数学 IV 小テスト 1

問題 1. 次の n 次正方行列 A_n について問題に答えよ.

(1) A_n の行列式を計算せよ.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x & \cdots & x & 1 & x \\ x & \cdots & \cdots & x & 1 \end{pmatrix}$$

(2) A_3 が逆行列をもつとき, その逆行列を求めよ.

(解答例)

すべての列を第 1 列にたすと、

$$|A_n| = |\begin{pmatrix} 1+(n-1)x & x & x & \cdots & x \\ 1+(n-1)x & 1 & x & \cdots & x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1+(n-1)x & \cdots & x & 1 & x \\ 1+(n-1)x & \cdots & \cdots & x & 1 \end{pmatrix}|$$

$$= (1+(n-1)x)|\begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & 1 & x & \cdots & x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & x & 1 & x \\ 1 & \cdots & \cdots & x & 1 \end{pmatrix}|$$

$$= (1+(n-1)x)|\begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x & 1-x & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-x \end{pmatrix}|$$

$$= (1+(n-1)x)(1-x)^{n-1}$$

(2) 計算をして

$$A_3^{-1} = \frac{1}{(1-x)^2(2x+1)} \begin{pmatrix} 1-x^2 & x^2-x & x^2-x \\ x^2-x & 1-x^2 & x^2-x \\ x^2-x & x^2-x & 1-x^2 \end{pmatrix}$$

□

問題 2. (1) 次の置換 σ を互換の積に表せ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) n 次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ と $\tau \in S_n$ に対して,

$$A^\tau = (\mathbf{a}_{\tau(1)}, \mathbf{a}_{\tau(2)}, \ldots, \mathbf{a}_{\tau(n)})$$

と定義する.

(i) (1) の σ に対して E_6^σ の行列を書け.

(ii) $\det(E_6^\sigma)$ を計算せよ.

(解答例)

(1) $\sigma = (14)(25)(36)$

(2)(i)

e_i $(1 \leq i \leq 6)$ を $\mathbf{R}^6$ の標準基底とすると,

$$E_6 = (e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6).$$

よって

$$\begin{aligned} E_6 &= (e_{\sigma(1)}\ e_{\sigma(2)}\ e_{\sigma(3)}\ e_{\sigma(4)}\ e_{\sigma(5)}\ e_{\sigma(6)}) \\ &= (e_4\ e_5\ e_6\ e_1\ e_2\ e_3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) 定理 2.3(p80) より, $\det(E_6^\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)\det(E_6) = -1.$ □

問題 3. (おまけ) 次の n 次正方行列 B の行列式を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(解答例) n 次行列 B を B_n とおいて, 関係式

$$|B_n| = |B_{n-1}| - |B_{n-2}| \ (n \geq 3)$$

に気が付けば終わり.

$$\begin{cases} |B_1| = 1 \\ |B_2| = 0 \\ |B_{3n}| = (-1)^n & (n = 1, 2, \dots) \\ |B_{3n+1}| = (-1)^n & (n = 1, 2, \dots) \\ |B_{3n+2}| = 0 & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

$\square$