ゲージ理論の変形理論と非可換幾何学

立命館大理工
摂南大　池田憲明

hep-th/0209042 etc

1. Introduction

(If)

内山龍雄

collaborates with

小平邦彦

内山龍雄

「一般相対性理論」「一般ゲージ場論序説」

・Yang-Mills理論

・一般ゲージ場

内山 program

・いろいろな「ゲージ理論」をつくれ。

・ゲージ理論を"統一"せよ。

小平邦彦

「複素多様体論」

・複素構造の変形理論 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

変形

小平 program

・いろいろな対象を「変形」せよ。

→ 内山+小平

ゲージ理論の変形理論

§2 ゲージ理論の変形理論

<u>コンセプト</u>

<u>例</u> abelian gauge theory (EM theory)

$$S_0 = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{(0)a}_{\mu\nu} F^{(0)\mu\nu a} \qquad a=1,2,\cdots N$$

$$F^{(0)a}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a$$

$$\delta_0 A_\mu{}^a = \partial_\mu \epsilon^a \qquad U(1)^N$$

abelian ゲージ理論から nonabelian ゲージ理論を発見できるか?

action とゲージ変換の変形

$$\begin{cases} S[A_\mu{}^a] = S_0 + \boxed{S_1} \\ \delta A_\mu{}^a = \delta_0 A_\mu{}^a + \boxed{\delta_1 A_\mu{}^a} \end{cases}$$ 変形

条件 $\delta_\epsilon S = 0$ ゲージ不変

$$[\delta_\epsilon, \delta_{\epsilon'}] = \delta_{[\epsilon,\epsilon']}$$

答 nonabelian gauge theory

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}$$

$$F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a + g f^{abc} A_\mu{}^b A_\nu{}^c$$

$$\delta A_\mu{}^a = \partial_\mu \epsilon^a + g f^{abc} A_\mu{}^b \epsilon^c$$

ここで

$f_{ab[c} f^a{}_{de]} = 0$ $\quad$ f_{abc}: structure const.

g : 変形パラメータ

◎ unique consistent deformation under the condition $\quad$ '95 Barnich, Brandt, Henneaux

- Lorentz 不変 $\quad$ 大局的対称性
- local
- (unitary)
- polynomial $\quad$ S, δ は有限項 $\quad$ ~~Born-Infeld~~
- $\boxed{\delta \neq \delta_0}$
- 同値類 $\longrightarrow$ local な場の再定義で一致する理論は同値

$$A_\mu{}^a \to A_\mu{}^a + f_\mu{}^a(A) + \cdots$$

ゲージ対称性の変形

内山

他のゲージ理論がつくれるか？
（他の変形が可能か？）

→（ある同値類の下で）ない
'95 Barnich, Brandt, Henneaux

ゲージ理論を扱う統一的手法は？

→ Batalin-Vilkovisky 形式
'81 Batalin, Vilkovisky

（supermanifold 上の Poisson geometry）
'95 Alexandrov, Kontsevich, Schwarz, Zaboronsky

小平

どんな対象の変形が記述できるか？

→ いろいろできる。

複素構造の変形 ＝ B-model の変形
'91 Witten

→ "Deformation Theory of Everything"
'00 Kontsevich, Soibelman

Unification of deformation theory?

これからやる例）

$\boxed{\text{変形}}$量子化 ＝ 2D BF 理論の変形

（＊積）

§3 2次元BF理論の変形

2次元 abelian BF 理論

$$S_0 = \frac{1}{2}\int d^2\sigma\, b^{\mu\nu}{}_a F_{\mu\nu}{}^a$$

$\mu, \nu, \lambda, \cdots$ 2次元の添字

$a, b, c, \cdots$ target space or 内部空間

$F_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu B_\nu{}^a - \partial_\nu B_\mu{}^a$, $B_\mu{}^a$:ゲージ場

$b^{\mu\nu}{}_a$:補助場

運動方程式 $F_{\mu\nu}{}^a = 0$ flat

2次元なので $b^{\mu\nu}{}_a = \epsilon^{\mu\nu}\phi_a$ とかける。

代入して部分積分

$$S_0 = \int d^2\sigma\, \epsilon^{\mu\nu} B_{\mu a}\partial_\nu \phi^a$$

ゲージ対称性

$$\begin{cases} \delta_0 \phi^a = 0 \\ \delta_0 B_{\mu a} = \partial_\mu \epsilon_a \end{cases}$$ ϵ_a:ゲージパラメータ

微分形式で書き直すと、

$$B_a \equiv B_{\mu a} dx^\mu$$

すると

$$S_0 = \int B_a \wedge d\phi^a$$

ゲージ対称性

$$\begin{cases} \delta_0 \phi^a = 0 \\ \delta_0 B_a = d\epsilon_a \end{cases}$$

◎ Batalin–Vilkovisky 形式

ゲージパラメータ ϵ_a を FP ghost C_a と変える。

ゲージ変換 → BRS 変換 $\delta_0^2 = 0$ ($\delta_0 C_a = 0$)

◎ Φ : 基本場, FP ゴースト
に対して、
Φ^* : antifield を導入

$$\begin{array}{ccc} B_{\mu a}, & \phi^a, & C_a \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B_\mu^{a*}, & \phi^*_{\mu\nu a}, & C^{a*}_{\mu\nu} \end{array}$$

gh	-1	-1	-2
deg	1	2	2

$$gh\,\Phi + gh\,\Phi^* = -1$$

$$\deg\Phi + \deg\Phi^* = 2$$

$|\Phi| = gh\,\Phi + \deg\Phi$ とすると

$$|\Phi| + |\Phi^*| = 1$$

◎ Antibracket を導入

$$(X, Y) = \frac{X\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi}\frac{\overrightarrow{\delta}Y}{\delta\Phi^*} - \frac{X\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi^*}\frac{\overrightarrow{\delta}Y}{\delta\Phi}$$

性質

- $(F,G) = -(-)^{(ghF+1)(ghG+1)}(G,F)$
  graded symmetric
- $(F,GH) = (F,G)H + (-)^{(ghF+1)ghG} G(F,H)$
  graded Leibniz
- $(-)^{(ghF+1)(ghH+1)}(F,(G,H))$
  $+$ (cyclic permutations) $= 0$
  graded Jacobi

◎ $\boxed{\text{Batalin-Vilkovisky action}}$

$$\widetilde{S}_0 \equiv S_0[\Phi] + (-)^{gh\Phi}\int \Phi^* \delta_0 \Phi + O(\Phi^{*2})$$

今の場合

$$\widetilde{S}_0 = \int B_a \wedge d\phi^a + \int B^{*a} \wedge dC_a$$

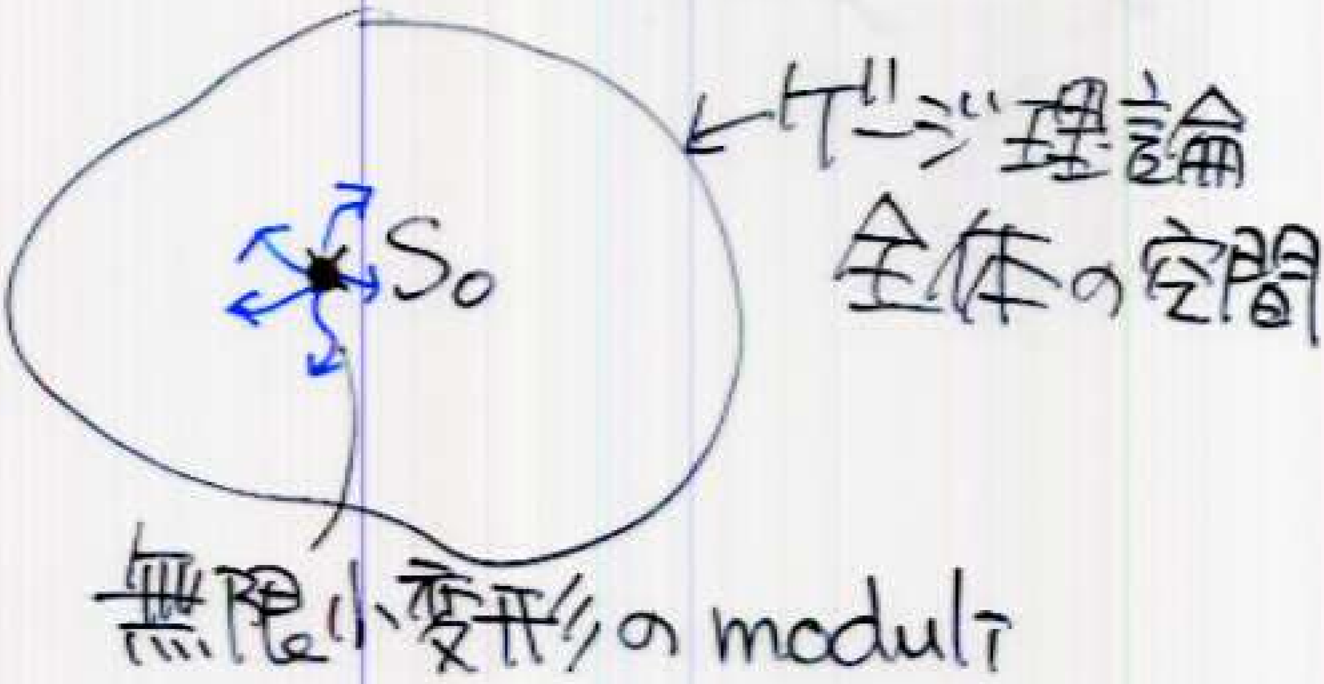
◎ BRS変換

$$\delta_0 F[\Phi, \Phi^*] \equiv (\widetilde{S}_0, F(\Phi, \Phi^*))$$

実際 $(\widetilde{S}_0, B_a) = dC_a = \delta_0 B_a$

◎ $\left.\begin{array}{l} \delta_0^2 = 0 \\ \delta_0 \widetilde{S}_0 = 0 \end{array}\right)$ が必要

$\Longleftrightarrow (\widetilde{S}_0, \widetilde{S}_0) = 0$ classical master equation



S_0: known gauge theory (通常 abelian 理論)

$$S = S_0 + gS_1 + g^2 S_2 + \cdots$$

s.t. $\boxed{(S,S)=0}$ master equation

条件

○ Lorentz不変 〜 global symmetry

○ local 〜 $S = \int \mathcal{L}$ local Lagrangian

(○ unitary) 〜 Kugo-Ojima or [illegible]

○ $\delta \neq \delta_0$

$\Leftrightarrow$ S_i $i=1,2,\cdots$ は各項に少なくとも1つ Φ^*_A を含む

◦同値類

$$S' = S + g\delta F \Rightarrow S' \sim S$$ BRS exact

$\because$) $S'[\Phi^A, \Phi^*_A] = S[\Phi'^A, \Phi'^*_A]$ $g^n_{1次}$

$$\Phi'^A = \Phi^A + g\frac{\vec{\delta}F}{\delta\Phi^*_A}$$

$$\Phi'^*_A = \Phi^*_A - g\frac{\vec{\delta}F}{\delta\Phi^A}$$

場のlocalな再定義

↓

BRS cohomology class

◦polynomial

2 dim BF の場合

$$S = \tilde{S}_0 + g S_1 + g^2 S_2 + \cdots$$

を classical master eq.

$(S, S) = 0$ に代入すると,

$$0 = (\tilde{S}_0, \tilde{S}_0) + 2g(\tilde{S}_0, S_1) + g^2\left[(S_1, S_1) + 2(\tilde{S}_0, S_2)\right] + \cdots$$

g^0 $(\tilde{S}_0, \tilde{S}_0) = \delta_0 \tilde{S}_0 = 0$

g^1 $(\tilde{S}_0, S_1) = \delta_0 S_1 = 0$

$\Leftrightarrow S_1 = \int \mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_1$: Lagrangian

とすると $\delta_0 S_1 = 0$ より

$$\delta_0 \mathcal{L}_1 + d^3 a_1 = 0$$
$$\delta_0 a_1 + d^3 a_0 = 0$$
$$\delta_0 a_0 = 0$$

	gh	deg
$\mathcal{L}_1$	0	2
a_1	1	1
a_0	2	0

よって

$$a_0 = -\frac{1}{2} f^{ab}(\phi) c_a c_b$$

$(f^{ab} = -f^{ba})$

δ_0	$\phi^*_a \to$	$B_a \to$	$\boxed{C_a} \to 0$	$C^{a*} \to$	$B^{a*} \to$	$\boxed{\phi^a}$
gh	-1	0	1	-2	-1	0
deg	2	1	0	2	1	0

これより

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} f^{ab}\left(B_a B_b - 2\phi^{*}_{a} c_b\right) + \frac{\partial f^{ab}}{\partial \phi^c}\left(\frac{1}{2} c^{*c} c_a c_b - B^{*c} B_a c_b\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f^{ab}}{\partial \phi^c \partial \phi^d} B^{*c} B^{*d} c_a c_b$$

g^2　$(S_1, S_1) + 2(\hat{S}_0, S_2) = 0$

今全ての場 Φ, Φ^* に対して $\delta_0 \Phi = d(*)$

なので $(\hat{S}_0, S_2) = \delta_0 S_2 = 0$

よって $(S_1, S_1) = 0$

これより $\boxed{f^{cd}\frac{\partial f^{ab}}{\partial \phi^d} + f^{ad}\frac{\partial f^{bc}}{\partial \phi^d} + f^{bd}\frac{\partial f^{ca}}{\partial \phi^d} = 0}$

◎2次元 abelian BF 理論の変形

これを nonlinear gauge theory (the Poisson σ-model)

$$S = \int B_a \wedge d\phi^a + \frac{1}{2} f^{ab}(\phi) B_a \wedge B_b$$

$$= \int d^2\sigma \left(\epsilon^{\mu\nu} B_{\mu a} \partial_\nu \phi^a + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu} f^{ab}(\phi) B_{\mu a} B_{\nu b}\right)$$

ここで

$$f^{cd}\frac{\partial f^{ab}}{\partial \phi^d} + f^{ad}\frac{\partial f^{bc}}{\partial \phi^d} + f^{bd}\frac{\partial f^{ca}}{\partial \phi^d} = 0$$

'93 Izawa, N.I.

'99 Izawa

ゲージ対称性

$$\begin{cases}\delta\phi^a = f^{ba}(\phi)C_b \\ \delta B_a = dC_a + \dfrac{\partial f^{bc}(\phi)}{\partial\phi^a}B_b C_c\end{cases}$$

可換 $\xrightarrow{\text{変形}}$ 非可換

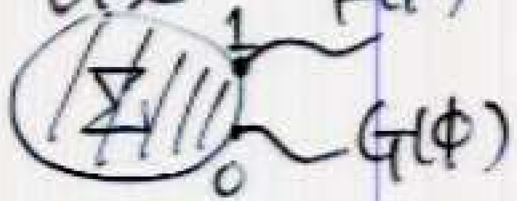
積 $\longrightarrow$ $*$積

$S_0 = \int B_a d\phi^a \longrightarrow S = \int B_a d\phi^a + \frac{1}{2}f^{ab}B_a B_b$

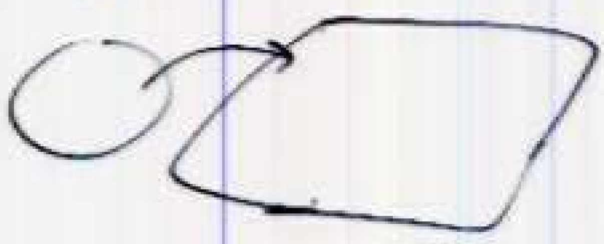
実際

'99 Cattaneo Felder

Disc



$\phi^a : \Sigma \longrightarrow M$ シグマモデル



$$F(x)G(x) = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}B\, F(\phi(1))\,G(\phi(0))\,e^{\frac{i}{\hbar}(S_0+S_{GF})}$$

$x \equiv \langle\phi\rangle$

積

一方、

$$F(x) \star G(x) = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}B\, F(\phi(1))\, G(\phi(0))\, e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_{GF})}$$

$\star$: target space 上の $*$ 積

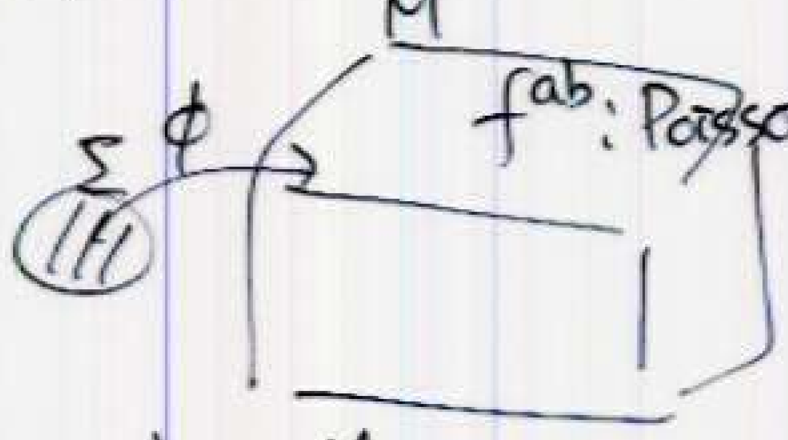
$$\{F, G\} \equiv ((S, F), G)$$

特に $\{\phi^a, \phi^b\} = f^{ab}(\phi)$

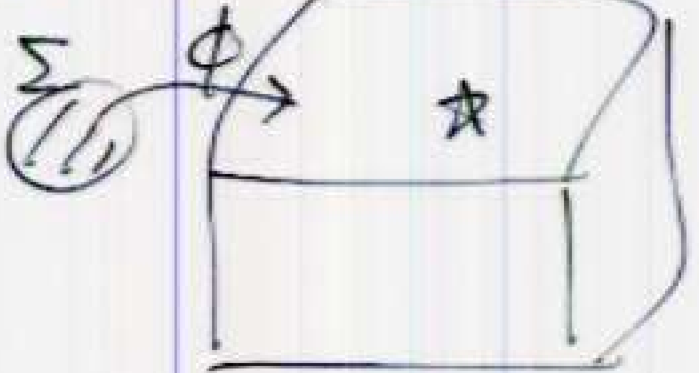
$\{\cdot, \cdot\}$ が Poisson かっこの Jacobi

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f^{ab}}{\partial \phi^d} f^{cd} + \frac{\partial f^{bc}}{\partial \phi^d} f^{ad} + \frac{\partial f^{ca}}{\partial \phi^d} f^{bd} = 0$$

$$\Leftrightarrow (S, S) = 0$$



量子化 ↓



$$S=\int B_a\wedge d\phi^a+\frac{1}{2}f^{ab}(\phi)B_aB_b$$

$\star$積

$f^{ab}=\mathrm{const}$ のときは Moyal積

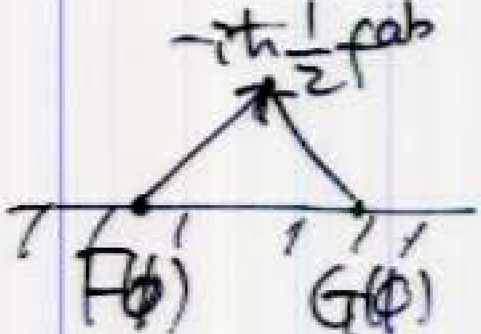
$$F(x)\star G(x)=F(x)\exp\left(-i\hbar\overleftarrow{\partial_a}f^{ab}\overrightarrow{\partial_b}\right)G(x)$$

$$=F(x)G(x)+i\hbar f^{ab}\partial_aF\partial_bG+\cdots$$

propagator

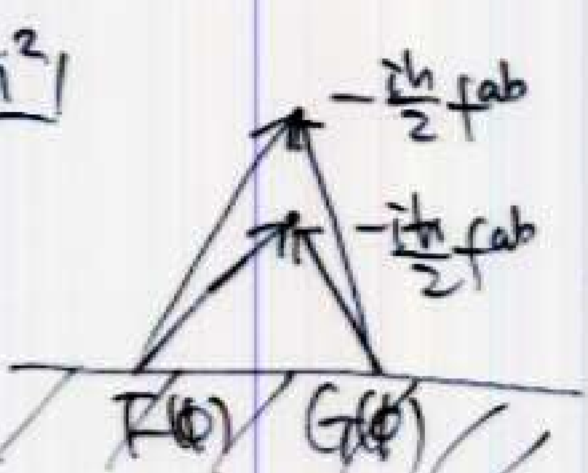
vertex

$\hbar^1$



$$\sim -i\hbar\frac{1}{2}f^{ab}\partial_aF\partial_bG=-\frac{i\hbar}{2}\{F,G\}$$

$\hbar^2$



$$\sim\left(\frac{-i\hbar}{2}\right)^2f^{ab}f^{cd}\partial_a\partial_cF\partial_b\partial_dG$$

*-product

$$f * g = fg + \hbar \underbrace{B_1(f,g)}_{\{f,g\}} + \hbar B_2(f,g)$$
$$+ \cdots$$

ここで B_i は differential ops.
s.t.
$$(f*g)*h = f*(g*h)$$
associative

変換
$$f \mapsto f + \hbar D_1(f) + \hbar^2 D_2(f) + \cdots$$
で同じものは同値　D_i : differential ops.

$\sim$

↑

1-pt fns
boundary condition

↑
古典極限
$\{\phi^a, \phi^b\} = f^{ab}(\phi)$

↑

gauge symmetryの WT identity

↑

(local な) fieldの redefinitionの自由度

$$f \star g(x) = \int_{\phi(\infty)=x} \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}B\, f(\phi(1))\, g(\phi(0))\, e^{\frac{i}{\hbar}S_{WL}}$$

§4 高次元への拡張

n次元 abelian BF 理論の変形

内山 program

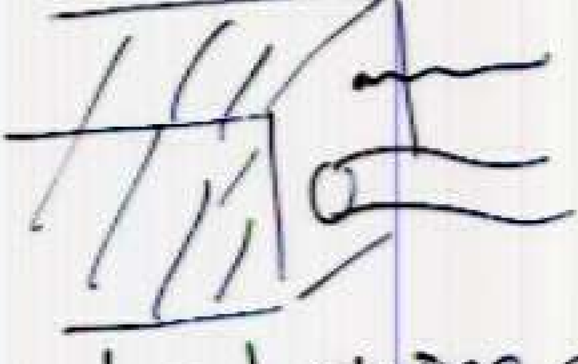
新しいゲージ理論

quasi-Lie algebroid

(L_∞-algebra, Lie algebroid)
(d-algebra, Courant algebroid)

小平 program

Topological Open Membrane



closed string の変形

quasi-Lie algebroid の量子化

↳量子コホモロジー

◎ 3次元

$$S = S_0 + g S_1$$

$$S_0 = \int_X \left[-\underset{2}{B_{2i}} \cdot d\underset{0}{\phi^i} + \underset{1}{B_{1a}} \cdot d\underset{1}{A_1^a} \right]$$

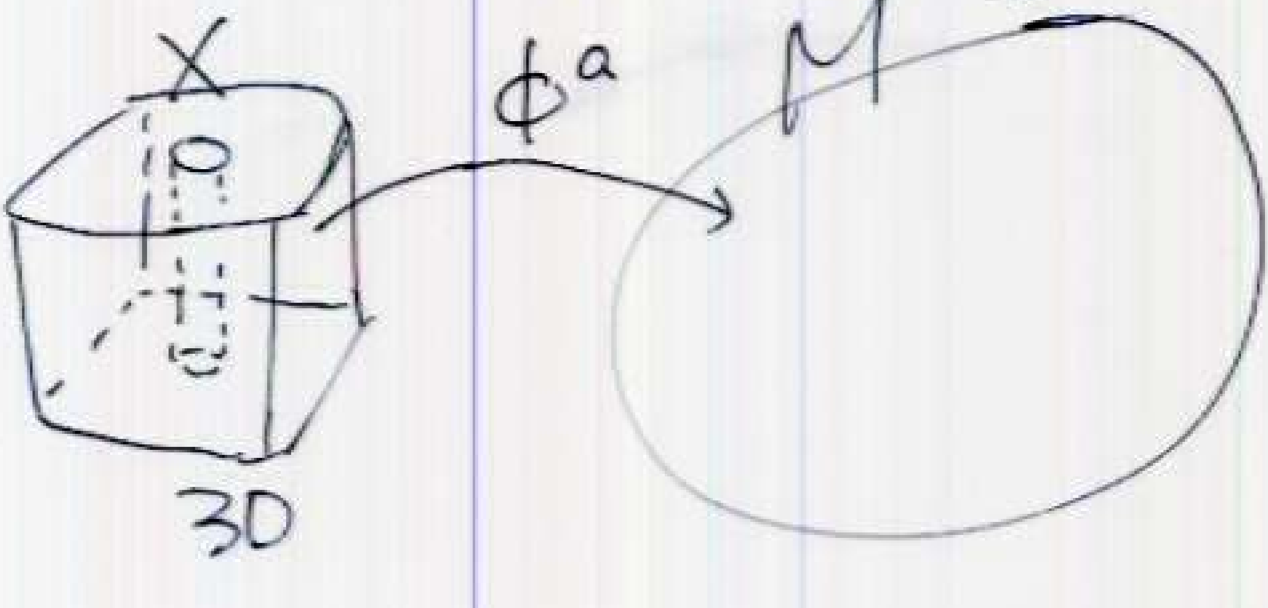
$$S_1 = \int_X \Big[f_{1a}{}^{i}(\phi) A_1{}^a B_{2i} + f_2{}^{ib}(\phi) B_{2i} B_{1b}$$

$$+ \frac{1}{3!} f_{3abc}(\phi) A_1{}^a A_1{}^b A_1{}^c + \frac{1}{2} f_{4ab}{}^{c}(\phi) A_1{}^a A_1{}^b B_{1c}$$

$$+ \frac{1}{2} f_{5a}{}^{bc}(\phi) A_1{}^a B_{1b} B_{1c} + \frac{1}{3!} f_6{}^{abc}(\phi) B_{1a} B_{1b} B_{1c} \Big]$$

$$(S_1, S_1) = 0$$

$\Rightarrow f_1 \sim f_6$ の identity



Courant Algebroid

'90 Courant

vector bundle $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$

with $\langle \cdot , \cdot \rangle$ (graded) symmetric bilinear form

$\circ$ bilinear form

$\rho : \mathcal{E} \to T\mathcal{M}$ the anchor

s.t.

1. $e_1 \circ (e_2 \circ e_3) = (e_1 \circ e_2) \circ e_3 + e_2 \circ (e_1 \circ e_3)$
2. $\rho(e_1 \circ e_2) = [\rho(e_1), \rho(e_2)]$
3. $e_1 \circ F e_2 = F(e_1 \circ e_2) + (\rho(e_1) F) e_2$
4. $e_1 \circ e_2 = \frac{1}{2} \mathcal{D} \langle e_1, e_2 \rangle$
5. $\rho(e_1) \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_1 \circ e_2, e_3 \rangle + \langle e_2, e_1 \circ e_3 \rangle$

$e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(\mathcal{E})$

F ; $\mathcal{M}$ ton fn

$\mathcal{D} : \mathcal{M} \to \Gamma(\mathcal{E})$ s.t. $\langle \mathcal{D} F, e \rangle = \rho(e) F$

---

cf. $TM \oplus T^*M$ ⊥

$$(X + \xi) \circ (Y + \eta) = [X, Y] + (L_X \eta - i_Y d\xi)$$

$\mathcal{M} = \{ \Phi^a : \tilde{X} \to M \}$

fiber $V[1] \oplus V^*[1]$ = A_1^a, B_{1a}ではられるベクトル空間

$\langle e_1, e_2 \rangle \equiv (e_1, e_2)$ antibracket

$e_1 \circ e_2 \equiv ((S, e_1), e_2)$ not symmetric

$\rho(e) F(\Phi) \equiv (e, (S, F(\Phi)))$

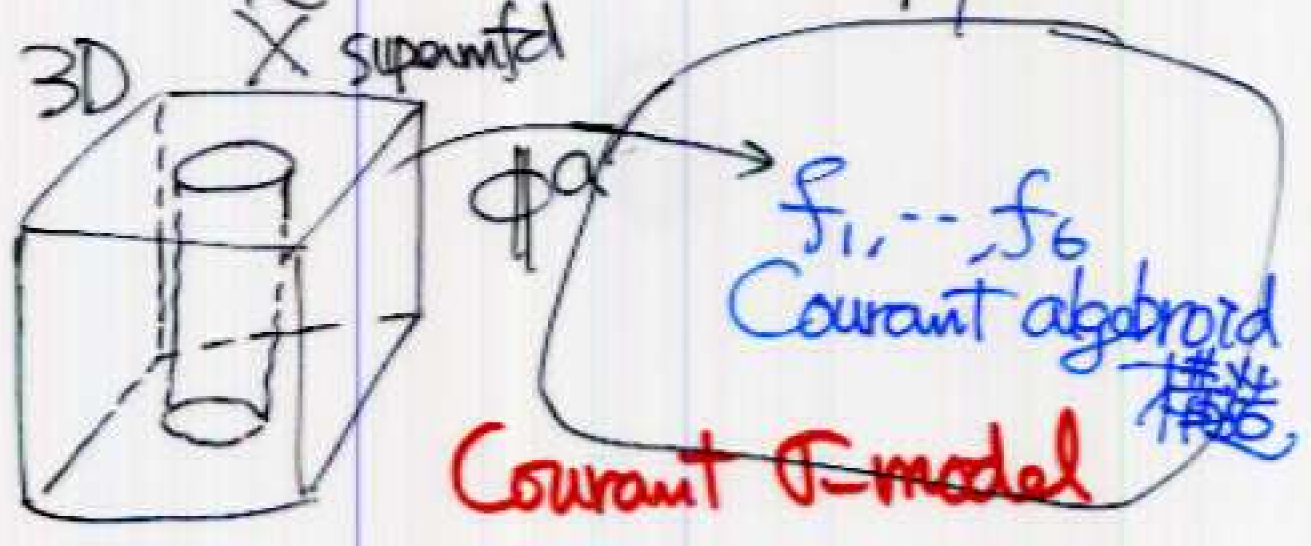
$\mathcal{D}(*) = (S, *)$ BRS

とすると、

Courant algebroid condition 1〜5

($\Leftrightarrow$ $f_1 \sim f_6$ の identity)

$\Leftrightarrow (S, S) = 0$



○ n次元

$$\mathcal{M} = \{\Phi^a : \tilde{X} \to M\}$$

$A_p{}^{a_p}, B_{n-p-1, a_p}$ $(p \neq 0)$ で張られる

vector space $\displaystyle\bigoplus_{p=1}^{[\frac{n-1}{2}]} \left(V_p[p] \oplus V_p^*[n-p-1]\right)$

をfiberとするvector bundle $\mathcal{E}$

$\mathcal{E} \oplus T^*M$ 上に graded symmetric

な $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が def される

$= (\cdot,\cdot)$ antibracket

$E_1, E_2 \in \Gamma(\mathcal{E})$ 又は $C^\infty(M)$

として

$$\begin{cases} \langle E_1, E_2 \rangle \equiv (E_1, E_2) \\ \tau(E_1, E_2) \equiv ((S, E_1), E_2) \\ \mathcal{D}(*) \equiv (S, *) \end{cases}$$

S: ndim BF deformed

$E_1 \in C^\infty(M)$ のとき $\tau(E_1, E_2)$ は anchor

$\begin{pmatrix} \langle \cdot , \cdot \rangle \\ \tau(\cdot , \cdot) \\ \mathcal{D} \end{pmatrix}$ の代数 / 幾何学 $\Leftrightarrow$ BV algebra $(S, S) = 0$

n-algebroid $\Longleftrightarrow$ S : n dim deformed BF

2-algebroid $\Longleftrightarrow$ Poisson

3-algebroid $\Longleftrightarrow$ Courant

n-algebroid $\leftrightarrows$ n dim BF の変形
1対1

It will become important to analyze such a new type of "algebras" in mathematics & physics.

§ In Progress

内山 program

- String Field Theory　　Kajiura
- 重力 & spin 2

2D」 nonlinear gauge theory ⊃ R^2重力

- deformed Poincaré gauge theory

3D」 Chern-Simon-Witten gravity の拡張?

4D」 palatini, Ashtekar, spin-form

- M-theory, Topological open membrane

C_{abc} : 3-form　　Hofman, Park

- p-form gauge theory　・SUSY

小平 program　変形理論 as ゲージ理論

- A-model, B-model
  A_∞ category, derived category) Mirror　Fukaya
  Witten, Kontsevich etc.
- cohomology theory (A_∞, L_∞)　Stasheff
- algebra の"量子化"　Drinfeld
- singularity 理論　K. Saito
- symplectic 幾何　Weistein