\{x^i, p_j\}) \;=\; i\hbar[\mathcal{Q}(x^i), \mathcal{Q}(p_j)], \tag{9.2}$$

となる。写像 $\mathcal{Q}$ が以下の性質を持つと要求するのが自然である。

1. $\mathcal{Q}(f)$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素である。
2. $\mathcal{H} = L^2(R^n)$
3. $\mathcal{Q}(1) = I$、ここで I は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素である。
4. すべての $f, g \in C^\infty(M)$ について $\mathcal{Q}(\{f, g\}) = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{Q}(f), \mathcal{Q}(g)]$.

しかし、正準量子化は条件3を満たさない。さらに、4つのすべての条件を満たす $\mathcal{Q}$ は存在しないことが示される（Groenewold の定理）。

x, p の三次以上の多項式において、満たさない例が構成できることが直接確認できる。まず、x, p の多項式に対して、$\mathcal{Q}$ は x, p の順序の不定性がある。たとえば、これを対称積を取

ることに固定する（Weyl 量子化）。このとき、$x^2p^2 = \frac{1}{9}\{x^3, p^3\} = \frac{1}{3}\{x^2p, xp^2\}$ であるが、$\frac{1}{9}[\mathcal{Q}(x^3), \mathcal{Q}(p^3)] \neq \frac{1}{3}[\mathcal{Q}(x^2p), \mathcal{Q}(xp^2)]$ であり、矛盾する。

9.2　前量子化

まず、一般のシンプレクティック多様体上で条件 2 のヒルベルト空間、$\mathcal{H} = L^2(R^n)$ に相当するヒルベルト空間をより大きなヒルベルト空間に変更し、4 つの条件を満たす $\mathcal{Q}$ を構成する。これを前量子化という。

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする。M は偶数次元 $2n$ である。M 上の複素直線束 L を考える。すなわちファイバーを $\mathbb{C}$ とする複素ベクトル束を考える。さらに $\Gamma(L)$ 上のエルミート内積 $(-,-)$ を仮定する。$(M, L, (-,-))$ をエルミート直線束という。

シンプレクティック形式は非退化なので、ω^n は M の体積要素となる。L 上の切断 $s_1, s_2 \in \Gamma(M, L)$ に対して、内積を

$$\langle s_1,\, s_2\rangle \;=\; \int_M (s_1, s_2)\omega^n \tag{9.3}$$

と定義する。切断 $s \in \Gamma(M, L)$ は

$$\langle s,\, s\rangle \;=\; \int_M (s, s)\omega^n \tag{9.4}$$

が有限であるとき、2 乗可積分であるという。$\Gamma(M, L)$ 上の 2 乗可積分な切断の集合を完備化したものヒルベルト空間を $\mathcal{H} = L^2(M, L)$ と書く。

L 上に接続 $\nabla : \Gamma(L) \to \Gamma(L \otimes T^*M)$ を導入する。接続 ∇ はエルミート接続であるとする。エルミート接続とは、$s_1, s_2 \in \Gamma(M, L)$ と $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$X(s_1, s_2) \;=\; (\nabla_X s_1, s_2) + (s_1, \nabla_X s_2) \tag{9.5}$$

となる接続のことである。

Definition 9.2.1 曲率を R とするとき、

$$R \;=\; \frac{1}{\hbar}\omega, \tag{9.6}$$

が成り立つとき、L は前量子化可能であるといい、$(L, \nabla, (-,-))$ を前量子化（直線）束という。

以下、L は前量子化束であるとする。

　このとき、$f \in C^\infty(M.\mathbb{R})$ に対して

$$\mathcal{Q}_{pre}(f) \;=\; -i\hbar\nabla_{X_f} + f \tag{9.7}$$

と定義する。ここで第２項は f をかける演算子である。式 (9.7) で定義された $\mathcal{Q}$ は 9.1 章の 1,3,4 の条件を満たす。特に

Proposition 9.2.2 すべての $f, g \in L^2(M, L)$ について $\mathcal{Q}_{pre}(\{f, g\}) = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{Q}_{pre}(f), \mathcal{Q}_{pre}(g)]$.

Proof

Example 9.2.1 $M = \mathbb{R}^{2n}$ として、座標を (x^i, p_i) とし、標準シンプレクティック形式 $\omega_{can} = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i$ をとる。Liouville １形式 ϑ を $\omega_{can} = -\mathrm{d}\vartheta$ とすると、$\vartheta = p_i \mathrm{d}x^i$ である。接続の接続１形式を、

$$A \;=\; -\frac{1}{\hbar}p_i \mathrm{d}x^i = \vartheta \tag{9.8}$$

と取ると、曲率は

$$\mathrm{d}A \;=\; \frac{1}{\hbar}\omega \tag{9.9}$$

であるから、$R = \frac{1}{\hbar}\omega$ となる。$\psi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ に対して、

$$\nabla\psi \;=\; \mathrm{d}\psi - iA\psi \tag{9.10}$$

である。さらに、

$$\nabla\psi \;=\; X\psi - \frac{i}{\hbar}p_i(Xx^i)\psi \tag{9.11}$$

を使うと

$$X(\psi_1, \psi_2) \;=\; (\nabla_X\psi_1, \psi_2) + (\psi_1, \nabla_X\psi_2) \tag{9.12}$$

となることが示せる。したがって ∇ はエルミート接続であり、$(L, \nabla, (-,-))$ は前量子化束となる。$\mathcal{Q}_{pre}$ を具体的に計算すると、

$$\mathcal{Q}_{pre}(f) \;=\; -i\hbar\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - p_i\frac{\partial f}{\partial p_i} + f \tag{9.13}$$

となる。よって、

$$\mathcal{Q}_{pre}(x^i) \;=\; -i\hbar\frac{\partial}{\partial p_i} + x^i, \tag{9.14}$$

$$\mathcal{Q}_{pre}(p_i) \;=\; i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{9.15}$$

となる。式 (9.14),(9.15) は (9.1) とは異なる。

9.3 偏極

次に、部分束に制限することにより、$\mathcal{Q}$ の作用するヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を小さくする。(M,ω) をシンプレクティック多様体とする。$TM_{\mathbb{C}}$ を接束 TM の複素化とする。すなわち

$$TM_{\mathbb{C}} = \{X+iY|X,Y\in\mathfrak{X}(M)\} \tag{9.16}$$

$TM_{\mathbb{C}}$ 上のシンプレクティック形式を

$$\omega_T = \omega(X_1+iX_2,Y_1+iY_2)=\omega(X_1,Y_1)-\omega(X_2,Y_2)+i(\omega(X_1,Y_2)+\omega(X_2,Y_1)) \tag{9.17}$$

Definition 9.3.1 シンプレクティック多様体 (M,ω) に対して TM の抱合的なラグランジアン部分束 $\mathcal{F}$ を偏極という。すなわち、

1. 任意の $X,Y\in\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ に対して $[X,Y]\in\mathfrak{X}(\mathcal{F})$.
2. $\omega|_{\mathcal{F}}=0$. すなわち任意の $X,Y\in\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ に対して $\omega(X,Y)=0$.

を満たすとき、$\mathcal{F}$ を偏極という。

実偏極

$\overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}$

複素偏極

Kähler 偏極

Example 9.3.1

第10章　変形量子化

10.1　Weyl量子化と変形量子化

正準量子化の置き換えである $x^i \to x^i$, $p_i \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}$ を以下のように実現しようというのが Weyl 量子化である。

$\mathbb{R}^2$ の正準座標を (x,p) とする。すなわち、シンプレクティック形式 $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}p$ とする。$f(x,p)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の関数とする。このとき、

$$(\hat{f}\psi)(x) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar}\iint_{R^2} e^{\frac{i}{\hbar}(x-y)p} f\left(\frac{x+y}{2}, p\right)\psi(y)dydp \tag{10.1}$$

で波動関数 $\psi(x)$ に作用する作用素 $\hat{f}$ を定義する。$f \mapsto \hat{f}$ で量子化を決める。すると、

$$\hat{x} = x, \qquad \hat{p} = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

となることが直接確認できる。式 (10.1) による $C^\infty(M)$ から $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の作用素の空間への写像 $f \mapsto \hat{f}$ を Weyl 量子化という。

Lemma 10.1.1 作用素 $\hat{f}(x,p)$ は $\hat{x}, \hat{p}$ の対称化積となる。

２つの関数 $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ があったとき、

$$(\hat{f}\cdot\hat{g})\psi(x) = \widehat{(f * g)}\psi(x)$$

となる。ここで、積 $*$ は、

$$\begin{aligned}(f * g)(x,p) &= f(x,p)\left[\exp\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x}\right)\right]g(x,p) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\hbar)^n}{2^n n!}f\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x}\right)^n g \\ &= fg + \frac{i\hbar}{2}\{f,g\} + \cdots,\end{aligned}$$

で定義される。これを Moyal 積という。一般に $f * g \neq g * f$ であることに注意。

Lemma 10.1.2 *Moyal* 積は、結合律を満たす。すなわち、$f,g,h \in C^\infty(M)$ に対して、

$$(f * g) * h \;=\; f * (g * h).$$

これを一般の多様体上に一般化する。

M をポアソン多様体とする。すなわち M は可微分多様体で、$f,g \in C^\infty(M)$ に対して、ポアソン括弧、

$$\{f,g\} = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}$$

が存在するとする。

Definition 10.1.3 (M,π) をポアソン多様体とする。$A = C^\infty(M)$ の変形量子化とは、$\hbar$ を形式的パラメータとして A 上の積 $* : A \times A \to A[[\hbar]]$ で以下の条件を満たすものを求めることである。

1. $f * g = \sum \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n B_n(f,g)$ となる。ここで、B_n は双微分作用素で
$$B_0(f,g) = fg, \qquad B_1(f,g) = \{f,g\}.$$
2. 結合律を満たす。すなわち、$f,g,h \in A$ に対して、
$$(f * g) * h = f * (g * h).$$
3. D_n を微分作用素として、$R = 1 + \sum_{n=1}^\infty \hbar^n D_n$ となる作用素が存在して、
$$R(f * g) = R(f) *' R(g)$$
と書けるとき $*$ と $*'$ は同値であると定義する。

条件を満たす積 $*$ をスター積という。

局所座標で書くと最初の 2 項は

$$(f * g)(x) \;=\; fg + \frac{i\hbar}{2}\frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} + \cdots,$$

となる。

Lemma 10.1.4 $d = 2m$ を偶数として $\mathbb{R}^d$ を考える。$\mathbb{R}^d$ の座標を $(x^1,\ldots,x^m,p_1,\ldots,p_m)$ として、シンプレクティック形式として標準シンプレクティック形式 $\omega_{can} = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i$ が取れる。

$C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の *Moyal* 積、

$$(f * g)(x,p) \;=\; f(x,p)\left[\exp\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i}\right)\right]g(x,p)$$

を考えると、$(C^\infty(\mathbb{R}^d), *)$ は変形量子化の定義を満たす。

10.2 ポアソン多様体上の変形量子化とポアソンシグマ模型

ポアソンシグマ模型を量子化することにより任意のポアソン多様体上に変形量子化が存在することが証明される。これには場の量子論の量子化の知識を必要とするため、この章のみで自己完結した説明にはなっていない。ここでは基本的な流れを説明する。この理論の量子化は Batalin-Vilkovisky 量子化の例ともなっている。詳しくは [5, 1] を参照されたい。

10.2.1 ディスク上のポアソンシグマ模型

2 次元ディスク（円盤）上のポアソンシグマ模型を経路積分量子化すると Kontsevich によるポアソン多様体上の変形量子化公式が得られる。これは、AKSZ シグマ模型の量子化の一番基本的な例となる。

まず初めに結果を記載する。以下の定理が得られる。

Theorem 10.2.1 2 次元ディスク上のポアソンシグマ模型のオブザーバブルの分配関数はポアソン多様体上のスター積の定義を満たす。式で書くと、

$$f * g(x) \;\; = \;\; \langle f(\boldsymbol{\phi}(1)) g(\boldsymbol{\phi}(0)) \rangle = \int_{\boldsymbol{\phi}(\infty)=x} \mathcal{D}\boldsymbol{\phi} \mathcal{D}\boldsymbol{A} \; f(\boldsymbol{\phi}(1)) g(\boldsymbol{\phi}(0)) e^{\frac{i}{\hbar} S_q},$$

となるが、記号については以下の構成の説明とともに説明する。これをスター積の *Kontsevich* 公式という。

経路積分

ポアソンシグマ模型を考える 2 次元多様体として、2 次元ディスク $D := \{z \in \mathbb{C} || z| \leq 1\}$ を考える。これは境界のある多様体である。ポアソンシグマ模型の作用積分 S は 2 次元共形変換で不変なので、D 上のポアソンシグマ模型は上半平面 $\Sigma := \{z = \sigma^0 + i\sigma^1 | \sigma^1 \geq 0\}$ 上のポアソンシグマ模型と共形同値である。

まず、例 8.2.1 で構成したポアソンシグマ模型の AKSZ シグマ模型による記述を考える。すなわち、写像空間 $\mathrm{Map}(T[1]\Sigma, T^*[1]M)$ 上のホモロジカル関数として式 (8.20)、

$$S = S_{BV} = S_0 + S_1 = \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \left(\boldsymbol{A}_i \mathbf{d}\boldsymbol{\phi}^i + \frac{1}{2} f^{ij}(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_j \right), \tag{10.2}$$

を取ったものを考える。

分配関数 $Z=\int_L \mathcal{D}\boldsymbol{\phi}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ e^{\frac{i}{\hbar}S_q}$ およびオブザーバブル $\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_r$ の相関関数

$$Z(\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_r)=\int_L \mathcal{D}\boldsymbol{\phi}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ \mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_r e^{\frac{i}{\hbar}S_q}=\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k Z_k(\mathcal{O}_1\cdots\mathcal{O}_r).$$

は $\hbar$ の形式的冪級数として計算される。ここで、$\hbar$ は形式的な不定元である。S_q はゲージ固定した量子作用積分で以降で構成する。

ゲージ固定した量子作用積分 S_q は超場のみで書くことはできないので、超場を θ 展開した式 (8.17) および (8.18)、

$$\boldsymbol{\phi}^i \ = \ X^i-\underline{A}^{+i}+\underline{c}^{+i}, \tag{10.3}$$

$$\boldsymbol{A}_i \ = \ -c_i+\underline{A}_i+\underline{X}^+_i. \tag{10.4}$$

の各成分の場を使って書く。

10.2.2　BV 量子化

ゲージ固定

一般に、AKSZ シグマ模型は場の理論の Batalin-Vilkovisky(BV) 形式に同値なので、量子化には BV 量子化の手法を使う。

まず、古典作用積分 S のゲージ固定をおこなう。

First, we introduce an ゴースト数 -1 の FP アンチゴースト $\bar{c}\in\Gamma(\Sigma,X^*T[1]M)$ ゴースト数 0 の Nakanishi-Lautrup 場 $b\in\Gamma(\Sigma,X^*T^*M)$、それらのアンチフィールドとしてゴースト数 0 で $\deg\bar{c}^+=2$ の場 $\bar{c}^+\in\Gamma(T[1]\Sigma,X^*TM)$、およびゴースト数 -1 で $\deg b^+_i=2$ の場 $b^+_i\in\Gamma(T^*[1]\Sigma,X^*T^*[1]M)$ を導入する。局所座標で書くと、$\bar{c}^i$, b^i, $\underline{\bar{c}}^+_i=\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu\bar{c}^+_{\mu\nu i}$, $\underline{b}^+_i=\frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu b^+_{\mu\nu i}$ となる。

QP 多様体としての次数付きポアソン括弧、すなわち、BV 括弧は、$\bar{c}^i$ と $\bar{c}^+_j$、b^i と b^+_j が正準共役量、すなわち

$$\{\bar{c}^i(\sigma,\theta),\underline{\bar{c}}^+_j(\sigma',\theta')\}=\{b^i(\sigma,\theta),\underline{b}^+_j(\sigma',\theta')\}=\delta^i{}_j\delta^2(\sigma-\sigma')\delta^2(\theta-\theta'), \tag{10.5}$$

となるように拡張する。その他の括弧は 0 である。

古典 BV 作用 S に以下のゲージ固定項

$$S_{GF}=-\int_{T[1]\Sigma}\mathrm{d}^2\sigma\mathrm{d}^2\theta\ b^i\underline{\bar{c}}^+_i, \tag{10.6}$$

を加え、$S_q = S + S_{GF}$ とする。

次に、ゴースト数 1 の汎関数 $\Psi(\Phi)$ を決めることによってゲージ固定条件を決める。$\Psi(\Phi)$ をゲージ固定フェルミオンという。今、ゲージ固定フェルミオンとして、

$$\Psi = \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \; \bar{c}^i \mathbf{d} * A_i, \tag{10.7}$$

ととる。ここで、$*$ は Σ 上の計量を使った Hodge スター作用素である。ここでゲージ固定のために Σ 上に計量を導入しておく。ゲージ固定 BV 作用 S_q のすべてのアンチフィールドに式

$$\Phi^+ = \frac{\delta\Psi}{\delta\Phi},$$

を代入することで BV 形式でのゲージ固定が実行される。

ゲージ固定フェルミオン (10.7) より、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} &\underline{\bar{c}}_i^+ = \mathbf{d} * A_i, \quad \underline{A}^{+i} = - * \mathbf{d}\bar{c}^i, \\ &\underline{X}_i^+ = 0, \quad \underline{c}_i^+ = \underline{b}_i^+ = 0. \end{aligned} \tag{10.8}$$

これらの式 (10.8) を S_q に代入したものを $S_{q|fix}(\Phi) = S_q\left(\Phi, \Phi^+ = \frac{\delta\Psi}{\delta\Phi}\right)$ とすると、

$$\begin{aligned} S_{q|fix} \;\; = \;\; & \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \Bigg(\underline{A}_i \mathbf{d} X^i - * \mathbf{d}\bar{c}^i \mathbf{d} c_i - \underline{b}^i \mathbf{d} * \underline{A}_i + \frac{1}{2}\pi^{ij}(X)\underline{A}_i \underline{A}_j \\ & - \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial X^k}(X) * \mathbf{d}\bar{c}^k \underline{A}_i c_j + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \pi^{ij}}{\partial X^k \partial X^l}(X) * \mathbf{d}\bar{c}^k * \mathbf{d}\bar{c}^l c_i c_j \Bigg), \end{aligned} \tag{10.9}$$

となる。分配関数は、

$$Z = \int_{\Phi^+ = \frac{\delta\Psi}{\delta\Phi},} \mathcal{D}X \mathcal{D}\underline{A} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}b \; e^{\frac{i}{\hbar} S_q},$$

となる。簡単のため積分測度は $\mathcal{D}\Phi = \mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A} := \mathcal{D}X \mathcal{D}\underline{A} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}b$ と書く。

量子マスター方程式とオブザーバブル

分配関数 Z がゲージ固定条件によらないことを要求する。具体的にはゲージ固定フェルミオン Ψ を $\Psi + \delta\Psi$ に無限小変化させても分配関数 Z は不変であるという

$$Z(\Psi) = Z(\Psi + \delta\Psi),$$

という関係式を要求する。右辺を $\delta\Psi$ で展開して経路積分で部分積分を使うと $S_q = S + S_{GF}$ に対して、

$$\Delta e^{\frac{i}{\hbar}S_q(\Phi,\Phi^+)} = 0, \tag{10.10}$$

であればよいことがわかる。ここで、Δ は 7.4 章で導入した奇の Laplace 作用素で、具体的に場で書くと、

$$\Delta = \sum_{\Phi} \frac{\partial}{\partial\Phi}\frac{\partial}{\partial\Phi^+}, \tag{10.11}$$

である。指数を展開することにより、式 (10.10) は次の**量子マスター方程式**と同値である。

$$2i\hbar\Delta S_q - \{S_q, S_q\} = 0. \tag{10.12}$$

一般に、量子作用積分は同様の手続きによりこの量子マスター方程式を満たす必要がある。より一般に量子 AKSZ シグマ模型は第 1 項と第 2 項がそれぞれ $\Delta S_q = 0$ および $\{S_q, S_q\} = 0$ を満たすことが示せる。実際、ポアソンシグマ模型の作用積分 $S_q = S + S_{GF}$ は（形式的に）2 つの式を満たす。形式的に、と言っているのは無限次元の写像空間の場合は、この方程式、特に奇の Laplace 作用素 Δ は発散を含むからである。一般には適切な正則化が必要である。ポアソンシグマ模型の時は適切な正則化が存在する。

次に、オブザーバブルの定義を述べる。

Definition 10.2.2 場の関数、または汎関数 $\mathcal{O}$ が

$$i\hbar\Delta\mathcal{O} - \{S_q, \mathcal{O}\} = 0, \tag{10.13}$$

を満たすとき、$\mathcal{O}$ をオブザーバブルという。

式 (10.13) は、オブザーバブル $\mathcal{O}$ の分配関数、

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \int_{\Phi^+=\frac{\delta\Psi}{\delta\Phi},} \mathcal{D}\Phi\ \mathcal{O}e^{\frac{i}{\hbar}S_q},$$

がゲージ固定条件の無限小変化 $\Psi \mapsto \Psi + \delta\Psi$ で不変であるという要求から導出される。

$$S_q(\Phi,\Phi^+) \ = \ S_q\left(\Phi, \frac{\delta\Psi}{\delta\Phi}\right)$$

より、

$$\delta S_q(\Phi,\Phi^+) \ = \ \sum_{\Phi}\frac{\delta S_q}{\delta\Phi^+}\frac{\delta\Psi}{\delta\Phi}$$

となるので、$\langle\mathcal{O}\rangle$ が無限小変化 $\Psi \mapsto \Psi + \delta\Psi$ で不変であることを課すと

$$\Delta\left(\mathcal{O}e^{\frac{i}{\hbar}S_q}\right) = 0 \tag{10.14}$$

が得られる。式 (10.2.3) を展開すると、同値な条件として、式 (10.13) が得られる。

境界条件

２次元ディスク D、または上半平面 Σ には境界があるので、境界条件を指定する。

まず古典 AKSZ シグマ模型の作用積分 S を考える。S の変分は

$$\delta S = \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \left(\delta \boldsymbol{A}_i \mathbf{d}\boldsymbol{X}^i + \boldsymbol{A}_i \mathbf{d}\delta\boldsymbol{X}^i + \delta\boldsymbol{X}^i \frac{1}{2}\frac{\partial \pi^{jk}}{\partial \boldsymbol{X}^i}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_k + \pi^{ij}(\boldsymbol{X})\delta\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j\right), \tag{10.15}$$

運動方程式を導くために、項 $\boldsymbol{A}_i\mathbf{d}\delta\boldsymbol{X}^i$ を部分積分する。この部分積分から出る境界項が消える必要がある。すなわち、

$$\begin{aligned}\int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta\ \mathbf{d}(\boldsymbol{A}_i\delta\boldsymbol{X}^i) &= \int_{\partial T[1]\Sigma} \mathrm{d}\sigma^0 \mathrm{d}\theta^0 \boldsymbol{A}_i\delta\boldsymbol{X}^i \\ &= \int_{\partial T[1]\Sigma} \mathrm{d}\sigma^0 \mathrm{d}\theta^0 \left(\underline{A}_i\delta X^i + c_i\delta\underline{A}^{+i}\right) = 0.\end{aligned} \tag{10.16}$$

よって、(10.16) を満たす境界条件は $A_{//i}| = 0$ または $\delta X^i| = 0$、および、$c_i| = 0$ または $\delta A^{+i}_{//}| = 0$ となる。より一般の、たとえば i によって違う境界条件も可能だが、ここでは考えない。ここで、記号 $A_{//i} = A_{0i}$ は $\underline{A}_i$ の境界に平行な成分を表し、$\Phi|$ は境界での値を表す。変形量子化公式を導出するために、境界条件として $A_{//i}| = 0$ かつ $c_i| = 0$ をとる。

変分原理より、古典運動方程式は、

$$\begin{aligned}&\mathbf{d}\boldsymbol{X}^i + \pi^{ij}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}_j = 0, \\ &\mathbf{d}\boldsymbol{A}_i + \frac{1}{2}\frac{\partial \pi^{jk}}{\partial \boldsymbol{X}^i}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_k = 0.\end{aligned}$$

となる。運動方程式に境界条件 $A_{//i}| = 0, c_i| = 0$ を使うと、他の場に対する境界条件として、$X^i| =$ 定数、および $A^{+i}_{//}| = 0$ が得られる。まとめると、境界条件は、

$$\begin{aligned}&X^i| = x^i = \text{constant}, \quad A_{//i}| = 0, \\ &c_i| = 0, \quad A^{+i}_{//}| = 0,\end{aligned} \tag{10.17}$$

ととる。ここで x^i は境界条件より決まる σ に関する任意の定数である。

他の場に関する境界条件は、(10.9) より導かれる運動方程式との無矛盾性、およびゲージ固定条件 (10.8) より決定される。まとめると、

$$X_i^+| = 0, \quad b^i = 0, \quad \underline{c}_i^+| = \underline{b}_i^+| = 0,$$
$$\underline{\bar{c}}_i^+| = \mathbf{d} * \underline{A}_i|, \quad \bar{c}^i| = \mathrm{constant}.$$

古典マスター方程式の左辺 $\{S_q, S_q\}$ の計算は境界項が出るが、この境界条件で境界項は消え、古典マスター方程式が満たされることが示せる。したがって、境界条件は古典マスター方程式 $\{S_q, S_q\} = 0$ を破らない。

プロパゲーター（伝播関数）

オブザーバブルの相関関数の計算をファインマン・ダイアグラムにより摂動計算をおこなうため、プロパゲーターとバーテックスを求める。これにより、相関関数の $\hbar$ による摂動展開が求められる。これが変形量子化のスター積と一致する。

まずプロパゲーターを求める。プロパゲーターはゲージ固定した作用積分 (10.9) の最初の３項から求められる。これを S_F とすると、

$$\begin{aligned} S_F &= \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \Big(\underline{A}_i \mathbf{d} X^i - b^i \mathbf{d} * \underline{A}_i - *\mathbf{d}\bar{c}^i \mathbf{d} c_i \Big) \\ &= \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \Big(\underline{A}_i \mathbf{d} X^i + \underline{A}_i * \mathbf{d} b^i - c_i \mathbf{d} * \mathbf{d}\bar{c}^i \Big). \end{aligned} \tag{10.18}$$

ゲージ固定された超場、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^i &:= \varphi^i + *\mathbf{d}\bar{c}^i + 0, \\ \boldsymbol{A}_i &:= -c_i + \underline{A}_i + 0, \end{aligned} \tag{10.19}$$

を導入すると、プロパゲーターは超場に対する超プロパゲーターとしてまとめて書ける。ここで、$\boldsymbol{\varphi}$ は、境界条件から決まる定数を x^i として、$\boldsymbol{X}^i = x^i + \boldsymbol{\varphi}^i$ で定義される場である。

$\mathbf{d}_z$、および、$\mathbf{d}_w$ をそれぞれ上半平面の複素変数 $z \in \Sigma$ および $w \in \Sigma$ に関する超微分とする。$G(z,w)$ を微分方程式 $\mathbf{d}_w * \mathbf{d}_w G(z,w) = 2\pi\delta(z-w)$ を満たすグリーン関数とする。ここで、z に関してはディリクレ境界条件、$G(z,w)|_{z=0} = 0$、w に関してはノイマン境界条件、$\mathbf{d}_w G(z,w)|_{w=0} = 0$ を課すものとする。解は、$G(z,w) = \frac{1}{2i} \ln \frac{(z-w)(z-\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})(\bar{z}-w)}$ となる。このグリーン関数を使うと、超プロパゲーターは

$$\langle \boldsymbol{\varphi}^i(w) \boldsymbol{A}_j(z) \rangle = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta^i{}_j (\mathbf{d}_z + \mathbf{d}_w) G(z,w), \tag{10.20}$$

となる。これが各場の境界条件 (10.17) を満たすことは確認できる。In addit この式 (10.20)) の他に $\underline{A}_i$ と b^i のプロパゲーター $\langle \underline{A}_i(w) b^i(z) \rangle$ も存在するが、これはスター積の構成には現れないので省略する。

バーテックス（頂点）

ゲージ固定した作用積分 (10.9) の後半の 3 項を S_I とかく。これを相互作用項といい、この項よりバーテックスを読み取る。S_I はゲージ固定された超場 (10.19) で書くと、

$$
\begin{aligned}
S_I &= \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \biggl(\frac{1}{2}\pi^{ij}(\phi)\underline{A}_i\underline{A}_j - \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial X^k}(X) * \mathbf{d}\bar{c}^k \underline{A}_i c_j \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \pi^{ij}}{\partial X^k \partial X^l}(X) * \mathbf{d}\bar{c}^k * \mathbf{d}\bar{c}^l c_i c_j \biggr) \\
&= \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \ \frac{1}{2}\pi^{ij}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j.
\end{aligned} \tag{10.21}
$$

となる。$\boldsymbol{X}^i$ と $\boldsymbol{A}_i$ を古典解 $\boldsymbol{X}^i = x^i$, $\boldsymbol{A}_i = 0$ から $\boldsymbol{X}^i = x^i + \boldsymbol{\varphi}^i$、$\boldsymbol{A}_i = 0 + \boldsymbol{A}_i$ と展開し、これを (10.21) に代入して、$\pi^{ij}(\boldsymbol{X})$ をテイラー展開すると、

$$
S_I = \frac{1}{2}\int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\partial_{l_1}\partial_{l_2}\cdots\partial_{l_k}\pi^{ij}(x)\boldsymbol{\varphi}^{l_1}\boldsymbol{\varphi}^{l_2}\cdots\boldsymbol{\varphi}^{l_k}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j, \tag{10.22}
$$

となる。ここから $\hbar^{-1}$ 次のバーテックスが読み取れる。式 (10.22) は無限級数なので、バーテックスは無限種類ある。展開 (10.22) より、各 $k = 0, 1, \ldots$ に対して、バーテックスが 1 種類ずつある。k 次のバーテックスは、重み $\frac{1}{2}\frac{1}{k!}\partial_{l_1}\partial_{l_2}\cdots\partial_{l_k}\pi^{ij}(x)$ を持ち、2 本の $\boldsymbol{A}$ 外線と k 本の $\boldsymbol{\varphi}$ 外線を持つ。

　オブザーバブル $\mathcal{O}$ の分配関数を $S_q|_{fix} = S_F + S_I$ で展開すると、

$$
\langle \mathcal{O} \rangle \ = \ \int \mathcal{O} e^{\frac{i}{\hbar}(S_F + S_I)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\hbar^n n!} \int \mathcal{O} e^{\frac{i}{\hbar}S_F} S_I^n, \tag{10.23}
$$

となる。分配関数を場の理論の摂動計算で計算する。$\mathcal{O}$ は超場 $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{A}$ の関数または汎関数なので、超プロパゲーター $\langle \boldsymbol{\varphi}^i(w)\boldsymbol{A}_j(z) \rangle$ のグリーン関数を代入し、場の理論の摂動計算で使われる Wick の定理で計算できる。

タドポール (tadpole) グラフの繰りこみ

シグマ模型の写像空間 $\mathrm{Map}(T[1]\Sigma, T^*[1]M)$ は無限次元なので、奇の Laplace 作用素や分配関数、相関関数などの計算に無限大の発散が現れる。今の場合、これはタドポールといわれる

超プロパゲーターの始点と終点が同一のグラフから現れる。これは $\lim_{w\to z} G(z,w)$ に対応する。この発散項たちをゲージ不変性、すなわち量子 BV マスター方程式と無矛盾に消去すればよい。これが繰りこみの基本的な考え方である。今の場合タドポールを持つグラフの寄与をすべて 0 とする正則化をする。物理的な理論では必ずしもタドポールを持つグラフの寄与を 0 にしないが、今の場合正しいスター積を導く。これは、量子作用積分 S_q に量子 BV マスター方程式を変えないカウンター項（補正項）を加えることで実現される。実際、

$$S_{ct} = \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\sigma \ \frac{\partial \pi^{ij}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}^i} \boldsymbol{A}_j \kappa,$$

とすると、タドポールを持つグラフの寄与をいっせいに 0 にできる。ここで、κ は繰りこみの係数である。$S_q + S_{ct}$ が量子 BV マスター方程式を満たすことは実際に確認できる。

10.2.3　スター積との対応

境界上のオブザーバブルとその相関関数

$\boldsymbol{X}$ の任意関数 $f(\boldsymbol{X})$ を Σ の境界に制限したもの $f(\boldsymbol{X})|$ を考える。これを、オブザーバブルの定義式 (10.13) の左辺に代入して境界条件 (10.17) を使うと式を満たす。したがって、$f(\boldsymbol{X})|$ はオブザーバブルである。このオブザーバブルは頂点作用素ともいわれる。

これの相関関数を計算する。ここでは特に、$f(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X})$ を任意関数として、境界上の２点 s, t に依存したオブザーバブル $\mathcal{O} = f(\boldsymbol{X}(t))g(\boldsymbol{X}(s))$ の相関関数を求め、これが変形量子化の定義 10.1.3 の１番目を満たすことを見る。

ディスク上の共形変換の自由度を使うと、境界である S^1 の３点を固定することができる。この３点を $\sigma^0 = 0, 1, \infty$ とする。$\boldsymbol{X}$ の境界条件 $\boldsymbol{X}^i(\infty) = x^i$ を境界 $\sigma^0 = \infty$ での $\boldsymbol{X}$ の値として指定する。共形変換でオブザーバブルを $\mathcal{O} = f(\boldsymbol{X}(1))g(\boldsymbol{X}(0))$ と変換する。相関関数 $\langle f(\boldsymbol{X}(1))g(\boldsymbol{X}(0))\rangle$ をファインマンダイアグラムで摂動計算する。

プロパゲーターが次数 $\hbar^1$、バーテックスが次数 $\hbar^{-1}$ だから、次数 $\hbar^n$ の項は、n 個のバーテックスと $2n$ 個のプロパゲーターから構成される。具体的にこれを構成するため、Σ の境界の２点と内部の n 点を取る。まず、Σ の境界に２点を取る。共形変換の自由度を使って、２点を $z = u_L = 0$ と $z = u_R = 1$ に選ぶことができる。この点に頂点作用素 $F(\boldsymbol{X}(1)), G(\boldsymbol{X}(0))$ を挿入する。これは相関関数 $\langle F(\boldsymbol{X}(1)), G(\boldsymbol{X}(0))\rangle$ を表す。次に、Σ の内部に n 個の点をとる。これらを $u_j \in \Sigma, (j = 1, 2, \cdots)$ とする。ここで、$u_j, (j = 1, 2, \cdots, n)$ はバーテックスを表す Σ の内部の n 個の点である。これらの合わせて $n+2$ 点から２点 u_i, u_j を取り有向線分で結ぶ。

線分にプロパゲーター $\mathbf{d}G(u_i, u_j)$ を割り当てる。上記で書いたように $2n$ 本の線分で結んだグラフたちが相関関数の次数 $\hbar^n$ の項に対応する。結び方は何種類もあるのですべての結び方について足し合わせる。ただし、繰り込みによってタドポール（始点と終点が同じ点の有向線分）の相関関数への寄与は 0 なので考えない。

集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ から $\{1,2,\cdots,n,L,R\}$ への写像 $v_a : \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n,L,R\}$ を導入する。$a=1,2,\ j=1,2,\cdots,n$ として、u_j から $u_{v_a(j)}$ へのプロパゲーターを $\mathbf{d}G(u_j, u_{v_a(j)})$ と書く。10.2.2 章の議論よりタドポールを含むグラフの寄与は 0 なのですべての j で $v_a(j) \neq j$ とする。２つのバーテックス作用素は $\boldsymbol{X}$ のみの関数であることに注意する。

すべてのバーテックスはちょうど２個の $\boldsymbol{A}_i$ の足を持つのでゼロでないファインマンダイアグラムの重みは、

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{(i\hbar)^n}{(2\pi)^{2n}}\right)\int \wedge_{j=1}^n \mathbf{d}G(u_j, u_{v_1(j)}) \wedge \mathbf{d}G(u_j, u_{v_2(j)}),$$

となることがわかる。ここで $\mathbf{d} = \mathbf{d}_z + \mathbf{d}_w$ である。これがスター積の中のファインマンダイアグラム Γ から得られる $\hbar^n$ 項 $(-1)^n \mathcal{B}_{\Gamma n}(f,g)$ の係数を与える。

摂動展開の最初の２項は、

$$\begin{aligned}\langle f(\boldsymbol{X}(1)) g(\boldsymbol{X}(0))\rangle &= \int_{\boldsymbol{X}(\infty)=x} \mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ f(\boldsymbol{X}(1)) g(\boldsymbol{X}(0)) e^{\frac{i}{\hbar}S_q} \\ &= f(x)g(x) + \frac{i\hbar}{2}\pi^{ij}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\frac{\partial g(x)}{\partial x^j} + O(\hbar^2) \\ &= f(x)g(x) + \frac{i\hbar}{2}\{f(x), g(x)\}_{PB} + O(\hbar^2), \end{aligned} \tag{10.24}$$

となる。第１項は運動方程式の解を $\boldsymbol{X}^i = x^i$ を代入した通常の関数の積である。第２項は f と g のポアソン括弧となる。すなわち、相関関数は定義 10.1.3 の条件１を満たす。

より高次の項はファインマンダイアグラムの計算から決定される。ポアソンシグマ模型は標的空間 M のポアソン構造のみから決定されるので、スター積 (10.24) 高次項はポアソン構造 π およびその微分のみで記述される。

$\pi^{ij}(x)$ が x によらない定数の場合、摂動計算すなわちスター積は簡単になる。この場合、式 (10.22) から得られるバーテックスは π^{ij} の微分がない $\frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j$ のみなので、相関関数は

$$\begin{aligned}\langle f(\boldsymbol{X}(1)) g(\boldsymbol{X}(0))\rangle &= \int_{\boldsymbol{X}(\infty)=x} \mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ f(\boldsymbol{X}(1)) g(\boldsymbol{X}(0)) e^{\frac{i}{\hbar}S_q} \\ &= \lim_{y\to x}\exp\left(\frac{i\hbar}{2}\pi^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\right) f(x)g(y), \end{aligned}$$

となる。これは、 π^{ij} を定数としたときのスター積、いわゆる Moyal 積に他ならない。

スター積の定義 10.1.3 の条件 $2, 3$ の確認

ここでは相関関数が定義 10.1.3 の変形量子化のスター積の満たすべき条件 2，3 すなわち、結合法則と同値類の条件をどのように満たすかを見る。

条件 2，結合法則はゲージ対称性から得られる相関関数に対する Ward-Takahashi 恒等式から導かれる。オブザーバブルの満たす恒等式より経路積分は

$$\int_{X(\infty)=x} \mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ \Delta\left(\mathcal{O}e^{\frac{i}{\hbar}S_q}\right) = 0, \tag{10.25}$$

を満たすが、この式を展開するとオブザーバブルの相関関数に対する Ward-Takahashi 恒等式が得られる。今、オブザーバブルとして $\mathcal{O} = f(\boldsymbol{X}(1))g(\boldsymbol{X}(t))h(\boldsymbol{X}(0))$ を取る。ただし、$f, g, h \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ である。ここで t は Σ の境界の $0 < t < 1$ を満たす点とする。また、τ を t と組になる次数 1 の局所座標とする。つまり、(t, τ) を $T[1]\partial\Sigma$ の座標とする。

共形変換では Σ 上の 3 点だけを固定できた。すでに 2 つのオブザーバブルを $z = 0, z = 1$ に固定し、境界条件を $z = \infty$ で決めたので、この相関関数には 3 つ目のオブザーバブルに対する変数 t の自由度がある。すなわち相関関数には r を変数とするモジュライがある。このオブザーバブルを式 (10.25) に代入し、モジュライの積分も実行すると、

$$\int_{X(\infty)=x, 1>t>0} dtd\tau\mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ \Delta\left(f(\boldsymbol{X}(1))g(\boldsymbol{X}(t))h(\boldsymbol{X}(0))e^{\frac{i}{\hbar}S_q}\right) = 0,$$

となるが、式 (10.10)、(10.25) より、

$$\int_{X(\infty)=x, 1>t>0} dtd\tau\mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ \{S_q, f(\boldsymbol{X}(1))g(\boldsymbol{X}(t))h(\boldsymbol{X}(0))\}e^{\frac{i}{\hbar}S_q} = 0,$$

となる。ここで、

$$\{S_q, f(\boldsymbol{X}(1))g(\boldsymbol{X}(t))h(\boldsymbol{X}(0))\} = -\mathbf{d}\left(f(X(1))g(X(t))h(X(0))\right),$$

を代入し、t に関してストークスの定理を使うと、経路積分は境界での積分、

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 1}\int_{X(\infty)=x} \mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ \left(f(\boldsymbol{X}(1))g(\boldsymbol{X}(t))h(\boldsymbol{X}(0))e^{\frac{i}{\hbar}S_q}\right)\\ &-\lim_{t\to 0}\int_{X(\infty)=x} \mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ \left(f(\boldsymbol{X}(1))g(\boldsymbol{X}(t))h(\boldsymbol{X}(0))e^{\frac{i}{\hbar}S_q}\right) = 0,\end{aligned} \tag{10.26}$$

となる。この式は、スター積の結合法則、すなわち条件 2

$$(f * g) * h - f * (g * h) = 0,$$

を表す。

次に、定義 10.1.3 の条件３、同値類について議論する。これを示すには以下を示せば十分である。f を任意の g に対して $\{f(x),g(x)\}_{PB}=0$ となる関数とする。このときスター積 $(f*g)(x)$ は適当な f の再定義 $f'=Rf$ により通常の積 $Rf(x)g(x)$ に帰着する。（もちろん、$\{f,g\}_{PB}=0$ であれば、$f*g(x)=f(x)g(x)$ は変形量子化の自明な解である。）

$\{f(x),-\}_{PB}=0$ のとき、u を Σ の内部の点としても、$f(\boldsymbol{X}(u))g(\boldsymbol{X}(0))$ は式 (10.13) を満たすことが示せるのでオブザーバブルである。このとき、相関関数

$$\langle f(\boldsymbol{X}(u))g(\boldsymbol{X}(0))\rangle=\int_{X(\infty)=x}\mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ f(\boldsymbol{X}(u))g(\boldsymbol{X}(0))e^{\frac{i}{\hbar}S_q} \tag{10.27}$$

は次の Ward-Takahashi 恒等式を満たす。

$$\int_{X(\infty)=x}\mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ \Delta\left(f(\boldsymbol{X}(u))g(\boldsymbol{X}(0))e^{\frac{i}{\hbar}S_q}\right)=0. \tag{10.28}$$

式 (10.28) に対して $\{S,f(\boldsymbol{X}(u))\}=\mathbf{d}f(\boldsymbol{X}(u))$ を使い、式 (10.26) と同様の計算をすると

$$\int_{X(\infty)=x}\mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ \mathbf{d}f(\boldsymbol{X}(u))g(\boldsymbol{X}(0))e^{\frac{i}{\hbar}S_q}=0, \tag{10.29}$$

となるが、これは相関関数 $\langle f(\boldsymbol{X}(u))g(\boldsymbol{X}(0))\rangle$ は u に依存しないことを意味する。

１点関数 one-point function,

$$\langle f(\boldsymbol{X}(u))\rangle=\int_{X(\infty)=x}\mathcal{D}\boldsymbol{X}\mathcal{D}\boldsymbol{A}\ f(\boldsymbol{X}(u))e^{\frac{i}{\hbar}S_q}=f(x)+O(\hbar^2),$$

は $f(x)$ の微分の形式的級数 $\sum_k\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k\mathcal{D}_k(f)$. となるので、$Rf(x)=\langle f(\boldsymbol{X}(u))\rangle$ となる。このことを使うと経路積分の分解の性質から

$$\begin{aligned}Rf*g(x) &= \langle f(\boldsymbol{X}(1))g(\boldsymbol{X}(0))\rangle=\lim_{\epsilon\to+0}\langle f(\boldsymbol{X}(1+i\epsilon))g(\boldsymbol{X}(0))\rangle\\ &= \lim_{\epsilon\to+0}\langle f(\boldsymbol{X}(1+i\epsilon))\rangle\langle g(\boldsymbol{X}(0))\rangle,\end{aligned} \tag{10.30}$$

となる。これより $Rf*g(x)$ は $f(x)g(x)$ と同値であることが示せる。

10.2.4　形式性定理

ポアソン多様体上の変形量子化の存在定理は Kontsevich による**形式性定理**として一般化される。ここでは形式性定理の説明をポアソン幾何、シグマ模型の観点からおこなう。

次数付き微分 Lie 代数 (Differential graded Lie algebras)

変形量子化の構成で与えるものはポアソン括弧 $\{f, g\}_{PB}$ である。ポアソン構造は例 7.3.6 で見たように、次数 1 の QP 多様体である。代数的にはこれは次数付き微分 Lie 代数である。

Definition 10.2.3 $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{Z}$ 次数付き空間 $\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k[-k]$ とする。ここで、$\mathfrak{g}^k$ は次数 k の次数付きベクトル空間である。$\mathfrak{g}$ 上に次数付き Lie 括弧 $\{-,-\} : \mathfrak{g}^k \times \mathfrak{g}^l \to \mathfrak{g}^{k+l}$ と、 $\mathrm{d}^2 = 0$ を満たす次数 1 の微分 $\mathrm{d} : \mathfrak{g}^k \longrightarrow \mathfrak{g}^{k+1}$ が存在し、$x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{d}[x, y] = [\mathrm{d}x, y] + (-1)^{|x|}[x, \mathrm{d}y], \tag{10.31}$$

を満たすとき、$(\mathfrak{g}, \{-,-\}, \mathrm{d})$ を次数付き Lie 代数 (differential graded Lie algebra, dg Lie algebra) という。

ポアソンバイベクトル場の Maurer-Cartan 方程式

次数 1 の QP 多様体 $(\mathcal{M}, \omega, \Theta)$ を考える。ここで、次数付き多様体は次数を 1 ずらした余接バンドル $\mathcal{M} = T^*[1]M$、ω は次数 1 の次数付きシンプレクティック形式、Θ は次数 2 のホモロジカル関数である。これはポアソン多様体 M 上のと同値である。

まず、P 多様体の部分 $(\mathcal{M}, \omega)$ だけを考える。ω から誘導された次数 -1 の次数付きポアソン括弧 $\{-,-\}$ は Schouten-Nijenhuis 括弧と同値で、この括弧は $\mathfrak{g} = C^\infty(\mathcal{M})$ 上に次数付き Lie 代数構造を誘導する。次数について注意することとして、次数は QP 多様体としての次数付きポアソン括弧の次数は -1 であるが、次数付き Lie 代数としての Lie 括弧は次数 0 なので、括弧と次数付き関数の次数を 1 ずらす必要がある。$C^\infty(\mathcal{M})$ の部分集合として次数 2 の関数すなわちバイベクトル場 $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha^{ij}(x)\partial_i \wedge \partial_j$ から誘導された次数付き関数 $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ の空間を $\mathfrak{g}^1$ とする。これは次数付き Lie 代数としては次数 1 の元である。これは、バイベクトル場の空間 $\Gamma(\wedge^2 TM)$ 同型である。なお、ここでは多重ベクトル場と次数付き多様体上の関数を同一視して同じ記号であらわす。$\mathfrak{g}^1$ は次数付き Lie 括弧で閉じた部分空間となっているので、それ自身次数付き Lie 代数である。この次数付き Lie 代数の微分として自明なもの $\mathrm{d} = 0$ を取ると、次数付き微分 Lie 代数と考えることができる。すなわち、一つ目の次数付き微分 Lie 代数として $(\mathfrak{g}^1 = \Gamma(\wedge^2 TM), \{-,-\}, d = 0)$ を考える。これを $\mathfrak{g}_1^1 = T_{poly}^1(M)$ とも表す。

次に、次数 1 の QP 多様体のホモロジカル関数 Θ を考える。これを今導入した次数付き Lie 代数 $\mathfrak{g}_1^1$ 上の Maurer-Cartan 方程式 $d\alpha_1 + \frac{1}{2}\{\alpha_1, \alpha_1\} = 0$ の解と考える。実際、$\mathrm{d} = 0$ で、ホモロジカル条件は $\{\Theta, \Theta\} = 0$ だから、$\alpha_1 = \Theta$ 遠くと、$d\alpha_1 + \frac{1}{2}\{\alpha_1, \alpha_1\} = 0$ を満たす。これはポアソ

ンバイベクトル場の条件と同値である。Maurer-Cartan 方程式の解の空間を $\mathcal{MC}(\mathfrak{g}_1^1) = \mathfrak{g}_1^1/\sim$. とかく。すなわち、次数１の QP 多様体は $(\mathcal{M}, \omega, \Theta)$ $\mathcal{MC}(\mathfrak{g}_1^1)$. と同値である。

多重微分作用素の Hochschild 複体

変形量子化の $\hbar^1$ 次の部分は物理理論としては古典極限に対応する。ポアソンバイベクトル場 $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\partial_i \wedge \partial_j$ によって、$\hbar^0$ 次と $\hbar^1$ 次の最初の２項が M 上の関数 $f, g \in A = C^\infty(M)$. に対して、$(f,g) \mapsto \mathcal{B}_0(f,g) + \frac{i\hbar}{2}\mathcal{B}_1(f,g) = fg + \frac{i\hbar}{2}\frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\partial_i f \partial_j g \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, A)$ と決まる。

変形量子化の定義 10.1.3 の条件３を $\hbar^1$ 次のレベルでチェックする。今、$f' = f + \frac{i\hbar}{2}\mathcal{D}f$. とすると、これは $\mathrm{Hom}(A, A)$ の元で、$\mathcal{B}_0(f', g) + \frac{i\hbar}{2}\mathcal{B}_1(f', g)$ は $\hbar^1$ 次のレベルで $\mathcal{B}_0(f,g) + \frac{i\hbar}{2}\mathcal{B}_1(f,g)$ となるので、$\hbar^1$ 次では２つの表現は同じ古典極限を表す。

$\hbar^1$ のレベルでは定義 10.1.3 の条件２の結合法則はポアソン括弧であることから従う。実際、写像 $C(f,g,h) \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes 3}, A)$ を

$$\begin{aligned} C : (f,g,h) \ \mapsto\ & C(f,g,h) \\ & = (fg)h - f(gh) \\ & + \frac{i\hbar}{2}\left(\mathcal{B}_1(fg,h) - \mathcal{B}_1(f,gh) + \mathcal{B}_1(f,g)h - f\mathcal{B}_1(g,h)\right) \\ & + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \left(\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_1(f,g),h) - \mathcal{B}_1(f,\mathcal{B}_1(g,h))\right), \end{aligned} \tag{10.32}$$

と定義すると、$\mathcal{B}_1(f,g)$ がポアソン括弧の Leibniz 則から $\hbar^1$ 次のレベルでは

$$C(f,g,h) = 0. \tag{10.33}$$

となり、結合法則が成り立つ。

$\hbar$ の全次数で結合法則を示すため、$\mathrm{Hom}(A^{\otimes k+1}, A)$ で構成される２つ目の次数付き微分 Lie 代数を導入する。ここで、$A = C^\infty(M)$ である。$\mathfrak{g}_2^k = \mathrm{Hom}(A^{\otimes k+1}, A)$ として、$\mathfrak{g}_2 = \oplus_{k \in \mathbb{Z}, k \geq -1}\mathfrak{g}_2^k[-k]$ を考える。ここで、$A^0 = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。

式 (10.33) が Maurer-Cartan 方程式の形で得られるように微分 d と Lie 括弧 $[-,-]$ を定義する。k 次項の元 $C \in \mathfrak{g}_2^k$ に対して微分 d を

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}C)(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{k+1}) \ =\ & f_0 C(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{k+1}) - \sum_{r=0}^{k} C(f_0 \otimes \cdots \otimes (f_r f_{r+1}) \otimes \cdots \otimes f_{k+1}) \\ & + (-1)^k C(f_0 \otimes \cdots \otimes f_k) f_{k+1}, \end{aligned} \tag{10.34}$$

と定義する。また、$C_1 \in \mathfrak{g}_2^{k_1}$, $C_2 \in \mathfrak{g}_2^{k_2}$ として次数付き Lie 括弧を、

$$\begin{aligned} [C_1, C_2] &= C_1 \circ C_2 - (-1)^{k_1 k_2} C_2 \circ C_1, \qquad (10.35) \\ C_1 \circ C_2(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{k_1+k_2}) &= \sum_{r=0}^{k_1} (-1)^{rk_2} C_1(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{r-1} \otimes C_2(f_r \otimes \cdots \otimes f_{r+k_2}) \\ &\qquad \otimes f_{r+k_2+1} \otimes \cdots \otimes f_{k_1+k_2}), \end{aligned}$$

と定義する。$(\mathfrak{g}_2, \mathrm{d})$ は多重微分作用素の Hochschild 複体と呼び、$\mathfrak{g}_2^k = D_{poly}^k(M)$ および $\mathfrak{g}_2 = D_{poly}(M)$. と書く。括弧積 $[-,-]$ は Gerstenhaber 括弧と呼ぶ。

次に、次数 1 の元 $\widetilde{\alpha} \in \mathfrak{g}_2^1$ に Maurer-Cartan 方程式 $\mathrm{d}\widetilde{\alpha} + \frac{1}{2}[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}] = 0$ を課す。するとこの式は結合法則 (10.33) を導くことが確認できる。条件 3 の再定義による同値類は $\mathfrak{g}_2^0$ の元による Maurer-Cartan 方程式の解であらわされる。したがって、$\mathfrak{g}_2$ の元の中の Maurer-Cartan 方程式の解が $\hbar^1$ 次までのスター積を与える。この Maurer-Cartan 方程式の解の空間を $\mathcal{MC}(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2/_\sim$ と書く。

2 つの次数付き微分 Lie 代数の間の射

古典極限、すなわち $\hbar^1$ 次までで、写像 $U_1 : \mathfrak{g}_1^1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2^1$, を
$U_1 : \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\partial_i \wedge \partial_j \mapsto \left(f_0 \otimes f_1 \mapsto \frac{1}{2}\pi^{ij}(x)\partial_i f_0 \partial_j f_1\right)$ で定義する。この写像はぞれぞれの空間の Maurer-Cartan 方程式を保存するので、写像 $U_1 : \mathcal{MC}(\mathfrak{g}_1^1) \longrightarrow \mathcal{MC}(\mathfrak{g}_2^1)$ を誘導する。

この考察から、変形量子化は以下のような写像を求めることと定義できる。M 上のポアソン構造が与えられると上記の U_1 が得られる。変形量子化は、この仮定の下で $\hbar$ の全次数のレベルで、2 つの次数付き微分 Lie 代数の間の写像 $U : \mathcal{MC}(\mathfrak{g}_1^1[[\hbar]]) \longrightarrow \mathcal{MC}(\mathfrak{g}_2[[\hbar]])$ を求めることである。

一般に $\mathcal{MC}(\mathfrak{g}_2[[\hbar]])$ 上の Maurer-Cartan 方程式は U_1 の変形によって保存されず、次数付き Lie 代数構造は保存されない。このため、Maurer-Cartan 方程式を満たす U を求めるには、次数付き微分 Lie 代数を L_∞ 代数に一般化しておき、U を 2 つの L_∞ 代数の間の L_∞ 射として構成する。

まず、$\mathfrak{g}_1^1$ を多重ベクトル場の空間 $T_{poly}(M) = \mathfrak{g}_1 = \oplus_{k \in \mathbb{Z}, k \geq -1} \mathfrak{g}_1^k[-k]$ へ一般化する。ここで、$\mathfrak{g}_1^k = \Gamma(\wedge^{k+1} TM)$ である。$\mathfrak{g}_1^k$ の元は k 次の多重ベクトル場（k 階の反対称テンソル場）$\alpha_k = \frac{1}{(k+1)!}\alpha^{j_0 \cdots j_k}(x)\partial_{j_0} \wedge \cdots \wedge \partial_{j_k} = \frac{1}{(k+1)!}\alpha^{j_0 \cdots j_k}(x)\xi_{j_0} \cdots \xi_{j_k} \in \mathfrak{g}_1^k$ である。$\mathfrak{g}_1^1$ の微分 d と次数付き Lie 括弧 $[-,-] = \{-,-\}$ は $\mathfrak{g}_1$ 上に微分は $\mathrm{d} = 0$、次数付き Lie 括弧は QP 多様体

$\mathcal{M} = T^*[1]M$ 上の関数の空間 $C^\infty(\mathcal{M})$ 上の次数付きポアソン括弧 $\{-,-\}$ として、すなわち多重ベクトル場の Schouten-Nijenhuis 括弧 $[-,-]_S$ として拡張する。

次数付き微分 Lie 代数の間の写像 U_1 は

$$\begin{aligned} U_1: \quad & T_{poly}(M) \longrightarrow D_{poly}(M), \\ & \alpha_k \mapsto \left(f_0 \otimes \cdots \otimes f_k \mapsto \frac{1}{(k+1)!} \alpha^{j_0 \cdots j_k}(x) \partial_{j_0} f_0 \cdots \partial_{j_k} f_k \right), \end{aligned} \tag{10.36}$$

と拡張する。この写像は一般に同型写像ではないが結果としてそれぞれの d コホモロジーの間の同型写像を誘導することが知られている。なお、$T_{poly}(M)$ では $\mathrm{d} = 0$ なのでコホモロジーは自明である。ある写像がコホモロジーの同型写像を誘導するとき、写像は擬同型であるという。

L_∞ 代数と L_∞ 射

次数付き Lie 代数はより一般の代数、 L_∞ 代数に埋め込むことができる。この章では L_∞ 代数と L_∞ 射を導入し、形式性定理を説明する。次数付きベクトル空間 $V = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} V^k$ に対して、そのテンソル積の無限和である次数付き可換テンソル代数 $T(V) = \oplus_{n=1}^\infty V^{\otimes n}$ を考える。この空間上に余結合的で余可換な余積 $\triangle$ を

$$\triangle(v_1, \cdots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon(\sigma) \frac{1}{k!(n-k)!} (v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}) \otimes (v_{\sigma(k+1)} \cdots v_{\sigma(n)}), \tag{10.37}$$

と定義する。ここで $v_k \in T(V)$ である。次に、次数 1 の多重線形写像 $\mathfrak{l}_k$、

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_k: \quad & V^{\otimes k} \longrightarrow V, \\ & (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \mapsto \mathfrak{l}_k(v_1 \cdots v_k), \end{aligned} \tag{10.38}$$

を仮定し、余微分 $Q = \sum_{k=1}^\infty Q_k$ を、それぞれの Q_k に対して、

$$Q_k(v_1, \cdots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \epsilon(\sigma) \frac{1}{k!(n-k)!} \mathfrak{l}_k(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}) \otimes v_{\sigma(k+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}, \tag{10.39}$$

と定義する。

Definition 10.2.4 $Q^2 = 0$ のとき、組 (V, Q) は L_∞ 代数、または強ホモトピー Lie 代数と呼ぶ。

$\mathfrak{l}_k$ の最初の２つの演算は、微分 $\mathfrak{l}_1 = \mathrm{d}$、および奇の括弧 $\mathfrak{l}_2(-,-) = \{-,-\}$ である。次数付き微分 Lie 代数は $\mathfrak{g}^{k-1}[1] \sim V^{k-1}$ であって、$k \geq 3$ のとき $\mathfrak{l}_k = 0$ となる L_∞ 代数となる特別な場合とみなせる。QP 多様体上の関数の次数とを適切にずらすことにより、QP 多様体上の関数の集合 $C^\infty(\mathcal{M})$ は L_∞ 代数とみなせる。

L_∞ 代数の間の L_∞ 射の定義は以下のようになる。

Definition 10.2.5 ２つの L_∞ 代数の間の射 $U : (V_1, Q) \longrightarrow (V_2, Q)$, は次数を保存し、$\triangle \circ U = (U \otimes U) \circ \triangle$ を満たすとき、余準同型であるという。

Definition 10.2.6 ２つの L_∞ 代数の間の余準同型な射 U は $UQ = QU$ となるとき L_∞ 射であるという。

v を L_∞ 代数の元とし、$e^v := 1 + v + \frac{1}{2!} v \otimes v + \frac{1}{3!} v \otimes v \otimes v + \cdots$ とし、$\mathfrak{l}_*(e^v) := \mathfrak{l}_1(v) + \frac{1}{2!}\mathfrak{l}_2(v \otimes v) + \frac{1}{3!}\mathfrak{l}_3(v \otimes v \otimes v) + \cdots$ とする。

Definition 10.2.7 L_∞ 代数 (V, Q) が与えられたとき、$\mathfrak{l}_*(e^v) = 0$ を Maurer-Cartan 方程式と呼ぶ。

$\mathfrak{l}_*(e^v) = 0$ は $Q(e^v) = \mathfrak{l}_*(e^v) \otimes e^v = 0$ と書くこともできる。L_∞ 代数が次数付き微分 Lie 代数のときは、$v = \alpha$ として、$k \geq 3$ であれば $\mathfrak{l}_k = 0$ なので、$Q(e^v) = 0$ は通常の Maurer-Cartan 方程式 $\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$ となる。

２つの次数付き微分 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$、$\mathfrak{g}_2$ を L_∞ 代数とみなすと、それぞれの Maurer-Cartan 方程式の非線形な対応が明白になる。$V_1 = \mathfrak{g}_1 = T_{poly}(M)[1]$ および $V_2 = \mathfrak{g}_2 = D_{poly}(M)[1]$ とおく。すると、ポアソン多様体上の変形量子化の存在を証明するためには以下の定理を示せばよいことになる。

Theorem 10.2.8 (形式性定理) 式 (10.36) で定義される U_1 に対して、$(T_{poly}(M)[1], Q)$ から $(D_{poly}(M)[1], Q)$ への L_∞ 射が存在する。

ポアソン多様体上の変形量子化はこの定理 10.2.8 で、$k = 2$ 以外の時に $\alpha_k = 0$ となっている特別な場合として導出される。

証明は参考文献 [5] を参照されたい。

Correspondence to $n=1$ AKSZ Sigma Model

ここでは、２次元 AKSZ シグマ模型が定理 10.2.8 の $(T_{poly}(M)[1], Q)$ から $(D_{poly}(M)[1], Q)$ への形式性を満たす写像の構造を持つことを見る。ポアソン構造の場の理論的実現が２次元 AKSZ シグマ模型、すなわちポアソンシグマ模型である。古典マスター方程式が多重ベクトル場に対する $\mathrm{d}=0$ の Maurer-Cartan 方程式、量子マスター方程式が対応する多重微分作用素の次数付き微分 Lie 代数の Maurer-Cartan 方程式に対応する。

次数付き微分 Lie 代数の変形が量子論の $\hbar$ 摂動展開に対応する。Maurer-Cartan 方程式の解の空間 $\mathcal{MC}(\mathfrak{g})$ が Ward-Takahashi 恒等式を満たすオブザーバブルの空間である。

ポアソンシグマ模型を L_∞ 代数の枠組みに一般化する。これには作用積分を多重ベクトル場の空間 $\mathfrak{g}_1$ を標的空間とする AKSZ シグマ模型に一般化する。BV 作用積分は

$$
\begin{aligned}
S &= S_0 + \sum_{p=0}^{d-1} S_{\alpha_p} \\
&= \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \left(\boldsymbol{A}_i \mathbf{d}\boldsymbol{X}^i + \sum_{p=0}^{d-1} \frac{1}{(p+1)!} \alpha^{j_0\cdots j_p}(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{A}_{j_0} \cdots \boldsymbol{A}_{j_p} \right),
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$\alpha_p = \frac{1}{(p+1)!}\alpha^{j_0\cdots j_p}(x)\frac{\partial}{\partial x^{j_0}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_p}} \in \Gamma(\wedge^{p+1}TM)$ は多重ベクトル場である。この作用積分は S は QP 多様体の意味ではもはや次数 0 ではないことに注意する。多重ベクトル場が Maurer-Cartan 方程式を満たすことは S が BV 形式の古典マスター方程式 $\{S, S\} = 0$ を満たすことと同値である。

次数 p の多重ベクトル場に対応する項を

$$
S_{\alpha_p} = \int_{T[1]\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\theta \frac{1}{(p+1)!} \alpha^{j_0\cdots j_p}(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{A}_{j_0} \cdots \boldsymbol{A}_{j_p},
$$

とする。次数１の項 $\alpha^{j_0 j_1}(\boldsymbol{X}) = \pi^{j_0 j_1}(\boldsymbol{X})$ がポアソンバイベクトル場に対応する。

(10.2.2) 章でのポアソンシグマ模型の場合と同じゲージ固定条件、境界条件を課し、量子化する。オブザーバブルとして境界上の $m+1$ 個の頂点作用素を取る。頂点作用素を挿入する点に自由度があるので、その配位のモジュライで積分したものを考える。すなわち、

$$
\mathcal{O}_x(f_0, \ldots, f_m) = \int_{B_m} d^{m-1}t \, [f_0(\boldsymbol{X}(t_0, \theta_0)) \cdots f_m(\boldsymbol{X}(t_m, \theta_m))]^{(m-1)} \, \delta_x(X(\infty)).
$$

ここで、t_i は２次元ディスクの境界 S^1 の $m+1$ 個の点の位置を表すパラメータで、$1 = t_0 > t_i > \cdots > t_{m-1} > t_m = 0$ である。B_m は t_i でパラメトライズされた配位のモジュライ空間で、$[\cdots]^{(m-1)}$ は t に対応した超座標 τ_i で積分した後で消えない次数 τ^{m-1} 次の項を表す。射 U は

$$
U(\alpha)(f_0 \otimes \cdots \otimes f_m)(x) = \int \mathcal{O}_x(f_0, \ldots, f_m) e^{\frac{i}{\hbar} S_q}, \tag{10.40}
$$

で与えられる。ここで、積分には B_m 上の t_i に関する積分も含まれる。$U_n : \mathfrak{g}_1^{\otimes n} \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ として、式 (10.40) で与えられる $U(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} U_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ が L_∞ 射となる。具体的な U は経路積分の摂動展開を計算することによって得られる。L_∞ 射の Maurer-Cartan 方程式は量子マスター方程式およびオブザーバブルの定義式から導かれる Ward-Takahashi 恒等式から導かれ、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{l,n-l}} \epsilon(\sigma)(-1)^{k(i+1)}(-1)^m U_l(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(l)}) \\
&\qquad (f_0 \otimes \cdots \otimes f_{i-1} \otimes U_{n-l}(\alpha_{\sigma(l+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})(f_i \otimes \cdots \otimes f_{i+k}) \otimes f_{i+k+1} \otimes \cdots \otimes f_m) \\
&\quad = \sum_{i<j} \epsilon_{ij} U_{n-1}([\alpha_i, \alpha_j], \alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha}_i, \ldots, \widehat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_n)(f_0 \otimes \cdots \otimes f_m),
\end{aligned}
\tag{10.41}
$$

ここで、

$$
(i\hbar)^{n+m-1} U_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(f_0 \otimes \cdots \otimes f_m) = \int \mathcal{O}_x(f_0, \ldots, f_m) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \frac{i}{\hbar} S_{\alpha_1} \cdots \frac{i}{\hbar} S_{\alpha_n},
$$

である。式 (10.41) を満たす射 U は形式性定理 10.2.8 の証明で使われる L_∞ 射に他ならない。

第11章　ポアソン多様体に関連した構造

11.1　ヤコビ多様体

Definition 11.1.1 M を可微分多様体として、$E \in \mathfrak{X}(M)$ を M 上のベクトル場、$\Lambda \in \mathfrak{X}^2(M)$ をバイベクトル場とする。(E, Λ) が以下を満たすとき、**Jacobi 構造**という。

$$[\Lambda, E]_S = 0, \tag{11.1}$$

$$[\Lambda, \Lambda]_S - 2E \wedge \Lambda = 0, \tag{11.2}$$

ここで、$[-,-]_S$ は Schouten 括弧である。Jacobi 構造を持つ多様体を**ヤコビ多様体**という。

*M の局所座標を x^i とする。E と Λ の局所座標表示

$$E = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \Lambda = \frac{1}{2}w^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{11.3}$$

をとると、式 (11.1) と (11.2) は

$$\begin{aligned} w^{ki}\frac{\partial v^j}{\partial x^k} - w^{kj}\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^k\frac{\partial w^{ij}}{\partial x^k} &= 0, \\ w^{li}\frac{\partial w^{jk}}{\partial x^l} - v^i w^{jk} + \mathrm{Cycl}(ijk) &= 0, \end{aligned} \tag{11.4}$$

となる。$E = 0$ のときは Jacobi 構造は $[\Lambda, \Lambda] = 0$ となりポアソン構造となる。

$f \in C^\infty(M)$ に対してベクトル場 X_f を任意の $g \in C^\infty(M)$ に対して、

$$X_f g = \Lambda(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g) - fE(g) \tag{11.5}$$

と定義する。X_f を f に対するハミルトンベクトル場という。

M 上の可微分関数の空間 $C^\infty(M)$ 上の $\mathbb{R}$-双線形形式 $\{-,-\}_J : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ を、$f, g \in C^\infty(M)$ に対して、

$$\{f, g\}_J = -X_g(f) + fE(g) \tag{11.6}$$

*代数幾何で現れるヤコビ多様体 (Jacobi variety) とはまったく違う概念である。

と定義する。ハミルトンベクトル場とヤコビ括弧は局所座標では

$$X_f = \left(w^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j} - fv^i\right)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{11.7}$$

$$\{f,g\}_J = w^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} + fv^i\frac{\partial g}{\partial x^i} - gv^i\frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{11.8}$$

となる。ヤコビ括弧はヤコビ恒等式

$$\{\{f,g\}_J,h\}_J + \{\{g,h\}_J,f\}_J + \{\{h,f\}_J,g\}_J = 0 \tag{11.9}$$

を満たすが一般に Leibniz 則を満たさない。

Example 11.1.1 $\mathbb{R}^{2n+1}$ の局所座標を $(q_0, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots p_n)$ とする。

$$E = \frac{\partial}{\partial q^0}, \tag{11.10}$$

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial q^i}\wedge\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial q^0}\wedge p_i\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{11.11}$$

とするとヤコビ構造となる。

Example 11.1.2 多様体 M が奇数次元 $2n+1$ 次元とする。M のすべての点で $\Lambda^n \wedge E \neq 0$ のとき、ヤコビ構造は非退化であるという。このときヤコビ構造は接触構造と同値である。

M 上の微分 1 形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$ が M のすべての点で $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n \neq 0$ となるとき、α を接触形式という。

M 上の接触形式 α が存在するとして、写像 $TM \to \mathbb{R}$ を $\alpha(X) = \iota_X\alpha$ と定義する。接束 TM の部分束 $\xi = \ker\alpha$ を接触構造という。

接触多様体 (M,α) が与えられたとき、

$$\alpha(E) = 1 \tag{11.12}$$

$$\iota_E \mathrm{d}\alpha = 0 \tag{11.13}$$

となるベクトル場 $E \in \mathfrak{X}(M)$ は **Reeb ベクトル場**と呼ばれる。また、関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して、任意の $V \in \xi = \ker\alpha$ に対して、

$$\mathrm{d}f(V) = \mathrm{d}\alpha(X_f, V) \tag{11.14}$$

$$\alpha(X_f) = -f \tag{11.15}$$

を満たすベクトル場 X_f をハミルトンベクトル場という。このとき、

$$\mathrm{d}\alpha(X_f, E) = 0 \tag{11.16}$$

$$L_{X_f}\alpha = -E(f)\alpha \tag{11.17}$$

を満たす。

バイベクトル場 $\Lambda \in \mathfrak{X}(M)$ を任意の $\beta \in \Omega^1(M)$、$f, g \in C^\infty(M)$ に対して

$$\Lambda(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g) = \mathrm{d}\alpha(X_f, X_g), \tag{11.18}$$

$$\Lambda(\alpha, \beta) = 0. \tag{11.19}$$

で決める。このとき、E と Λ はヤコビ構造となる。逆に、非退化なヤコビ構造 (Λ, E) が存在するとき、(11.12), (11.13), (11.18), (11.19) より接触構造が定義される。このとき、(11.5) で定義されるハミルトンベクトル場 X_f は (11.14), (11.15) を満たす。

M の局所座標を $(q_0, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots p_n)$ として $\alpha = \mathrm{d}q^0 - p_i\mathrm{d}q^i$ とすると接触形式となる。この座標系を Darboux 座標という。このとき、$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$ となり、

$$E = \frac{\partial}{\partial q^0}, \tag{11.20}$$

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial q^0} \wedge p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \tag{11.21}$$

となる。ヤコビ括弧は Darboux 座標では

$$\{f, g\}_J = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} + p_i\frac{\partial f}{\partial q^0}\frac{\partial g}{\partial p_i} - p_i\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^0} + f\frac{\partial g}{\partial q^0} - g\frac{\partial f}{\partial q^0} \tag{11.22}$$

となる。

Example 11.1.3 M 偶数次元で、M のすべての点で $\Lambda^n \neq 0$ とする。このときヤコビ構造は局所共形シンプレクティック構造と同値である。

$2n$ 次元の多様体 M 上の非退化 2 形式 $\Omega \in \Omega^2(M)$ と閉 1 形式 $\theta \in \Omega^1(M)$ の組で $\mathrm{d}\Omega = \theta \wedge \Omega$ となるものを局所共形シンプレクティック構造という。$\Lambda := \Omega^{-1}$ とおき、E を任意の β に対して $\theta(\beta) = \Omega(E, \beta)$ となるベクトル場とすると (Λ, E) はヤコビ構造となる。

11.1.1 ポアソン多様体への埋め込み

ヤコビ多様体のポアソン多様体への標準的な埋め込みがある。(M, Λ, E) をヤコビ多様体とする。$M \times \mathbb{R}$ を考え、ここに $M \times \{0\} \subset M \times \mathbb{R}$ として M を埋め込む。

$\mathbb{R}$ の座標を t として $M\times\mathbb{R}$ 上のバイベクトル場

$$\tilde{\Lambda} := e^{-t}\left(\Lambda + \frac{\partial}{\partial t}\wedge E\right) \tag{11.23}$$

を考える。このとき $\tilde{\Lambda}$ がポアソン構造、すなわち

$$[\tilde{\Lambda},\tilde{\Lambda}]'_S = 0, \tag{11.24}$$

となることは (Λ, E) がヤコビ構造であることと同値である。ここで、$[-,-]'_S$ は $M\times\mathbb{R}$ に拡張された Schouten 括弧である。これをヤコビ構造のポアソン化という。関数 $\tilde{f},\tilde{g}\in C^\infty(M\times\mathbb{R})$ に対して、$\tilde{\Lambda}$ より決まるポアソン括弧は

$$\{\tilde{f},\tilde{g}\} = e^{-t}\left(w^{ij}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x^j} + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}v^i\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x^i} - v^i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial t}\right) \tag{11.25}$$

Darboux 座標では

$$\{\tilde{f},\tilde{g}\} \;=\; e^{-t}\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial q^i}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial p_i} - \frac{\partial\tilde{f}}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial q^i} + p_i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial q^0}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial p_i} - p_i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial q^0} + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial q^0} - \frac{\partial\tilde{f}}{\partial q_0}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial t}\right) \tag{11.26}$$

である。M 上の関数 $f\in C^\infty(M)$ に対して $M\times\mathbb{R}$ 上の関数 $\tilde{f}=e^t f$ を対応させると、ポアソン括弧 (11.25) よりヤコビ括弧 (11.6) が得られる。

$2n+1$ 次元多様体 M 上の接触構造 α とすると $M\times\mathbb{R}$ 上の閉 2 形式 $\omega=\mathrm{d}(e^t\alpha)$ はシンプレクティック形式となる。この (M,α) に対する $(M\times\mathbb{R},\omega)$ を接触構造のシンプレクティック化という。ヤコビ構造が非退化の時はこれはヤコビ構造のポアソン化と同値である。

第12章　部分多様体とシンプレクティック葉層

12.1　ポアソン多様体の部分多様体

(V,ω) をシンプレクティックベクトル空間とする。このとき部分ベクトル空間 W に対して、シンプレクティック直交補空間を

$$W^{\perp_\omega} := \{v \in V | \omega(u,v) = 0, \forall u \in W\} = (\omega^\flat)^{-1}(W^\circ) \tag{12.1}$$

とする。ここで $W^\circ \subset V^*$ は W の任意の元 $u \in W$ に対して $\omega(u,v)=0$ となる元（消滅因子）の集合とする。これをポアソン多様体に一般化する。(M,π) をポアソン多様体とする。

Definition 12.1.1 M の部分多様体を N とするとき、

$$T_xN^{\perp_\pi} := \pi_x^\sharp(T_xN^\circ) \tag{12.2}$$

を π 直交補空間という。

Definition 12.1.2 部分多様体 N が M に対してポアソン横断的とはすべての $x \in N$ に対して

$$T_xM = T_xN + T_xN^{\perp_\pi} \tag{12.3}$$

となることをいう。

12.2　シンプレクティック葉層、シンプレクティック実現

(M,π) をポアソン多様体とする。ハミルトンベクトル場 X_f で生成される 1 パラメータフローを $\phi^t_{X_f}$ とする。ここで t はパラメータである。多様体の点に同値関係を定義する。2 つの点 x_1, x_2 は $f_1,\ldots,f_n \in C^\infty(M)$ が存在して、

$$x_2 = \phi^1_{X_{f_1}} \circ \ldots \circ \phi^1_{X_{f_n}}(x_1) \tag{12.4}$$

となるとき、点 x_1 と x_2 同値と定義する。$x_1 \sim x_2$。この同値類をポアソン多様体の軌道という。以下で軌道にはシンプレクティック構造が誘導されることを示す。このため、軌道をシンプレクティック葉層ともいう。

M 上の点 x に対して、

$$\mathcal{T}_x := \{v \in T_xM | \exists f \in C^\infty(M), X_f(x) = v\}, \tag{12.5}$$

と定義すると $X_f = \pi^\sharp \mathrm{d}f$ なので、$\mathcal{T}_x = \mathrm{Im}(\pi_x^\sharp)$ となる。

一般に、線型部分空間の集合 $\mathcal{D} := \{\mathcal{T}_x | x \in M\}$ は（一般）分布と言われる。$\mathcal{D}$ は有限個の可微分なベクトル場 $X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{D}$ で張られるとき、可微分であるという。

Theorem 12.2.1 $\mathcal{D}$ は可積分である。

Theorem 12.2.2 ポアソン多様体 (M, π) の軌道 S はその埋め込み写像が可微分となる可微分構造が一意に存在する。任意の $x \in S$ で

$$T_xS = \mathrm{Im}(\pi_x^\sharp) \tag{12.6}$$

で、S には $\alpha, \beta \in T_x^*M$ として

$$\omega_S(\pi_x^\sharp \alpha, \pi_x^\sharp \beta) = -\pi_x(\alpha, \beta) \tag{12.7}$$

で定義されるシンプレクティック構造が存在する。

$2s = \mathrm{rank}(\pi|_S)$ とおく。

Corollary 12.2.3

$$(S, \omega_S^{-1}) \hookrightarrow (M, \pi) \tag{12.8}$$

はポアソン写像である。

Definition 12.2.4 シンプレクティック形式軌道 (S, ω_S) はシンプレクティック葉、またはシンプレクティック葉層構造という。

Definition 12.2.5 ポアソン多様体 (M, π) のシンプレクティック形式 ω_S を持つ軌道 S をシンプレクティック葉という。シンプレクティック葉 S の族

$$\mathcal{F}_\pi = \{(S, \omega_S)\} \tag{12.9}$$

をシンプレクティック葉層構造という。

12.2.1 正則ポアソン構造

(M, π) をポアソン多様体とする。

Definition 12.2.6 バイベクトル場 $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ に対して、写像 $\pi_x^\sharp : T_x^* M \to T_x M$ の像の次元を π の $x \in M$ での階数 rank という。

Definition 12.2.7 バイベクトル場 $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ に対して、写像 $\pi_x^\sharp : T_x^* M \to T_x M$ の像の次元を π の $x \in M$ での階数 rank という。

Definition 12.2.8 多様体の点 $x \in M$ の近傍で π の階数が定数のとき x を正則点という。そうでないとき特異点という。

Definition 12.2.9 多様体のすべての点で π の階数が一定のとき、π を正則ポアソン構造という。

Definition 12.2.10 2つのポアソン構造 π_0 と π_1 は閉2形式 $B \in \Omega^2(M)$ が存在して

$$\omega_S^1 - \omega_S^0 \quad = \quad B|_S \tag{12.10}$$

となるとき、ゲージ同値という。このとき $\pi_1 = e^B \pi_0$ と書く。e^B を B 変換という。

Theorem 12.2.11 (Moser の補題) M をコンパクト多様体とし、$\{\pi_t\}_{t\in[0,1]}$ をポアソン構造のなめらかな族とする。もし、なめらかな微分1形式の族 α_t が存在して、完全2形式 $B_t = \mathrm{d}\alpha_t$ を用いて

$$\pi_t \quad = \quad e^{B_t} \pi_0 \tag{12.11}$$

と表されるならば、(M, π_0) と (M, π_1) はポアソン微分同相である。

Proof

12.2.2 シンプレクティック実現

Definition 12.2.12 (M, π) をポアソン多様体とする。シンプレクティック多様体 (S, ω) で写像 $\varphi : S \to M$ がポアソン写像で、かつ全射沈めこみとなるとき (S, ω) を (M, π) のシンプレクティック実現という。

——————————————— ??????????????????????

Example 12.2.1 M を任意の多様体とする。M には必ずゼロポアソン構造 π_0 が存在する。余接束 $S=T^*M$ には標準的なシンプレクティック構造 ω_{can} が存在する。ω から構成される標準ポアソン構造を π_{can} とする。$\phi : T^*M \to M$ を自然な射影とすると、これは全射沈めこみで $\phi : (T^*M, \pi_{can}) \to (M, \pi_0)$ はポアソン写像であるから $S=T^*M$ は M のシンプレクティック実現である。

$$\tag{12.12}$$

Example 12.2.2 $\mathfrak{g}^*$

12.2.3 積分問題

シンプレクティック実現

——————————

第13章　特異葉層

13.1　特異葉層

$\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ を多様体 M 上のベクトル場の空間とする。$\mathfrak{X}_c(M)$ をコンパクトな台を持つベクトル場の空間とする。$C_c^\infty(M)$ をコンパクトな台を持つ C^∞ 関数の集合とする。

Definition 13.1.1 (singular foliation) 多様体 M 上のベクトル場の空間 $\mathfrak{X}(M)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が以下の 3 つの条件を満たすとき葉層という。

1. $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{X}_c(M)$ の $C_c^\infty(M)$ 部分加群
2. 局所有限生成
3. $[\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}$

Stefan-Sussmann 特異葉層ともいう。

Example 13.1.1 $(E, \rho, [-,-])$ を Lie 亜代数とする。ここで E は多様体 M 上のベクトル束、$\rho : E \to TM$ はアンカー写像、$[-,-]$ は $\Gamma(E)$ 上の Lie 括弧である。$\mathcal{F} := \rho(\Gamma_c(E))$ とすると $\mathcal{F}$ は特異葉層である。

13.1.1

関連図書

[1] A. S. Cattaneo and G. Felder, A Path integral approach to the Kontsevich quantization formula, Commun. Math. Phys. **212** (2000) 591 [arXiv:math/9902090].

[2] Mauris Crainic, Rui Loja Fernandes, Ioan Mărcut, Lectures on Poisson Geometry, Graduate Studies in Mathematics, Volume 217; 2021, American Mathematical Society, DOI: 10.1090/gsm/217, ISBN: 978-1-4704-6666-4

[3] Miquel Cueca, Antonio Maglio, Fabricio Valencia, Lecture notes on the symplectic geometry of graded manifolds and higher Lie groupoids, arXiv:2510.09448 [math.SG]

[4] C. Laurent-Gengoux, A .Pichereau, P. Vanhaecke, Poisson structures, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Book 347, Springer

[5] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, Lett. Math. Phys. **66** (2003) 157 [arXiv:q-alg/9709040].

[6] E. Meinrenken, Introduction to Poisson geometry, Lecture notes, winter 2017

[7] Ana Cannas da Silva, Lectures on Symplectic Geometry, Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer-Verlag, 2001 and 2008 (corrected printing); NEW errata to Lectures on Symplectic Geometry in two versions: for the Springer 2008 printed text and for the author's 2006 website text (updated July 2021)

[8] I. Vaisman, Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds, Progress in Math., vol. 118, Birkhauser Verlag, Basel, 1994.