境界のあるシグマ模型に現れる 寺嶋-Poisson 関数と南部-Poisson 構造

池田憲明
立命館大学理工学部
E-mail: nikeda@se.ritsumei.ac.jp

寺嶋郁二氏によって導入された超多様体上の Poisson 関数 [1][2] とは通常の Poisson 構造の一般化である。Poisson 関数と物理理論であるシグマ模型との関係、およびそれにもとづいて Poisson 関数の一般化を考える。

E を多様体 M 上のベクトルバンドルとする。E に付随した超多様体 (supermanifold) ΠE とは、M の局所チャートを U、E のファイバーを V とすると、局所的に $C^\infty(U)\otimes \wedge V^*$ となる多様体 M 上の $\boldsymbol{Z}_2$ 超可換代数の層の局所環付き空間である。ここで Π はファイバーの偶奇を変える作用である。このとき $C^\infty(\Pi E)\simeq \Gamma(\wedge^\bullet E)$ となる。さらに $T^*\Pi V\simeq \Pi(V\oplus V^*)$ と考えて、その余接バンドル $\mathcal{M}=T^*\Pi E$ を考える。

ΠE の局所座標を (x^i, q^a)、$T^*\Pi E$ の局所座標を (ξ_i, p_a) とする。$T^*\Pi E$ には超シンプレクティック構造 $\omega=\delta x^i\wedge\delta\xi_i+\delta q^a\wedge\delta p_a$ が入る。このシンプレクティック構造から定義される超 Poisson 括弧を $\{-,-\}$ と書く。

$T^*\Pi E$ 上に、2 重次数 **bidegree** を局所座標 (x^i, q^a, ξ_i, p_a) の bidegree をそれぞれ $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ として定義する。定義から ω は bidegree $(1,1)$、ポアソン括弧 $\{-,-\}$ は $(-1,-1)$ を持つ。$\Phi\in C^\infty(\mathcal{M})$ が bidgeree (a,b) を持つ時、全次数 (total degree) を和、$|\Phi|=a+b$ で定義する。

Definition 0.1 全次数 3 の関数 $\Theta\in C^\infty(\mathcal{M})$ が $\{\Theta,\Theta\}=0$ を満たすとき、***homological function*** と呼ぶ。

homological function については次の基本的な定理がある。[3]

Theorem 0.2 全次数 3 の *homological function* は E 上に *Courant algebroid* 構造を誘導する。

$\alpha\in C^\infty(T^*\Pi E)$ に対して、$e^{\delta_\alpha}\Theta=\Theta+\{\Theta,\alpha\}+\frac{1}{2}\{\{\Theta,\alpha\},\alpha\}+\cdots$ として正準変換 (canonical transformation) を定義する。

Definition 0.3 *homological function* Θ に対して $\alpha\in C^\infty(T^*\Pi E)$ として、$\Theta'=e^{\delta_\alpha}\Theta$ を考える。Θ' も *homological* $\{\Theta',\Theta'\}=0$ のとき、e^{δ_α} を正準変換という。

Definition 0.4 Θ を *homological function* とする。*bidegree* $(0,2)$ の $\alpha\in C^\infty(T^*\Pi E)$ による正準変換が $(e^{\delta_\alpha}\Theta)^{(0,3)}=0$ を満たすとき、α を ***Poisson* 関数**という。ここで、$(-)^{(0,3)}$ は *bidegree* $(0,3)$ 成分である。

例として Poisson 構造、twisted-Poisson 構造 [4]、quasi-Poisson 構造 [5] などが Poisson 関数として実現できる。

Poisson 関数は物理のシグマモデルに現れる。シグマモデルとは 2 つのファイバーバンドルの写像空間 $\{\Phi|\Phi : TX \longrightarrow E\}$ 上の力学である。一般にこの理論はゲージ対称性が存在し、その無矛盾条件が E の幾何学的、代数的条件として記述される。特に TX と E に計量を仮定しない**位相的シグマモデル**の場合を考えると、X が 3 次元閉多様体のとき、ゲージ対称性の無矛盾条件は homological function Θ の存在と同値である。

いま X が境界を持つ多様体である場合を考えよう。このとき、理論には境界項を導入することができる。境界項は上記の α で記述され、境界項がゲージ対称性と無矛盾であるという条件には α の条件が追加される。理論の無矛盾条件は Θ が homological function であって α が Poisson 関数であるという条件と同値となる。

X を自然に $n+1$ 次元の開多様体に拡張することができる。このときの位相的シグマ模型を**位相的開膜理論 (topological open membrane)** [6] という。この理論の境界項の無矛盾条件より Poisson 関数の一般化が定義される。さらにこの幾何構造を解析する。

一般化された Poisson 関数は豊富な幾何構造を含む。特に n 次の一般化された Poisson 関数は特別な場合として n 次の南部-Poisson 構造を含む。[7] この構造を解析することは膜理論の解析に重要である。また、さまざまな幾何的構造の統一的理解にも有用だと考えられる。

References

[1] Y. Terashima, "On Poisson functions," J. Sympl. Geom., **6**(2008) 1-7.

[2] Y. Kosmann-Schwarzbach, "Poisson and symplectic functions in Lie algebroid theory," Higher Structures in Geometry and Physics, in honor of Murray Gerstenhaber and Jim Stasheff. Progress in Mathematics 287, Birkhauser, 2011, 243-268, arXiv:0711.2043.

[3] D. Roytenberg, "Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds," math.DG/9910078.

[4] P. Severa and A. Weinstein, "Poisson geometry with a 3 form background," Prog. Theor. Phys. Suppl. **144** (2001) 145 [math/0107133 [math-sg]].

[5] A. Alekseev, Y. Kosmann-Schwarzbach, "Manin Pairs and Moment Maps," J. Differential Geom. **56** (2000), 133-165.

[6] C. Hofman and J. S. Park, "Topological open membranes," hep-th/0209148.

[7] P. Bouwknegt and B. Jurco, "AKSZ construction of topological open p-brane action and Nambu brackets," arXiv:1110.0134 [math-ph].