Topological Sigma Model の構成と量子化

池田憲明
立命館大学理工学部

§1. Introduction

例として Poisson sigma model という2次元の toplogical sigma model を考え、そのモデルで最近の toplogical sigma model の話題（の一部）をレビューする。

Purpose 1. **物理**　新しいゲージ理論 $\longrightarrow$ 新しい物理理論

物理の理論を厳密に解くことは一般には難しいが、Topological field theory は解けることが期待される。Topological field theory が、物理の理論の一部を正確に表す。

応用: topological string theory, M Theory など

Purpose 2. **数学**　数学を物理で記述する。場の(量子)論の数学的応用

• Topological Field Theory の主な結果

1: Donaldson invariant　4D topological Yang-Mills theory　Witten '88

2: Gromov-Witten 理論(A model)
Kähler 多様体上の新しい invariant (Gromov-Witten invariant)の構成 Witten '88

3: Mirror 対称性
A model $\leftrightarrow$ B model Witten '91

4: superstring の superpotentialの厳密解(topological string) Bershadsky, Cecotti, Ooguri, Vafa '94

5: 結び目不変量 3D Chern-Simons theory
6: Poisson 多様体の変形量子化の存在 Kontsevich '97, Cattaneo, Felder '99

6. topological gravity と KdV 方程式 Witten '91, Kontsevich '92

7: Topologica conformali field theory, Frobenius algebra, Cobordism, Topological D-branes, Singularity theory, etc

Purpose 3. 全ての物理的、数学的対象を「量子化」

量子化を定義する。

数学的対象を Topoloigcal Field Theory で記述すると、それは場の理論なので「量子化」できる。したがって、

- 全ての数学的、物理的対象を Topoloigcal Field Theory で記述せよ。

変形、非可換、モジュライ etc.（？）

• 話題

Poisson sigma model の説明

Poisson-Lie group, r-matrix and topological sigma model

新しいゲージ理論（および topological sigma model）をどのようにみつけるか？

Batalin-Vilkovisky 形式

数学的構成法（AKSZ 形式）

量子化

A-model, B-model

高次元(membrane)への拡張

Courant algebroid, Dirac strucrure, Drinfeld double, generalized complex structure

§2. The Poisson Sigma Model

• The Poisson sigma model N. I. and Izawa '93, Schaller and Strobl '94

2次元多様体Σを考える。Σのlocal coordinate を σ^μ とする。

$B_{\mu,i}$: ゲージ場 ($\mu = 1, 2$), ϕ^i: スカラー場

$$S = \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\mu\nu} B_{\mu,i} \partial_\nu \phi^i + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} f^{ij}(\phi) B_{\mu,i} B_{\nu,j}$$

• 性質

1, $f^{ij}(\phi) = 0$ のとき、2次元 abelian BF 理論

$$S_0 = \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\mu\nu} B_{\mu,i} \partial_\nu \phi^i = \frac{1}{2} \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\mu\nu} \phi^i \, F_{0\mu\nu,i}$$

where $F_{0\mu\nu,i} = \partial_\mu B_{\nu,i} - \partial_\nu B_{\mu,i}$

2, $f^{ij}(\phi) = f^{ij}{}_k \phi^k$ のとき、2次元 nonabelian BF 理論

$$S_N = \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\mu\nu} B_{\mu,i} \partial_\nu \phi^i + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} f^{ij}{}_k \phi^k B_{\mu,i} B_{\nu,j} = \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\mu\nu} \phi^i F_{\mu\nu,i}$$

where $F_{\mu\nu,i} = \partial_\mu B_{\nu,i} - \partial_\nu B_{\mu,i} + f^{jk}{}_i B_{\mu,j} B_{\nu,k}$

ゲージ対称性

$$\delta\phi^i = -f^{ij}{}_k \phi^k \epsilon_j$$

$$\delta B_{\mu,i} = \partial_\mu \epsilon_i + \frac{1}{2} f^{jk}{}_i B_{\mu,j} \epsilon_k$$

$\delta S_N = 0 \Longleftrightarrow f^{ij}{}_m f^{mk}{}_l + f^{jk}{}_k f^{mi}{}_l + f^{ki}{}_k f^{mj}{}_l = 0$ (Lie 環の Jacobi identity)

3, Poisson Sigma Model は f^{ij} がある条件を満たすときゲージ対称性を持つ。

実際

$$\delta\phi^i = -f^{ij}(\phi)\epsilon_j$$

$$\delta B_{\mu,i} = \partial_\mu \epsilon_i + \frac{1}{2}\frac{\partial f^{jk}(\phi)}{\partial \phi^i} B_{\mu,j}\epsilon_k$$

とすると、

$$\delta S = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f^{ij}}{\partial \phi^m}(\phi) f^{mk}(\phi) + \frac{\partial f^{jk}}{\partial \phi^m}(\phi) f^{mi}(\phi) + \frac{\partial f^{kl}}{\partial \phi^m}(\phi) f^{mj}(\phi) = 0 \qquad (1)$$

このゲージ対称性は open algebra

$$\{\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)\}\phi^i = \delta(\epsilon_3)\phi^i,$$

$$\{\delta(\epsilon_1),\delta(\epsilon_2)\}B_{\mu,i}=\delta(\epsilon_3)B_{\mu,i}+\epsilon_{1j}\epsilon_{2k}\frac{\partial f^{jk}}{\partial\phi^i\partial\phi^l}\frac{\delta S}{\delta B_{\mu,l}}$$

よって量子化するためには BRST 形式でなく、Batalin-Vilkovisky 形式が必要である。

以降 (1) を仮定する。

4, 2 次元多様体 Σ から target space M への sigma model と考えることができて、$\phi:\Sigma\longrightarrow M$

(1) が満たされるとき、M 上 $\{F(\phi),G(\phi)\}\equiv f^{ij}(\phi)\frac{\partial F}{\partial\phi^i}\frac{\partial G}{\partial\phi^j}$ が、Jacobi identity を満たし Poisson 括弧となる。

逆に M を Poisson 多様体とする。M が Poisson 構造 $P\in\wedge^2 TM$ を持つとき、$P(dF,dG)\equiv\{F(\phi),G(\phi)\}\equiv f^{ij}(\phi)\frac{\partial F}{\partial\phi^i}\frac{\partial G}{\partial\phi^j}$ とすると、これを使って S を作ると、S は consistent なゲージ理論となる。

よってSを Poisson sigma model という。

M が Poisson 多様体 P $\Longleftrightarrow$ S がゲージ不変

5, gauge algebra は Lie algebroid

6, Σ 上の diffeomorephism, スケール変換で不変

7, この理論はUnitaryで物理的自由度0のtopological field theory

$B_{\mu,i}$, ゲージ自由度 ϵ_i

8, ゲージ対称性が 'Poincaré algebra' のとき、2次元重力と同じaction

9, A_μ の適当なゲージ固定でG/G gaugede WZW model となる。

Alekseev, Schaller, Strobl '95

10, f^{ij} が、invertible のときは A-model に一致する。

$$S=\frac{1}{2}\int_{\Sigma}d^2\sigma\epsilon^{\mu\nu}f^{-1}{}_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j$$

11, 特殊な場合として B-model を含む。

次に Poisson 幾何の基本的な事項をひとつ準備する。

Schouten-Nijenhuis bracket

M: Poisson 多様体とする。

• M 上の Poisson 構造を $\hat{P}$ とする。local coordinate ϕ^i とり、$\{F,G\} = \hat{P}(F,G) = f^{ij}(\phi)\frac{\partial F}{\partial \phi^i}\frac{\partial G}{\partial \phi^j}$, と表す。ここで、$f^{ij} = -f^{ji}$. $\hat{P}$ は Jacobi identity

$$\frac{\partial f^{ij}}{\partial \phi^m}(\phi) f^{mk}(\phi) + \frac{\partial f^{jk}}{\partial \phi^m}(\phi) f^{mi}(\phi) + \frac{\partial f^{kl}}{\partial \phi^m}(\phi) f^{mj}(\phi) = 0$$

を満たすときPoisson 括弧となる。 (1)

• Schouten-Nijenhuis bracketによる Poisson 構造の構成

一方、TM 上の外積代数 $\Lambda^*(TM)$ 上にSchouten-Nijenhuis bracket $[\cdot,\cdot]$ を以下のように定義する。

$X, Y \in TM$ に対しては Lie bracket $[X, Y]$ とする。$\Lambda^n(TM)$ $(n \geq 2)$ の元に対しては、

$$
\begin{aligned}
&[F, G] = -(-1)^{(|F|-1)(|G|-1)}[G, F], \\
&[F, G \wedge H] = [F, G] \wedge H + (-1)^{(|F|-1)|G|} G \wedge [F, H], \\
&[F \wedge G, H] = F \wedge [G, H] + (-1)^{|G|(|H|-1)}[F, H] \wedge G, \\
&(-1)^{(|F|-1)(|H|-1)}[F, [G, H]] + \text{cyclic permutations} = 0,
\end{aligned}
$$

となるように拡張する。

このとき、bivector field を $P = f^{ij}(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi^i} \wedge \frac{\partial}{\partial \phi^j} \in \Lambda^2(TM)$ と定義すると、

$$(1) \Longleftrightarrow [P, P] = 0$$

となる。Poisson 括弧は $\hat{P}(F, G) = P(dF, dG)$ となる。

§3. Poisson-Lie Group, r-Matrix and Topological Sigma Model

Falceto, Gawedzki, '01, Calvo, Falceto, Garcia-Alvarez, '03

Def: Poisson Lie group
G: Lie group が Poisson 構造 $\hat{P}$ を持つとする。Lie group の積が Poisson 構造を保つとき、つまり、

$$\{F,G\}(gh) = \{FL_g, GL_g\}(h) + \{FR_g, GR_g\}(g)$$

のとき、G をPoisson Lie group という。ここで、$g, h \in G$, F, G: G 上の関数、L_g: 左からの積、R_g: 右からの積

G を semi-simple とする。 Lie algebra を $\mathfrak{g}$ とする。

今、$X \in \mathfrak{g}$ に対して right invariant 1-form を $\alpha(X) \equiv \mathrm{tr}(dgg^{-1}X)$ とする。

$P_g(X,Y) \equiv P(\alpha(X),\alpha(Y))$ とする。

Theorem: (Lu, Weinstein '90) 一般の Poisson Lie structure に対して、

$$P_g(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XrY - XAd_g r Ad_g^{-1} Y)$$

と書ける。ここで、r は classical r-matrix. $r : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ で、antisymmetric linear operator で、$c \in \boldsymbol{C}$ として、

$$r[rX,Y] + r[X,rY] - [rX,rY] = c[X,Y]$$

を満たす。

一方、Lie group 上に上記を満たす classical r-matrix r が存在すると、逆にたどって Poisson structure が定義できる。 Semenov-Tian-Shansky '85

よって、

Model 1, G上の Poisson Lie sigma model

$$S = \int_\Sigma \mathrm{tr}(B(dgg^{-1}) + \frac{1}{4}\mathrm{tr}(B(r - Ad_g r Ad_g^{-1})B)$$

と sigma model を構成できる。
ここで、$g : \Sigma \longrightarrow G$, $B \in \Lambda^1(\Sigma) \otimes \mathfrak{g}$,

Model 2, G^* 上の Poisson Lie sigma model

$$[X,Y]_r \equiv \frac{1}{2}([X,rY]+[rX,Y])$$

とすると、$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_r)$ は $(\mathfrak{g}^*,[\cdot,\cdot]^*)$ と tr で同型。

$r_\pm \equiv \frac{1}{2}(r \pm I)$ とすると、

$$[r_\pm X, r_\pm Y] = r_\pm [X,Y]_r$$

となる。$\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ を $\sigma : X \longmapsto (r_+X, r_-X)$ とすると homomorphism.
$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ 上 bilinear form を

$$\mathrm{Tr}((X_1,X_2)(Y_1,Y_2)) \equiv \mathrm{tr}(X_1Y_2) - \mathrm{tr}(X_1Y_2)$$

と決める。すると、$(\mathfrak{g}^*, [\cdot,\cdot]^*)$ は $\mathfrak{g}_r \equiv \sigma(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ と embed される。

$\mathfrak{g}_d \equiv \{(X,X) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} | X \in \mathfrak{g}\}$ とすると、$\mathfrak{g}_d \cap \mathfrak{g}_r = 0\}$

このとき $\mathfrak{g}_r$ に induce される Poisson 構造を考える。

$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\alpha^r(X) \equiv \mathrm{tr}[(dg_+ g_+^{-1} - dg_- g_-^{-1})X)]$ とすると、$\mathfrak{g}_r$ 上の right invariant 1-form となる。

$$P^r_{(g_+,g_-)}(X,Y) \equiv \mathrm{tr}[(X(Ad_{g_+} - Ad_{g_-})(r_- Ad^{-1}_{g_+} - r_+ Ad^{-1}_{g_-})Y]$$

とすると、G_r 上の Poisson structure となる。

よって、

$$S = \int_\Sigma \mathrm{tr}(B(dg_+ g_+^{-1} - dg_- g_-^{-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(B(Ad_{g_+} - Ad_{g_-})(r_- Ad^{-1}_{g_+} - r_+ Ad^{-1}_{g_-})B)$$

§4. Poisson sigma model の構成法

今、kinetic term $\epsilon^{\mu\nu} B_{\mu,i} \partial_\nu \phi^i$ に対して、相互作用項 $\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu} f^{ij}(\phi) B_{\mu,i} B_{\nu,j}$ をどのように見つけるかを考える。

この構成法から Poisson sigma model が 2次元 topological sigma model の中で universal であることを示す。

2つの手法を説明する。

変形理論と AKSZ construction

§4-1. Batalin-Vilkovisky 構造の変形理論

Barnich, Henneaux '93, Barnich, Brandt, Henneaux, '95

新しいゲージ理論を見つける（内山プログラム）　Utiyama '56, Yang-Mills '54

$$S_0 = \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\mu\nu} B_{\mu,i} \partial_\nu \phi^i$$

とすると、この理論はゲージ対称性

$$\delta_0 \phi^i = 0, \quad \delta_0 B_{\mu,i} = \partial_\mu \epsilon_i,$$

を持つ。(abelian BF 理論)

相互作用項を S_I とする。$S = S_0 + S_I$, $\delta = \delta_0 + \delta_I$ とすると、S_I のゲージ変換の満たすべき条件は、$\delta S = 0$ (off shell で) かつ $\{\delta_\epsilon, \delta_{\epsilon'}\} = \delta_{[\epsilon,\epsilon']}$ (on shell で)。

両方をひとつの条件で実現するのが、Batalin-Vilkovisky (BV)形式である。

BV形式の構成法

1, ゲージパラメータ ϵ^i をghost c^i にかえる。c^i: anticommuting boson

Def: ゴースト数 $\mathrm{gh}\ \Phi$.　　$\mathrm{gh}\ B_{\mu,i} = \mathrm{gh}\ \phi = 0$, $\mathrm{gh}\ c = 1$ と定義する。

2, ゲージ変換 δ_0 を BRST変換に読みかえ、$\delta_0^2 = 0$を課す。これより $\delta_0 c = 0$

3, それぞれの field Φ に対して、antifield Φ^* を導入する。

ghost number は $\mathrm{gh}\ \Phi + \mathrm{gh}\ \Phi^* = -1$ と定義する。

$$
\begin{aligned}
&B_{\mu,i} \to B^{*i}_{\mu}, \quad \mathrm{gh}\ B^{*i}_{\mu} = -1 \\
&\phi^i \to \phi^*_{\mu\nu,i}, \quad \mathrm{gh}\ \phi^*_{\mu\nu,i} = -1 \\
&c_i \to c^{*i}_{\mu\nu}, \quad \mathrm{gh}\ c^{*i}_{\mu\nu} = -2
\end{aligned}
$$

4, antibracket を導入する。

$$\begin{aligned}(F,G) &\equiv \sum_{\Phi}\int\left(F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi(\sigma)}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\Phi^*(\sigma')}G - F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^*(\sigma)}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\Phi(\sigma')}G\right)\delta^2(\sigma-\sigma') \\ &\equiv \sum_{\Phi} F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\Phi^*}G - F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^*}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\Phi}G\end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned}&(F,G) = -(-1)^{(\mathrm{gh}F+1)(\mathrm{gh}G+1)}(G,F), \\ &(F,GH) = (F,G)H + (-1)^{(\mathrm{gh}F+1)\mathrm{gh}G}G(F,H), \\ &(FG,H) = F(G,H) + (-1)^{\mathrm{gh}G(\mathrm{gh}H+1)}(F,H)G, \\ &(-1)^{(\mathrm{gh}F+1)(\mathrm{gh}H+1)}(F,(G,H)) + \text{cyclic permutations} = 0,\end{aligned}$$

5, Batalin-Vilkovisky (BV) action S_0 を以下のように構成する。

$$S_{BV0} = S_0 + (-1)^{\mathrm{gh}\Phi} \int_\Sigma \Phi^* \delta_0 \Phi + O(\Phi^{*2}),$$

$O(\Phi^{*2})$ は $(S_{BV0}, S_{BV0}) = 0$ となるように決める。$(S_{BV0}, S_{BV0}) = 0$ を classical master equation という。

今の場合、

$$S_{BV0} = \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\mu\nu} B_{\mu,i} \partial_\nu \phi^i + \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\mu\nu} B_\mu^{*i} \partial_\nu c_i$$

となる。$(S_{BV0}, S_{BV0}) = 0$

6, BRST変換（ゲージ変換）を

$$\delta_0 F[\Phi, \Phi^*] = (S_{BV0}, F[\Phi, \Phi^*])$$

と定義すると、field 上ではゲージ変換に一致する。

7, $(S_{BV0}, S_{BV0}) = 0$ より、

$\delta_0 S_{BV0} = (S_{BV0}, S_{BV0}) = 0$

$\delta_0^2 F = (S_{BV0}, (S_{BV0}, F)) = \frac{1}{2}((S_{BV0}, S_{BV0}), F) = 0$

変形理論

Izawa, '00, N.I. '01, 02

$$S = S_{BV0} + gS_1 + g^2 S_2 + \cdots,$$

となるもので、$(S,S)=0$ となるものを見つける。

ここで、S は Σ の diffeomorphism で不変。M の diffeo で不変。S は local な Lagrangian の積分とする。つまり $S = \int_\Sigma \mathcal{L}$ と仮定する。すると $\mathcal{L}$ は 2-form, ghost number 0 となる。

$$S = S_{BV0} + gS_1 + g^2 S_2 + \cdots,$$

を $(S,S)=0$ に代入すると、

- g^0 order, $(S_{BV0}, S_{BV0}) = 0$ OK.

- g^1 order, $(S_{BV0}, S_1) = \delta_0 S_1 = 0$

$S_1 = \int_\Sigma \mathcal{L}_1$ とすると、$\delta_0 S_1 = 0$ より、descent equations

$$\delta_0 \mathcal{L}_1 + da_1 = 0$$
$$\delta_0 a_1 + da_0 = 0$$
$$\delta_0 a_0 = 0$$

が導出される。a_0 は 0-form で、ghost number 2 である。よって、up to exact term で、

$$a_0 = -\frac{1}{2} f^{ij}(\phi) c_i c_j$$

でなければならない。ここで、$f^{ij}(\phi)$ は $f^{ij}(\phi) = -f^{ji}(\phi)$ となる ϕ の任意関数。

descent equationsを逆に解いていくと、up to exact terms で、

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} f^{ij} (B_i B_j - 2\phi_i^* c_j) + \frac{\partial f^{ij}}{\partial \phi^k} \left(\frac{1}{2} c^{*k} c_i c_j - B^{*k} B_i c_j \right) - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f^{ij}}{\partial \phi^k \partial \phi^l} B^{*k} B^{*l} c_i c_j \quad (2)$$

ここで、$B_i \equiv dx^\mu B_{\mu,i}$, $B^{*i} \equiv dx^\mu B^i_\mu$, $\phi_i^* \equiv dx^\mu \wedge dx^\nu \phi^*_{\mu\nu,i}$

- g^2 order

$(S_1, S_1) + 2(S_{BV0}, S_2) = 0$

すべてのfield, antifield に対して$\delta_0(\Psi) = \partial_\mu(*)$なので$(S_{BV0}, S_2) = 0$ よって、$S_1' = S_1 + S_2$と再定義してS_1に繰り込める。これを続けて$S_a = 0$ $(a = 2, 3, \cdots)$とできる。

残りは $(S_1, S_1) = 0$. S_1 を代入すると、

$$\frac{\partial f^{ij}}{\partial \phi^m}(\phi) f^{mk}(\phi) + \frac{\partial f^{jk}}{\partial \phi^m}(\phi) f^{mi}(\phi) + \frac{\partial f^{kl}}{\partial \phi^m}(\phi) f^{mj}(\phi) = 0$$

(1) となる。

- g^3 order 以上は同様

よって、

$$\begin{aligned} S = S_{BV0} + S_1 \quad &= \quad \int_\Sigma B_i d\phi^i + B^{*i} dc_i + g\Bigg(\frac{1}{2} f^{ij}(B_i B_j - 2\phi_i^* c_j) \\ &\quad + \frac{\partial f^{ij}}{\partial \phi^k}\left(\frac{1}{2} c^{*k} c_i c_j - B^{*k} B_i c_j\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f^{ij}}{\partial \phi^k \partial \phi^l} B^{*k} B^{*l} c_i c_j\Bigg) \end{aligned}$$

すべての$\Phi^* = 0$とおくと

$$S = \int_\Sigma B_i d\phi^i + \frac{1}{2} f^{ij}(\phi) B_i B_j$$

Poisson sigma model となる。つまり、

Theorm: kinetic term が2次元 abelian BF 理論のとき、もっとも一般的な interaction term は Poisson sigma model である。

§4-2. Superfield 形式

field を再定義して $g=1$ とする。

$$
\begin{aligned}
S = S_{BV0} + S_1 \quad = \quad & \int_\Sigma B_i d\phi^i + B^{*i} dc_i + \frac{1}{2} f^{ij} (B_i B_j - 2\phi_i^* c_j) \\
& + \frac{\partial f^{ij}}{\partial \phi^k} \left(\frac{1}{2} c^{*k} c_i c_j - B^{*k} B_i c_j \right) - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f^{ij}}{\partial \phi^k \partial \phi^l} B^{*k} B^{*l} c_i c_j
\end{aligned}
$$

となる。

supercoordinate θ^μ $(\mu = 1, 2)$ を導入する。

Def: form degree $\deg \Psi$. $\deg \theta^\mu = 1$ とし、その他の場については 0 とする。

Def: total degree を $|\Psi| = \mathrm{gh}\Psi + \deg \Psi$ と定義する。

BRST 変換は

$$\delta c^{*i} = dB^{*i} + \cdots, \quad \delta B^{*i} = d\phi^i + \cdots, \quad \delta\phi^i = 0 + \cdots,$$
$$\delta\phi_i^* = dB_i + \cdots, \quad \delta B_i = dc_i + \cdots, \quad \delta c_i = 0 + \cdots,$$

より、superfield を

$$\boldsymbol{\phi}^i \equiv \phi^i + \theta^\mu B_\mu^{*i} + \frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu c_{\mu\nu}^{*i},$$
$$\boldsymbol{B}_i \equiv c_i + \theta^\mu B_{\mu,i} + \frac{1}{2}\theta^\mu\theta^\nu \phi_{\mu\nu,i}^*,$$

と定義すると action は

$$S = \int_{T[1]\Sigma} d^2\sigma d^2\theta \ \boldsymbol{B}_i D\boldsymbol{\phi}^i + \frac{1}{2} f^{ij}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_j$$

となる。ここで、$D \equiv \theta^\mu \partial_\mu$, $|\boldsymbol{\phi}| = 0$, $|\boldsymbol{B}| = 1$. antibracketは

$$(F, G) \equiv F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{\phi}^i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}_i} G - F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}_i} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{\phi}^i} G$$

BRST 変換は

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\phi}^i &= (S, \boldsymbol{\phi}^i) = D \boldsymbol{\phi}^i + f^{ij}(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{B}_j, \\ \delta \boldsymbol{B}_i &= (S, \boldsymbol{B}_i) = D \boldsymbol{B}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial f^{jk}}{\partial \boldsymbol{\phi}^i} (\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{B}_k, \end{aligned}$$

- Poisson sigma model は T^*M 上の Lie algebroid の構造を持つ。

Def: Lie algebroid

A Lie algebroid over a manifold $\mathcal{M}$ is a vector bundle $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$ with a Lie algebra structure on the space of the sections $\Gamma(\mathcal{E})$ defined by the bracket $[e_1, e_2], \quad e_1, e_2 \in \Gamma(\mathcal{E})$ and a bundle map (the anchor) $\rho : \mathcal{E} \to T\mathcal{M}$ satisfying the following properties:

$$
\begin{aligned}
&1, \quad \text{For any} \quad \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in \Gamma(\mathcal{E}), \quad [\rho(\mathrm{e}_1), \rho(\mathrm{e}_2)] = \rho([\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2]),\\
&2, \quad \text{For any} \quad \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in \Gamma(\mathcal{E}),\ \mathrm{F} \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}),\\
&\qquad [e_1, Fe_2] = F[e_1, e_2] + (\rho(e_1)F)e_2,
\end{aligned}
$$

$\mathcal{M} = Map(\Sigma, M)$, $\mathcal{E} = T^*\mathcal{M}$ として、$[e_1, e_2] \equiv (e_1, (S, e_2)) = f^{ij}\frac{\partial e_1}{\partial \phi^i}\frac{\partial e_2}{\partial \phi^j}$ と定義すると、$(S, S) = 0 \Longleftrightarrow$ a Lie algbroid on T^*M

§5. BRST-BV量子化の AKSZ 形式

以上の考察から以下のような構成法が導かれる。以下を AKSZ 形式という。

Alexandrov, Kontsevich, Schwartz, Zaboronsky '97

３つの構成要素

- Supermanifold (Superfield Φ)
- P-structure (Antibracket $(*, *)$)
- Q-structure (BV action S)

- Supermanifold (Superfield)

○ TX: a tangent bundle ($X = \Sigma$)
Def $\Pi TX = T[1]X$: A *supermanifold* is a tangent bundle with reversed parity of the fiber. fiber を外積代数にしたベクトルバンドル。

· local coordinates
$\{\sigma^\mu\}$ on X, where $\mu = 1, 2, \cdots, n$
$\{\theta^\mu\}$ on $T_\sigma X$, fermionic supercoordinate

Def: **form degree** $\deg \sigma = 0$ and $\deg \theta = 1$

We extend a smooth map $\phi : X \longrightarrow M$ to a map $\boldsymbol{\phi} : \Pi TX \longrightarrow M$.

A function on ΠTX is called a *superfield*.

$$\boldsymbol{\phi} = \phi^{(0)} + \theta^{\mu_1}\phi^{(-1)}_{\mu_1} + \frac{1}{2!}\theta^{\mu_1}\theta^{\mu_2}\phi^{(-2)}_{\mu_1\mu_2}$$

$\circ$ T^*M: a cotangent bundle

Def $T^*[1]M$: A *graded cotangent bundle* is a cotangent bundle with the degree of the fiber 1.

$\cdot$ $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{A}_0 \in Map(\Pi TX, M)$.

$\boldsymbol{B} \in \Gamma(\Pi TX \otimes \boldsymbol{\phi}^*(T^*[1]M))$:

Def: **total degree**: $|\boldsymbol{\phi}| = 0$ and $|B| = 1$

Def: **ghost number**: $\mathrm{gh}F = |F| - \mathrm{deg}F$, where F is a superfield.

Def: $<,>$: TM と T^*M の元の natural pairing

- P-structure (antibracket)

$\mathcal{A} = \mathrm{Map}(\Pi TX \longrightarrow T^*[1]M)$ とする。
Def: $Hom(\sum_k \mathcal{A}^{\otimes k}, \mathcal{A})$ 上の線形変換

$$\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\phi}}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}} \right\rangle$$

は($\boldsymbol{B}$ は反可換であるから) $\Delta^2 = 0$である。これを odd Laplace operator という。このとき、$F, G \in Hom(\sum_k \mathcal{A}^{\otimes k}, \mathcal{A})$ に対して

$$\begin{aligned}(F, G) = \Omega^{-1}(F, G) \qquad &\equiv (-1)^{|F|}\Delta(FG) - (-1)^{|F|}\Delta(F)G - F\Delta(G) \\ &= \left\langle F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{\phi}}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}}G \right\rangle - \left\langle F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{\phi}}G \right\rangle.\end{aligned}$$

を BV bracket (antibracket) という。その性質は

$$
\begin{aligned}
&(F,G) = -(-1)^{(|F|-1)(|G|-1)}(G,F),\\
&(F,GH) = (F,G)H + (-1)^{(|F|-1)|G|}G(F,H),\\
&(FG,H) = F(G,H) + (-1)^{|G|(|H|-1)}(F,H)G,\\
&(-1)^{(|F|-1)(|H|-1)}(F,(G,H)) + \text{cyclic permutations} = 0,
\end{aligned}
$$

これを満たす括弧積を Gerstenhaber bracket という。

- Q-structure

S: a function on $\mathcal{A}$ が

$$\Delta(e^{\frac{i}{\hbar}S}) = 0$$

を満たすとき a *quantum BV action* という。

これは

$$(S, S) - 2i\hbar\Delta S = 0$$

と同値である。これを quantum master equation という。

これは $\hbar \longrightarrow 0$ の極限で、

$$(S, S) = 0$$

となる。これを classical master equation という。

BV action S に対して、Δ-cohomology の代表元 $\mathcal{O}$ は $\int_L \Delta(\mathcal{O}e^{\frac{i}{\hbar}S}) = 0$ を満たす。$\mathcal{O}$ を observable という。これより、

$$(S, \mathcal{O}) - i\hbar\Delta\mathcal{O} = 0.$$

これは、$\hbar \longrightarrow 0$ の極限で、

$$(S, \mathcal{O}) = 0$$

通常 $\mathrm{gh}S = 0$ を仮定する。$Hom(\sum_k \mathcal{A}^{\otimes k}, \mathcal{A})$ は ghost number でcomplex に分解される。 cf. Hochschild complex

BRST変換は、$\delta S = (S, F)$ と定義する。

classical には observable は、$\delta\mathcal{O} = 0$

例: Poisson sigma model

Cattaneo, Felder '01

M: Poisson 多様体とする。

• M 上の Poisson 構造を $\hat{P}$ とする。local coordinate ϕ^i とり、$\hat{P}(F,G) = f^{ij}(\phi)\frac{\partial F}{\partial \phi^i}\frac{\partial G}{\partial \phi^j}$, と表す。ここで、$f^{ij} = -f^{ji}$.

• Schouten-Nijenhuis bracket による構成を考える。TM 上の外積代数 $\Lambda^*(TM)(= T[1]M)$ 上Schouten-Nijenhuis bracket $[\cdot,\cdot]$ が定義できる。Schouten-Nijenhuis bracket はGerstenhaber bracket なので、P-structureである。
bivector field
$P = f^{ij}(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi^i} \wedge \frac{\partial}{\partial \phi^j} \in \Lambda^2(TM)$ と定義すると、

$$(1) \Longleftrightarrow [P,P] = 0 \Longleftrightarrow \text{P が Poisson}$$

なので、 Pが Q-sturcture である。

注）$\delta_1(*) = [P, *]$ は $\delta_1^2 = 0$ のcoboundary 作用素 δ_1 を定義するので、δ_1 の cohomology が定義できる。これをPoisson-Lichnerwicz cohomology という。

• 元の Poisson 括弧は derived bracket

$$\{F, G\} \equiv [F, [P, G]],$$

で再現できる。

Theorem: (Voronov) M 上の Poisson bracket にたいして$T[1]M$ 上の Schouten-Nijenhuis bracket と P が存在して、$\{F, G\} \equiv [F, [P, G]]$ と表せる。

supermanifold N 上の odd Poisson bracket にたいしてT^*N 上の Poisson bracket と P' が存在して、$[F, G] \equiv \{F, \{P', G\}\}$ と表せる。

BV action の AKSZ construction

supermanifold $\mathrm{Map}(\Pi T\Sigma, T^*[1]M)$ を考える。Action は $S = S_0 + S_1$ と2つの項から構成される。

S_0: T^*M の symplectic structure から $\mathrm{Map}(\Pi T\Sigma, T^*[1]M)$ の P-structure が誘導される。その supersymplectic form を $\Omega(= D\boldsymbol{\phi} \wedge D\boldsymbol{B})$ とする。その fundamental form Ξ を $\Omega = -D(\Xi)$ とする。

$S_0 = \int_{T\Sigma} \Xi$ と構成する。

S_1: Schouten bracket と Poisson 構造 P から $\Theta = \frac{1}{2}P(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B})$ と定義して、$S_1 = \int_{T\Sigma} \Theta$ と構成する。すると、

$$S = S_0 + S_1 = \int_{\Pi TX} \Xi + \Theta(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}) = \int_{\Pi T\Sigma} \langle \boldsymbol{B}, D\boldsymbol{\phi} \rangle + \frac{1}{2}P(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}),$$

となり、$[P, P] = 0 \Longleftrightarrow (S, S) = 0$

$(S,S)=0 \Longleftrightarrow (S_0,S_1)+\frac{1}{2}(S_1,S_1)=0$, Maurer-Cartan equation

§6. 新しい Topological Sigma model の構成

○作り方

1, 既に知っている Topological Sigma Model を S_0 として変形理論で新しいものを作る。

$S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots$, たとえば Abelian BF 理論から変形理論で新しい理論が作れる。

2, (AKSZ construction)

• P-structure (graded Poisson structure) を持つsupermanifold を用意する。$\delta_1^2 = 0$ となる coboundary 作用素 δ_1 が適当な supermanifold 上のP-structure を使って、$\delta_1(*) = (\Theta, *)$ と実現できれば、それは Q-sturctureであり、Θ を使って構成できる。

$$S = S_0 + S_1 = \int_{\Pi TX} \Xi + \Theta(\boldsymbol{B}, \cdots)$$

§7. 量子化

現在の段階では量子化した分配関数 $Z = \int_L \mathcal{D}\Phi \ e^{\frac{i}{\hbar}S}$ を exact に求めるのは(特殊な理論を除いて)非常に難しい。

そこで、$\mathcal{O}_s$ を observable として、$\hbar$による形式的展開

$$Z(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r) = \int_L \mathcal{D}\Phi \ \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r e^{\frac{i}{\hbar}S} = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k Z_k(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$$

の各項だけを求める (formal series) という考え方をする。

§8. Poisson sigma model on disc

Theorem: Poisson sigma model の tree open string amplitude は Poisson 多様体の変形量子化と一致する。(Kontsevich 公式)　Kontsevich '97, Cattaneo, Felder '99

Def: 変形量子化(deformation quantization)

Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer '78

(M, P) を Poisson 多様体とする。$C^\infty(M)$ 上の形式的冪級数の集合を $C^\infty(M)[[\hbar]]$ とする。$C^\infty(M)[[\hbar]]$ と次の条件を満たす積 $*$ の組を変形量子化という。

i) $F, G \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ に対して $F * G = \sum_k \hbar^k \mathcal{B}_k(F, G)$ は双線形で、$\mathcal{B}_k$ は bidifferential operator で、
$\mathcal{B}_0(F, G) = FG$, $\mathcal{B}_1(F, G) = \{F, G\}$。

ii) $F, G, H \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ に対して結合律

$$(F * G) * H = F * (G * H)$$

をみたす。

iii) 線形変換 $F' = \sum_k \hbar^k \mathcal{D}_k(F)$ で、一致するものは同値とする。ここで $\mathcal{D}_k$ は微分作用素

注）symplectic 多様体の変形量子化の存在は、大森、前田、吉岡が証明した。
Omori, Maeda, Yoshioka '91
しかし Poisson 多様体の場合は存在が知られていなかった。

topological sigma model (Poisson sigma model) の手法によって、すべての Poisson 多様体に変形量子化が存在することが証明された。 Kontsevich '97

構成法

2次元 disc $\Sigma = \{z||z| = |\sigma^2 + i\sigma^1| \leq 1\}$ (tree open string) 上で the Poisson sigma model を考える。

$$S = S_0 + S_1 = \int_{\Pi T\Sigma} \langle \boldsymbol{B}, D\boldsymbol{\phi} \rangle + \frac{1}{2} P(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}),$$

target space M 上の点 x と関数 $F(x), G(x)$ に対して、correlation function

$$\langle F(\boldsymbol{\phi}(0)) G(\boldsymbol{\phi}(1)) \rangle = \int_{\boldsymbol{\phi}(\infty)=x} \mathcal{D}\boldsymbol{\phi} \mathcal{D}\boldsymbol{B} \; F(\boldsymbol{\phi}(0)) G(\boldsymbol{\phi}(1)) e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_{GF})}$$

を計算する。これが $F * G(x)$ と一致する。

1. boundary condition

Σ の boundary でBRST invariant になるように決める。

$$\boldsymbol{\phi}^i| = x^i = \text{constant}, \quad \boldsymbol{B}| = 0$$

2. ゲージ固定

FP antighost $\bar{c}^i$, $\mathrm{gh}\ \bar{c}^i = -1$,
Nakanishi-Lautrap field b^i, $\mathrm{gh}\ \bar{c}^i = 0$,
antifield $\bar{c}_i^*$, $\mathrm{gh}\ \bar{c}_i^* = 0$, b_i^*, $\mathrm{gh}\ b_i^* = -1$,
を導入し、

$$S_{GF} = -\int_\Sigma b^i \bar{c}_i^*$$

とする。ゲージ固定fermion Ψを

$$\Psi = \int_{\Sigma} \bar{c}^i d * B_i$$

とし(Landau gauge)、

$$\Phi^* = \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi}$$

となる'Lagrangian submanifold' に制限し、antifields Φ^*を消去する。

3. observables (vertex operators)

BRST 変換で不変な operator は ϕの任意関数Fの Σ のboundary operator $F(\phi)|$

$$(S, F(\phi)|) - i\hbar \Delta F(\phi)| = 0.$$

4. まずS_0 を見る。boundary condition と disc 上の Green 関数$d_w * d_w G(z,w) = 2\pi\delta(z-w))$ と gauge invariant なboundary condition から、propagator

$$< \tilde{\boldsymbol{\phi}}(z)\boldsymbol{B}(w) >= \frac{i\hbar}{2\pi}(D_z + D_w)G(z,w)$$

が決まる。ここで、$G(z,w) = \frac{1}{2i}\ln\frac{(z-w)(z-\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})(\bar{z}-w)}$, $\boldsymbol{\phi} = x + \tilde{\boldsymbol{\phi}}$

5. 次に S_1 を見る。

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{T[1]\Sigma|} d^2\theta d^2\sigma\ \frac{1}{2} f^{ij}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_j \\ &= \frac{1}{2}\int_{T[1]\Sigma|} d^2\theta d^2\sigma\ \sum_{i_p}^{n} \frac{1}{p!}\partial_{k_1}\partial_{k_2}\cdots\partial_{k_p} f^{ij}(x)\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{k_1}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{k_2}\cdots\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{k_p}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_j \end{aligned}$$

より、vertex が決まる。($\hbar^{-1}$)
$\tilde{\boldsymbol{\phi}}$, p 個に $\boldsymbol{B}$, 2 個

k 次のグラフに対応する k 次の微分作用素 $B_{\Gamma k}(F,G)$ に対して、weight

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{(i\hbar)^k}{(2\pi)^{2k}}\right)\int \wedge_{j=1}^{k} dG(u_i,u_{v_1(j)}) \wedge dG(u_j,u_{v_2(j)})$$

ここで $(u_i,u_{v_1(j)})$, $(u_i,u_{v_2(j)})$ はそれぞれの propagater の端点。$(j=1,\cdots,k)$

cf. Operad

6. tadpole の繰り込み
tadpole グラフからくる 4. の計算をすべて 0 に繰り込むことができる。

counter term

$$S_c t \quad = \quad \int_{T[1]\Sigma|} d^2\theta d^2\sigma \; \frac{\partial f^{ij}(\boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}^i} \boldsymbol{B}_j \kappa$$

注）この理論は繰り込み可能

変形量子化(deformation quantization) との対応

相関関数の摂動展開は $\hbar$ の冪であるから、$C^\infty(M)$ 上の形式的冪級数 $C^\infty(M)[[\hbar]]$ となる。

Poisson sigma model は M 上の Poisson 構造 P のみで決定されるから、相関関数の冪級数の各項は f^{ij} とその微分のみで記述される。

i)

$$
\begin{aligned}
F * G(x) &= \sum_k \hbar^k \mathcal{B}_k(F, G) = \langle F(\boldsymbol{\phi}(0)) G(\boldsymbol{\phi}(1)) \rangle \\
&= \int_{\boldsymbol{\phi}(\infty)=x} \mathcal{D}\boldsymbol{\phi} \mathcal{D}\boldsymbol{B} \ F(\boldsymbol{\phi}(0)) G(\boldsymbol{\phi}(1)) e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_{GF})}
\end{aligned}
$$

は双線形である。

vertex は $\frac{1}{p!}\partial_{k_1}\partial_{k_2}\cdots\partial_{k_p}f^{ij}(x)$ $\mathcal{B}_k$ は bidifferential operator である。

$\hbar^0$ の項は1点関数の積なので、$\mathcal{B}_0(F,G) = FG$. $\hbar^1$ の項は古典極限である。tadpole を 0 に繰り込んだことから、$\mathcal{B}_1(F,G) = \{F,G\}$.

ii) Ward-Takahashi identity

$$\int_{\boldsymbol{\phi}(\infty)=x,0<t<1} \mathcal{D}\boldsymbol{\phi}\mathcal{D}\boldsymbol{B}\ \Delta\left(F(\boldsymbol{\phi}(0))G(\boldsymbol{\phi}(t))H(\boldsymbol{\phi}(1))e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_{GF})}\right) = 0$$

より、Stokes の定理より boundary 積分に帰着させると

$$\int_{\boldsymbol{\phi}(\infty)=x,t=0} \mathcal{D}\boldsymbol{\phi}\mathcal{D}\boldsymbol{B}\ \left(F(\boldsymbol{\phi}(0))G(\boldsymbol{\phi}(0))H(\boldsymbol{\phi}(1))e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_{GF})}\right)$$
$$+\int_{\boldsymbol{\phi}(\infty)=x,t=1} \mathcal{D}\boldsymbol{\phi}\mathcal{D}\boldsymbol{B}\ \left(F(\boldsymbol{\phi}(0))G(\boldsymbol{\phi}(1))H(\boldsymbol{\phi}(1))e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_{GF})}\right) = 0$$

$F, G, H \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ に対して結合律

$$(F * G) * H = F * (G * H)$$

をみたす。

iii) local な場の redefinition の自由度=BRST exact terms より、BRST exact terms の差である2つの vertex operator は同じcorrelation function となる。これは$F' = \sum_k \hbar^k \mathcal{D}_k(F)$ に相当する。

正確に議論するには多重ベクトル場の空間 $T_{poly}(M)$から多重微分作用素のホッホシルドコチェインの空間 $D_{poly}(M)$ への L_∞-morphism を考える必要がある。(略)

Kontsevich '97

Def: L_∞-algebra (strongly homotopy Lie algebra) Schlessinger, Stasheff, '85

V を（graded な）ベクトル空間として、$C(V) \equiv \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n}$ とする。
$C(V)$ 上で、

(1) coproduct, $\Delta \longrightarrow \Delta \otimes \Delta$ が定義されていて、coassosiative

$$(\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \Delta)\Delta$$

(2) $x, y \in C(V)$ に対して $\tau : C(V) \otimes C(V) \longrightarrow C(V) \otimes C(V)$ を $\tau : x \otimes y \longmapsto (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ と定義するとき、cocomutative

$$\tau\Delta = \Delta$$

ここで $|x|$ は x の degree.

(3) 次数1の線形作用素 $Q : C(V) \longrightarrow C(V)$ が存在して、codifferential

$$\Delta Q = (Q \otimes 1)\Delta + (1 \otimes Q)\Delta$$

で、さらに、

$$Q^2 = 0$$

このとき(V, Q)を L_∞-algebra という。

注）双対側ではsupermanifold 上の形式的冪級数上の BRST 形式として理解できる。

Conjecture

Poisson Lie sigma model の量子化 $\Longrightarrow$ Quantum R-matrix?

Quantum groupoid Xu '99

量子化が計算できているそのほかの例

例1: Gromov-Witten 理論 (closed topological string)
Poisson sigma model で、X: Riemann 面、M: Kähler 多様体とする。このとき P は nondegenerate に、つまり、$P^{-1} = \omega$ を Kähler 形式ととれる。このときを（originalな） A model という。Poisson sigma model を gauge fixing fermion

$$\Psi = \int d^2z(B^i_z g_{ij} \bar{P}^j{}_k \partial_z \phi^k - B^i_{\bar{z}} g_{ij} \bar{P}^j{}_k \partial_{\bar{z}} \phi^k)$$

でゲージ固定すると $N = 2$ supersymmetric sigma model を twint した、Witten の A model action と (ghost 項も含めて) 一致する。

古典論 $\hbar^0$ は $Z_0(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ は de Rham cohomology となる。

量子論での $\hbar^k \geq 1$ の $Z_k(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ を Gromov-Witten invariant という。Witten '88

例2: B model
X: Rimann 面、M: 複素多様体とする。

Def: M: d次元多様体上の線形変換$J : TM \longrightarrow TM$ が以下を満たすとき複素構造という。

1) $J^2 = -1$
2) $X, Y \in TM$ に対して$\Pi_{\mp}[\Pi_{\pm}X, \Pi_{\pm}Y] = 0$

ここで、$\Pi_{\pm}$ はJの$\pm\sqrt{-1}$固有バンドルへの projection.
$[\cdot, \cdot]$: Lie bracket

M の complex structure のみに依存し、古典論 ($\hbar^0$) $Z_0(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ が Darboux cohomology となる topological field theory が作れる。それを B-model という。
これは Kodaira-Spencer 理論と一致する。
量子補正 $\hbar^k \geq 1$, $Z_k(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ はゼロ。 Witten '91

B Model の AKSZ construction

- Supermanifold $\mathrm{Map}\,(\Pi TX, T^*[1](T[1]M))$ をとる。

$\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{Map}(\Pi T\Sigma, M)$, $\boldsymbol{A}_1 \in \Gamma(\Pi T^*\Sigma \otimes \boldsymbol{\phi}^*(T[1]M))$

$\boldsymbol{B}_1 \in \Gamma(\Pi T^*\Sigma \otimes \boldsymbol{\phi}^*(T^*[1]M))$, $\boldsymbol{B}_0 \in \Gamma(\Pi T\Sigma \otimes \boldsymbol{\phi}^*(T^*[0]M))$

- P-structure

$$\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}_1}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}_0} \right\rangle$$

- Q-structure (BV action S)

$$S_B = \int_{\Pi T\Sigma} \boldsymbol{B}_{1i} D\boldsymbol{\phi}^i - \boldsymbol{B}_{0i} D\boldsymbol{A}_1^i + J^i{}_j(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{A}_1^j + \frac{\partial J^i{}_k}{\partial \boldsymbol{\phi}^j}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{B}_{0i}\boldsymbol{A}_1^j\boldsymbol{A}_1^k$$

$$= \int_{\Pi T\Sigma} (\, \boldsymbol{B}_{1i} \ \boldsymbol{A}_1^i \,) D \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}^i \\ \boldsymbol{B}_{0i} \end{pmatrix} + (\, \boldsymbol{B}_{1i} \ \boldsymbol{A}_1^i \,) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} J^i{}_j(\boldsymbol{\phi}) \\ -\frac{1}{2} J^j{}_i(\boldsymbol{\phi}) & \frac{\partial J^i{}_k}{\partial \boldsymbol{\phi}^j}(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{B}_{0i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{1j} \\ \boldsymbol{A}_1^j \end{pmatrix}$$

A model のときと同様に、ゲージ固定すると、$N = 2$ supersymmetric sigma model を twint した、Witten の B model action と一致する。

Alexandrov, Kontsevich, Schwartz, Zaboronsky '97 N.I., Tokunaga '07

できていない例:
Poisson sigma model で、X: Riemann 面、M: Poisson 多様体とする。Pが必ずしも nondegenarate でないときは、これも "A model" という。

古典論 $\hbar^0$ は$Z(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ は$\delta F = [P, F]$ の Lichnerowicz-Poisson cohomology となる。

これは一般に無限次元

量子論 $\hbar^k \geq 1$ の$Z(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ は unkown

§Topological Sigma Model in 3 dimensions

$n = \dim X = 3$の時の構成法

• Supermanifold
E: a vector bundle on M とする。E が fiber metric を持つとする。fiber metric を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とする。

$T^*[2]E[1]$
を考える。ここで、

$E[p]$: A *graded cotangent bundle on a supermanifold* M
s.t. base の degree を p_1, fiber の degree を p_2 として、$p = p_1 + p_2$.

さらに、$\mathrm{Map}(\Pi TX \longrightarrow T^*[2]E[1])$ を考える。

local coordinate で書くと、

$\{\boldsymbol{\phi}^i = \boldsymbol{A_0}^i\}$: a map from ΠTX to M, where $i = 1, 2, \cdots, d$.
$\{\boldsymbol{B}_{2,i}\}$: a superfield on ΠTX, which take a value on $\boldsymbol{\phi}^*(T^*[2]M)$
$\boldsymbol{A_1}^a$: a total degree 1 superfield on ΠTX, which take a value on $\boldsymbol{\phi}^*(E[1])$
fiber metric k_{ab}

- P-structure odd Laplace operator

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \phi^i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}_{2,i}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A_1}^a} k^{ab} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A_1}^b}$$

antibracket は

$$(F, G) \quad \equiv \quad \Delta(FG) - \Delta(F)G - (-1)^{|F|} F \Delta(G)$$

$$= \sum_{p=0}^{1} \left\langle F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{A}_p}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}_{2-p}} G \right\rangle - (-1)^p \left\langle F \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}_{2-p}}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{A}_p} G \right\rangle.$$

その性質は

$$\begin{aligned}
&(F,G) = -(-1)^{(|F|-2)(|G|-2)}(G,F), \\
&(F,GH) = (F,G)H + (-1)^{(|F|-2)|G|}G(F,H), \\
&(FG,H) = F(G,H) + (-1)^{|G|(|H|-2)}(F,H)G, \\
&(-1)^{(|F|-2)(|H|-2)}(F,(G,H)) + \text{cyclic permutations} = 0,
\end{aligned}$$

これを degree -2 の Loday bracket という。

• Q-structure

2次元と同様に変形理論でもっとも一般的な topological sigma model を求めると、以下のようになる。

The Courant sigma model

$$
\begin{aligned}
S = S_0 + S_1 &= \int_{\Pi T X} \left[-\boldsymbol{B}_{2,i} D \boldsymbol{\phi}^i + \frac{k_{ab}}{2} \boldsymbol{A}_1{}^a D \boldsymbol{A}_1{}^b \right] \\
&+ \int_{\Pi T X} \left[f_{1a}{}^i(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{A}_1{}^a \boldsymbol{B}_{2,i} + \frac{1}{6} f_{2abc}(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{A}_1{}^a \boldsymbol{A}_1{}^b \boldsymbol{A}_1{}^c \right],
\end{aligned}
$$

$(S, S) = 0 \Longleftrightarrow$ two f's are structure functions of a Courant algebroid.

N.I. '02, Hofman, Park '02, Roytenberg '06

• Courant bracket

TM 上には自然に Lie bracket $[X,Y]$ が存在する。

$E = TM \oplus T^*M$ 上で、
Jacobi identity を満たすもっとも一般的な bilinear form を考える。それは Dorfman bracket $(X+\xi)\circ(Y+\eta) = [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - i_Y d\xi$ となる。これは Jacobi identity を満たすが反対称でない。ここで、$X, Y \in TM$, $\xi, \eta \in T^*M$

反対称化した $[X+\xi, Y+\eta]_C = [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\xi - \frac{1}{2}d(i_X\eta - i_Y\xi)$ を Courant bracket という。Courant bracket は Jacobi identity を満たさない。nonassociative

これを一般の vector bundle に一般化して、

Def: Courant algebroid Courant '90, Liu, Weinstein, Xu '96

A Courant algebroid is a vector bundle $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$ and has a nondegenerate symmetric bilinear form $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ on the bundle, a bilinear operation $\circ$ on $\Gamma(\mathcal{E})$(the space of sections on $\mathcal{E}$), an a bundle map $\rho : \mathcal{E} \to T\mathcal{M}$ satisfying the following properties:

$$
\begin{aligned}
&1, \quad e_1 \circ (e_2 \circ e_3) = (e_1 \circ e_2) \circ e_3 + e_2 \circ (e_1 \circ e_3),\\
&2, \quad \rho(e_1 \circ e_2) = [\rho(e_1), \rho(e_2)],\\
&3, \quad e_1 \circ F e_2 = F(e_1 \circ e_2) + (\rho(e_1)F)e_2,\\
&4, \quad e_1 \circ e_2 = \frac{1}{2}\mathcal{D}\langle e_1\,, e_2 \rangle,\\
&5, \quad \rho(e_1)\langle e_2\,, e_3 \rangle = \langle e_1 \circ e_2\,, e_3 \rangle + \langle e_2\,, e_1 \circ e_3 \rangle,
\end{aligned}
$$

where e_1, e_2 and e_3 are sections of $\mathcal{E}$, F is a function on $\mathcal{M}$. $\mathcal{D}$ is a map from functions on $\mathcal{M}$ to $\Gamma(\mathcal{E})$ and is defined as $\langle \mathcal{D}F\,, e\rangle = \rho(e)F$.

注）$\mathfrak{g}$を Lie 環とする。$\mathcal{M}$ =1 点、$\mathcal{E} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ のとき、Drinfeld double となる。

Def: $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ 上に括弧積

$$[X+\xi, Y+\eta]_D = [X,Y] + ad^*_\xi Y - ad^*_\eta X + ad^*_X \eta - ad^*_Y \xi + [\xi,\eta]^*$$

を入れたものを Drinfeld double という。

注）G に Poisson Lie structure があるとき、$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ を Heisenberg double という。

今の場合 AKSZ 形式で

$$
\begin{aligned}
&e_1 \circ e_2 \equiv ((S, e_1), e_2) \\
&\langle e_1 \, , e_2 \rangle \equiv (e_1, e_2) \\
&\rho(e)F \equiv (e, (S, F)) \\
&\mathcal{D}(*) \equiv (S, *)
\end{aligned}
$$

とすると、$(S, S) = 0 \Longleftrightarrow$ Courant algebroid

• Dirac structure

E の subbundle L がDirac structureとは、$e_1, e_2 \in \Gamma(L)$ に対して

$$\langle e_1\, , e_2 \rangle = 0 \quad \text{(isotropic)},$$
$$[e_1, e_2]_C \in \Gamma(L) \quad \text{(close)}$$

L は Lie algebroid

2次元 topological sigma model で実現できる。(2D Dirac sigma model)
この理論は nonlocal

Kotov, Schaller, Strobl, '04

• n =general
has a structure to the n-algebroid (Loday-algebroid).

§Generalized Complex Structure

• Complex Structure J

Def: M: d次元多様体上の線形変換$J : TM \longrightarrow TM$ が以下を満たすとき複素構造という。

1) $J^2 = -1$
2) $X, Y \in TM$ に対して$\Pi_{\mp}[\Pi_{\pm}X, \Pi_{\pm}Y] = 0$

ここで、$\Pi_{\pm}$ はJの$\pm\sqrt{-1}$固有バンドルへの projection.
$[\cdot,\cdot]$: Lie bracket

• Generalized Complex Structure $\mathcal{J}$

Def: M: d次元多様体上の線形変換$\mathcal{J}: TM \oplus T^*M \longrightarrow TM \oplus T^*M$ を考える。$X, Y \in TM, \xi, \eta \in T^*M$ とする。内積$\langle X+\xi\,, Y+\eta\rangle \equiv \frac{1}{2}(i_X\eta + i_Y\xi) = (\,X\ \xi\,)\mathcal{I}\begin{pmatrix} Y \\ \eta \end{pmatrix}$ と定義する。

$\mathcal{J}$が以下を満たすとき generalized complex structure という。

0) $\mathcal{J}$は$\langle X+\xi\,, Y+\eta\rangle$を保つ。
1) $\mathcal{J}^2 = -1$
2) $\Pi_{\mp}[\Pi_{\pm}(X+\xi), \Pi_{\pm}(Y+\eta)] = 0$

ここで、$\Pi_{\pm}$は$\mathcal{J}$の$\pm\sqrt{-1}$ 固有バンドルへの projection.
$[\cdot,\cdot]_C$: Courant bracket

注) $H \in \wedge^3 T^*M$を closed 3-form とする。2) で、$[\cdot,\cdot]_C$を$[\cdot,\cdot]_H = [\cdot,\cdot]_C + i_X i_Y H$

とするとき、twisted generalized complex structure という。

Decomposition to TM and T^*M of a generalized complex structure $\mathcal{J}$ is written as

$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J & P \\ Q & K \end{pmatrix}$ とする。

where $J \in C^\infty(TM \otimes T^*M)$, $P \in C^\infty(\wedge^2 TM)$, $Q \in C^\infty(\wedge^2 T^*M)$, $K \in C^\infty(T^*M \otimes TM)$.

$$
\begin{aligned}
&K_j{}^i = -J^i{}_j \\
&J^i{}_k J^k{}_j + P^{ik} Q_{kj} + \delta^i{}_j = 0, \\
&J^i{}_k P^{kj} + J^j{}_k P^{ki} = 0, \\
&Q_{ik} J^k{}_j + Q_{jk} J^k{}_i = 0, \\
&P^{ij} + P^{ji} = 0,
\end{aligned}
$$

$$Q_{ij} + Q_{ji} = 0. \tag{3}$$

$$\mathcal{A}^{ijk} = \mathcal{B}_i{}^{jk} = \mathcal{C}_{ij}{}^k = \mathcal{D}_{ijk} = 0, \tag{4}$$

where

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{ijk} &= P^{il}\partial_l P^{jk} + P^{jl}\partial_l P^{ki} + P^{kl}\partial_l P^{ij}, \\
\mathcal{B}_i{}^{jk} &= J^l{}_i \partial_l P^{jk} + P^{jl}(\partial_i J^k{}_l - \partial_l J^k{}_i) + P^{kl}\partial_l J^j{}_i - J^j{}_l \partial_i P^{lk}, \\
\mathcal{C}_{ij}{}^k &= J^l{}_i \partial_l J^k{}_j - J^l{}_j \partial_l J^k{}_i - J^k{}_l \partial_i J^l{}_j + J^k{}_l \partial_j J^l{}_i \\
&\quad + P^{kl}(\partial_l Q_{ij} + \partial_i Q_{jl} + \partial_j Q_{li}), \\
\mathcal{D}_{ijk} &= J^l{}_i(\partial_l Q_{jk} + \partial_k Q_{lj}) + J^l{}_j(\partial_l Q_{ki} + \partial_i Q_{lk}) \\
&\quad + J^l{}_k(\partial_l Q_{ij} + \partial_j Q_{li}) - Q_{jl}\partial_i J^l{}_k - Q_{kl}\partial_j J^l{}_i - Q_{il}\partial_k J^l{}_j.
\end{aligned}$$

Special Case

(1) $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -{}^tJ \end{pmatrix}$ then J: a complex structure.

(2) $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -Q^{-1} \\ Q & 0 \end{pmatrix}$ then Q: a symplectic structure.

Theorem: generalized complex structure は、$(TM \oplus T^*M) \otimes \boldsymbol{C}$ 上の Dirac structure である。

§Topological Sigma Models with a Generalized Complex Structure

Candidate Zucchini model Zucchini '04

$$S_Z = \frac{1}{2}\int_{\Pi T\Sigma}(\, \boldsymbol{\phi}\ \boldsymbol{B}_1\,)\mathcal{I}(1+\mathcal{J})\begin{pmatrix}\boldsymbol{\phi}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$
$$= \int_{\Pi T\Sigma}\boldsymbol{B}_{1i}D\boldsymbol{\phi}^i + J^i{}_j\boldsymbol{B}_{1i}D\boldsymbol{\phi}^j + \frac{1}{2}P^{ij}\boldsymbol{B}_{1i}\boldsymbol{B}_{1j} + \frac{1}{2}Q_{ij}d\boldsymbol{\phi}^i d\boldsymbol{\phi}^j$$

is a first AKSZ action with a generalized complex structure

But,

$$\begin{cases}\text{Zucchini model} \xrightarrow{\text{Kähler}} \text{A model} \\ \text{Zucchini model} \ \overset{\text{complex}}{\not\longrightarrow}\ \text{B model}\end{cases}$$

さらに GCS の4つの可積分条件のうち $\mathcal{A}^{ijk} = \mathcal{B}_i{}^{jk} = \mathcal{C}_{ij}{}^{k} = 0$, の3つしか導出できない。

We want

$$\exists\text{generalized complex sigma model}\begin{cases}\xrightarrow{\text{Kähler}} \text{A model}\\ \xrightarrow{\text{complex}} \text{B model}\end{cases}$$

Pestun Model

Pestun '06

But is is nonlocal and complicated.

3D Model

今、boundary のある3次元多様体 X を考え、boundary の2次元多様体をΣとする。($\Sigma = \partial X$)

X 上で Gゲージ群とするChern-Simons gauge theory を考えると、Σ 上で G を target とする WZW modelが構成できる。

これを拡張して、X 上の generalized complex structure を持った topological field theory で、Σ 上で、Zucchini modelとなる理論を見つける。

答えは、

3D topological sigma model with a generalized complex structure on $TM \oplus T^*M$ $(H=0)$: N.I. '04

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\Pi TX} -\langle 0 + \boldsymbol{B}_2, D(\boldsymbol{\phi} + 0)\rangle + \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1, D(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1)\rangle \\
&\quad -\langle 0 + \boldsymbol{B}_2, \mathcal{J}(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1)\rangle - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_1^i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\phi}^i}(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1)\rangle \\
&= \int_{\Pi TX} -\boldsymbol{B}_{2i} d\boldsymbol{\phi}^i + \boldsymbol{B}_{1i} d\boldsymbol{A}_1^i - J^i{}_j \boldsymbol{B}_{2i} \boldsymbol{A}_1^j - P^{ij} \boldsymbol{B}_{2i} \boldsymbol{B}_{1j} \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial Q_{jk}}{\partial \boldsymbol{\phi}^i} \boldsymbol{A}_1^i \boldsymbol{A}_1^j \boldsymbol{A}_1^k + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial J^k{}_j}{\partial \boldsymbol{\phi}^i} + \frac{\partial J^k{}_i}{\partial \boldsymbol{\phi}^j}\right) \boldsymbol{A}_1^i \boldsymbol{A}_1^j \boldsymbol{B}_{1k} + \frac{1}{2}\frac{\partial P^{jk}}{\partial \boldsymbol{\phi}^i} \boldsymbol{A}_1^i \boldsymbol{B}_{1j} \boldsymbol{B}_{1k}.
\end{aligned}
$$

is derived by setting,

$$
\boldsymbol{A}_1 \longrightarrow \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1, \quad \boldsymbol{\phi} \longrightarrow \boldsymbol{\phi} + 0, \quad \boldsymbol{B}_2 \longrightarrow 0 + \boldsymbol{B}_2,
$$

$$f_1 \longrightarrow -\mathcal{J}, \quad f_2 \longrightarrow -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\phi}^i} + 0$$

in the Courant sigma model.

$(S, S) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{J}$ is a generalized complex structure.

§AKSZ Formalism of Topological Membranes

X: a manifold in n dimensions (worldsheet or worldvolume)
M: a manifold in d dimensions (target space)
a map $\phi : X \longrightarrow M$

The AKSZ Formalism of the Batalin-Vilkovisky formalism is formulated by three elements,

- Supermanifold (Superfield Φ)
- P-structure (Antibracket $(*, *)$)
- Q-structure (BV action S)

Alexandrov, Kontsevich, Schwartz, Zaboronsky '97

- Supermanifold (Superfield)

∘ X to supermanifold

TX: a tangent bundle
ΠTX: A *supermanifold* is a tangent bundle with reversed parity of the fiber.

· local coordinates
$\{\sigma^\mu\}$ on X, where $\mu = 1, 2, \cdots, n$
$\{\theta^\mu\}$ on $T_\sigma X$, fermionic supercoordinate

Def: **form degree** $\deg \sigma = 0$ and $\deg \theta = 1$

We extend a smooth map $\phi : X \longrightarrow M$ to a map $\boldsymbol{\phi} : \Pi TX \longrightarrow M$.

This procedure introduces ghosts and antifields systematically. A function on ΠTX is called a *superfield*.

$$\boldsymbol{\phi}^i = \phi^{(0)i} + \theta^{\mu_1}\phi^{(-1)i}_{\mu_1} + \frac{1}{2!}\theta^{\mu_1}\theta^{\mu_2}\phi^{(-2)i}_{\mu_1\mu_2} + \cdots + \frac{1}{n!}\theta^{\mu_1}\cdots\theta^{\mu_n}\phi^{(-n)i}_{\mu_1\cdots\mu_n}.$$

∘ M to supermanifold (a graded manifold)

We introduce superfield pairs with the nonnegative total degrees and with the sum of the **total degree** $n-1$.

$\{\boldsymbol{A}_p{}^{a_p},\ \boldsymbol{B}_{n-p-1,a_p}\}$, $p=0,1,\cdots,\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$

1. T^*M: a cotangent bundle
$T^*[n-1]M$: A *graded cotangent bundle* is a cotangent bundle with the degree of the fiber $n-1$.

· local coordinates $\{\boldsymbol{\phi}^i, \boldsymbol{B}_{n-1,i}\}$
$\{\boldsymbol{\phi}^i = \boldsymbol{A}_0{}^i\}$: a map from ΠTX to M, where $i = 1, 2, \cdots, d$.
$\{\boldsymbol{B}_{n-1,i}\}$: a superfield on ΠTX, which take a value on $\boldsymbol{\phi}^*(T^*[n-1]M)$

p even $\Longrightarrow \{\boldsymbol{B}_{p,i}\}$ bosonic, p odd $\Longrightarrow \{\boldsymbol{B}_{p,i}\}$ fermionic

Def: **total degree**: $|\boldsymbol{\phi}| = 0$ and $|\boldsymbol{B}_{n-1}| = n-1$

Def: **ghost number**: $\mathrm{gh}F = |F| - \mathrm{deg}F$, where F is a superfield.

2. E: a vector bundle on M
$E_p[p]$: a vector bundle with the degree of the fiber p

We consider $E_p[p] \oplus E_p^*[n-p-1]$: p is an integer with $1 \leq p \leq n-2$.
· local coordinates $\{\boldsymbol{A}_p{}^{a_p}, \boldsymbol{B}_{n-p-1,a_p}\}$
$\boldsymbol{A}_p{}^{a_p}$: a total degree p superfield on ΠTX, which take a value on $\boldsymbol{\phi}^*(E[p])$
$\boldsymbol{B}_{n-p-1,a_p}$: a total degree $n-p-1$ superfield on ΠTX, which take a value on $\boldsymbol{\phi}^*(E^*[n-p-1])$

$\lfloor x \rfloor$: the floor function which gives the largest integer less than or equal to $x \in \boldsymbol{R}$.

If $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq p \leq n-2$, we can identify $E[p] \oplus E^*[n-p-1]$ with the dual bundle $E^*[n-p-1] \oplus (E^*)^*[p]$, We consider graded bundle,

$$T^*[n-1]\left(\sum_{p=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} E_p[p]\right),$$

$\{\boldsymbol{A}_p{}^{a_p},\ \boldsymbol{B}_{n-p-1,a_p}\}$, $p = 0, 1, \cdots, \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ in the local coordinate expression

$n = 2$

$$T^*[1]M.$$

• P-structure $\mathcal{A} = \mathrm{Map}(\Pi TX \longrightarrow T^*[n-1]\left(\sum_{p=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} E_p[p]\right))$ とする。

Def: $Hom(\sum_k \mathcal{A}^{\otimes k}, \mathcal{A})$ 上の線形変換

$$\Delta = (-1)^p \sum_{p=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \left\langle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}_p}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}_{n-p-1}} \right\rangle$$

は自動的に $\Delta^2 = 0$である。これを odd Laplace operator という。

このとき、$F, G \in Hom(\sum_k \mathcal{A}^{\otimes k}, \mathcal{A})$ に対してantibracket は

$$\begin{aligned}(F,G) = \Omega^{-1}(F,G) &\equiv (-1)^{(n+1)|F|}\Delta(FG) - (-1)^{(n+1)|F|}\Delta(F)G - (-1)^{n|F|}F\Delta(G) \\ &= \sum_p \left\langle F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{A}_p}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}_{n-p-1}}G \right\rangle - (-1)^{np}\left\langle F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}_{n-p-1}}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{A}_p}G \right\rangle.\end{aligned}$$

その性質は

$$
\begin{aligned}
&(F, G) = -(-1)^{(|F|+1-n)(|G|+1-n)}(G, F), \\
&(F, GH) = (F, G)H + (-1)^{(|F|+1-n)|G|}G(F, H), \\
&(FG, H) = F(G, H) + (-1)^{|G|(|H|+1-n)}(F, H)G, \\
&(-1)^{(|F|+1-n)(|H|+1-n)}(F, (G, H)) + \text{cyclic permutations} = 0,
\end{aligned}
$$

これを degree $-n+1$ の Loday bracket という。

• Q-structure called a *BV action* S is S which satisfies the classical master equation $(S, S) = 0$.

We require $|S| = 0$.

$\delta F = (S, F)$: a *BRST transformation*, satisfies $\delta^2 = 0$.

§Summary and Outlook

A model 的拡張:

$\dim X = 2$ Lie algebroid, (symplectic, Poisson) groupoid

$\dim X = 3$ Courant algebroid, gerbe

$\dim X = n$ (?)

B model 的拡張:

$\dim X = 2$ complex structure

$\dim X = 3$ generalized complex structure

$\dim X = n$ (?)

• これからの問題

ある「数学的構造」から topological field theory を作ると、少なくとも物理としては量子化できる。するとその「数学的構造」が「量子化」される。

だが、少数の場合を除いて、有限の意味のある量を出してきたり、それが何か？の特徴づけはできていない。

- Review

シンプレクティック幾何学 深谷賢治 岩波書店

String theory and deformation quantization, Yoshiaki Maeda, Hiroshige Kajiura

Derived brackets, Yvette Kosmann-Schwarzbach, Lett.Math.Phys. 69 (2004) 61-87, math.DG/0312524