Symplectic Structures and Current Algebras on Mapping Spaces from QP Manifolds

池田憲明
京都産業大学益川塾
E-mail: ikeda@yukawa.kyoto-u.ac.jp

$\{-,-\}_{P.B.}$ を Poisson 括弧として、Poisson 多様体 $(N, \{-,-\}_{P.B.})$ を考える。このとき、この Poisson 構造の次のような構成がよく知られている。

N のベクトル場の外積代数 $\wedge^{\bullet} TN$ を考える。この上にはベクトル場の Lie 括弧を拡張して odd な Poisson 括弧、すなわち Schouten-Nijenhuis 括弧 $[-,-]_S$ が定義できる。ここで、

$$[P, P]_S = 0, \tag{0.1}$$

を満たす $P \in \wedge^2 TN$ が存在するならば、$[[-,P]_S, -]_S$ は N 上の Poisson 括弧 $\{-,-\}_{P.B.}$ を定義する。(0.1) を満たす P が Poisson bivector field であり、$[[-,P]_S, -]_S$ を Schouten-Nijenhuis 括弧より構成された derived bracket という。

まとめると、

Theorem 0.1 N を多様体とする。このとき、3 つ組 $(\wedge^{\bullet} TN, [-,-]_S, P)$ が $[P,P]_S = 0$ を満たすとき、$\{-,-\}_{P.B.} = [[-,P]_S, -]_S$ は N 上の *Poisson* 構造である。

これは、物理的には「力学」の場合に対応する。これを「場の理論」のセッティングに拡張することを考える。すなわち、我々は、

1, 適当な 2 つの多様体 Σ, X の写像空間 $\mathrm{Map}(\Sigma, X)$ 上のシンプレクティック (または Poisson) 構造を、(次数つきの) Poisson 構造と P（に相当するもの）から構成する。

2, X 上に要求される代数、幾何構造を解析する。

3, カレント代数の理論への応用と拡張。

の 3 つを考察した [1]。

まず $\wedge^{\bullet} TN$ を graded manifold（次数付き多様体）と解釈する。多様体 M 上の graded manifold $\mathcal{M}$ とは、M の local chart を U とすると局所的に $C^{\infty}(U) \times S^{\cdot}(V)$ に同型な整数次数つき可換代数の層 $C^{\cdot}(\mathcal{M})$ である。ここで、V は次数つきベクトル空間で、$S^{\cdot}(V)$ は V 上の次数つき自由可換代数である。graded manifold は次数が非負であるとき、N-manifold という。

正確な構成については、たとえば [2] などを参照されたい。

graded manifold $\mathcal{M} = T^*[1]N$ を考える。ここで $T^*[1]N$ とは、cotangent bundle T^*N でファイバーの次数を 1 としたものである。TN の座標を T^*N の basis とみなして、$\wedge^{\bullet} TN \cong C^{\infty}(T^*[1]N)$ となる。T^*N は自然なシンプレクティック構造を持つので、$T^*[1]N$ にはそこか

ら誘導された次数つきシンプレクティック構造 Ω が定義される。Ω から odd な Poisson 括弧 $\{-,-\}$ が構成されるが、これが Schouten-Nijenhuis 括弧 $[-,-]_S$ と同値である。さらに、$\mathcal{L}$ を Lie 微分として、次数 1 のベクトル場 Q で、$Q^2=0$, $\mathcal{L}_Q\Omega=0$ となるものが存在するとする。$Q=\{\Theta,-\}$ となる次数 2 のハミルトン関数 $\Theta\in C^\infty(T^*N)$ で書くと、$\{\Theta,\Theta\}=0$ となるので、Θ が Poisson bivector P である。よって、

Theorem 0.2 *N を多様体とする。このとき、3 つ組 $(T^*[1]N,\Omega,Q)$ を考える。ここで、$Q^2=0$、$\mathcal{L}_Q\Omega=0$。このとき、N は Poisson 多様体である。*

この構造の拡張が QP 多様体である。

Definition 0.3 *$\mathcal{M}$ を N-manifold とする。Ω を次数 n のシンプレクティック構造として、Q を $Q^2=0$ となる次数 1 のベクトル場とする。$\mathcal{L}_Q\Omega=0$ であるとき、3 つ組 $(\mathcal{M},\Omega,Q)$ を次数 n の QP 多様体という。Ω を P-structure、Q を Q-structure という。*

Poisson 構造は $n=1$ のときに相当する。

拡張として Σ が 1 次元 S^1、ループ空間 $\mathrm{Map}(S^1,T^*M)$ を考えてみる。M は多様体である。この上には T^*M のシンプレクティック構造 ω から、自然にシンプレクティック構造が $\boldsymbol{\omega}=\int_{S^1}d\sigma\,\mathrm{ev}^*\omega$ と定まる。ここで、$\mathrm{ev}:S^1\times(T^*M)^{S^1}\longrightarrow T^*M$ は evaluation map $\mathrm{ev}:(\sigma,\Phi)\longmapsto\Phi(\sigma)$ である。ここで、$\sigma\in S^1$ and $\Phi\in(T^*M)^{S^1}$.

一方、次数 2 の QP 多様体 $(T^*[2]T^*[1]M,\Omega,Q)$ を考える。このとき、

Theorem 0.4 *$\boldsymbol{\Omega}=\int_{T[1]\Sigma}\mu\,\mathrm{ev}^*\Omega$, $\boldsymbol{\Theta}=\int_{T[1]\Sigma}\mu\,\mathrm{ev}^*\Theta$ とおく。ここで、μ は $T[1]\Sigma$ 上の Berezin 測度である。は $\mathrm{Map}(T[1]\Sigma,T^*[2]T^*[1]M)$ 上の次数 1 の QP 構造である。Q のハミルトン関数 $\boldsymbol{\Theta}$ は Poisson bivector である。よって、$\mathrm{Map}(T[1]\Sigma,T^*[2]T^*[1]M)$ は $\mathrm{Map}(S^1,T^*M)$ 上に Poisson 構造 P(シンプレクティック構造 $\boldsymbol{\omega}$)を定義する。*

カレント代数への応用を考える。Alekseev, Strobl [3] は以下のような考察をした。カレント代数を考えるため、S^1 を $\wedge^*T^*S^1$ に拡張し、$\mathrm{Map}(S^1,T^*M)$ 上の ω を $\wedge^*T^*S^1$ 上に拡張する。このとき、自然に $\Gamma(TM\oplus T^*M)$ 上に代数構造が誘導される。今、正準共役な局所座標を $x^I(\sigma):S^1\longrightarrow M$, $p_I(\sigma)\in\Gamma(T^*S^1\otimes x^*(T^*M))$ とする。$f\in C^\infty(M)$, $u+\alpha\in\Gamma(TM\oplus T^*M)$ に対して、$J_{0(f)}(\sigma)=x^*f(x)=f(x(\sigma))$, $J_{1(u,\alpha)}(\sigma)=x^*\alpha+\langle x^*u\,,p\rangle=\alpha_I(x(\sigma))d_\sigma x^I(\sigma)+u^I(x(\sigma))p_I(\sigma)$ を考える。これは、Lie 群のループ空間上のカレント代数の自然な拡張である。[3] では $J_{1(u,\alpha)}$ が $\{-,-\}_{P.B.}$ と整合するための条件を考察した。

一方、$TM\oplus T^*M$ 上には Courant-Dorfman 括弧 $[(u,\alpha),(u',\alpha')]=([u,u'],L_u\alpha'-L_{u'}\alpha+d(i_{u'}\alpha)+H(u,u',\cdot\,))$ が定義される。ここで、$u,u'\in TM$, $\alpha,\alpha'\in T^*M$, $[u,u']$: Lie 括弧、L_u: Lie 微分、H: closed 3-form である。さらに、$TM\oplus T^*M$ 上には対称 2 次形式 $\langle(u,\alpha),(u',\alpha')\rangle=i_{u'}\alpha+i_u\alpha'$ が存在する。$TM\oplus T^*M$ の部分バンドル L が、maximally isotropic subbundle であり、ΓL が Courant-Dorman 括弧で閉じるとき、L を Dirac 構造という。

Alekseev, Strobl は以下の結果を得た。

Theorem 0.5 (Alekseev, Strobl '04) *L を $TM \oplus T^*M$ の部分バンドルとする。このとき、$u + \alpha \in \Gamma(L)$ に対して、$J_{1(u,\alpha)}$ が Poisson 括弧 $\{-,-\}_{P.B.}$ で閉じる条件は $L \subset TM \oplus T^*M$ が Dirac 構造であることと同値である。*

我々は、定理 (0.4) の構造を使い、この構造を QP 多様体で再解釈した。$T^*[2]T^*[1]M$ に対して、$j : TM \otimes T^*M \longrightarrow T^*[2]T^*[1]M$ と次数のシフトも含めた自然な包含写像があるが、j を使うとこの QP 多様体は、$TM \oplus T^*M$ 上の Courant algebroid 構造と同値であることが知られている。

Proposition 0.6 (N.I, Koizumi '11) *$J_{1(u,\alpha)}$ が、Poisson 括弧で Lie 代数（カレント代数）となる。$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{J}_{1(u,\alpha)}$ が graded Poisson 括弧で可換な部分代数をなす。ここで、$j_* : J_{1(u,\alpha)} \longrightarrow \boldsymbol{J}_{1(u,\alpha)}$.*

このように構成すると高次元への拡張は簡単である。

$n-1$ 次元コンパクト多様体を Σ として、$\mathrm{Map}(\Sigma, X)$ を考える。$j : X \longrightarrow \mathcal{X}$ によって、X を次数 n の QP 多様体 $(\mathcal{X}, \Omega, Q)$ に埋め込むことができるとする。すると、$\mathrm{Map}(T[1]\Sigma, \mathcal{X})$ は $\boldsymbol{\Omega} = \int_{T[1]\Sigma} \mu\ \mathrm{ev}^*\Omega$、$\boldsymbol{\Theta} = \int_{T[1]\Sigma} \mu\ \mathrm{ev}^*\Theta$ によって、次数 1 の QP 多様体となる。j で引き戻すことによって、$\mathrm{Map}(\Sigma, X)$ 上に、Poisson 構造（シンプレクティック構造）が定義される。

$\Sigma = S^1$ のときと同様にカレント代数について以下が証明される。

Theorem 0.7 (N.I, Koizumi '11) *Σ を $n-1$ 次元コンパクト多様体とする。$\mathrm{Map}(\Sigma, X)$ 上のカレント J が、Poisson 括弧で Lie 代数（カレント代数）となる。$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{X}$ は次数 n の QP 多様体の構造を持ち、Ω から構成された graded Poisson 括弧で $\boldsymbol{J}$ が可換な部分代数をなす。*

QP 構造の可換な極大部分代数は Dirac 構造の一般化である。n 次の QP 構造は一般に Leibniz/Loday algebroid の構造を持つので、このような代数がこれから物理の理論において重要になるであろうと考えられる。

この構造の「量子化」は次の大きな問題である。$n = 1$ のときは Kontsevich による Poisson 多様体の変形量子化 [4] に相当する。$n \geq 2$ のときはこの一般化と考えられる。

References

[1] N. Ikeda and K. Koizumi, arXiv:1108.0473 [hep-th].

[2] D. Roytenberg, Lett. Math. Phys. **79** (2007) 143 [arXiv:hep-th/0608150].

[3] A. Alekseev and T. Strobl, JHEP **0503** (2005) 035 [arXiv:hep-th/0410183].

[4] M. Kontsevich, Lett. Math. Phys. **66** (2003) 157 [arXiv:q-alg/9709040].