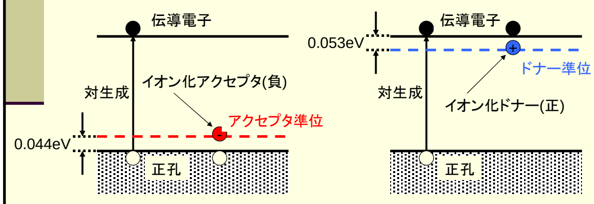
半導体工学(5)

半導体のキャリア(1)

電子情報デザイン学科　藤野　毅

不純物半導体のエネルギー帯図(復習)

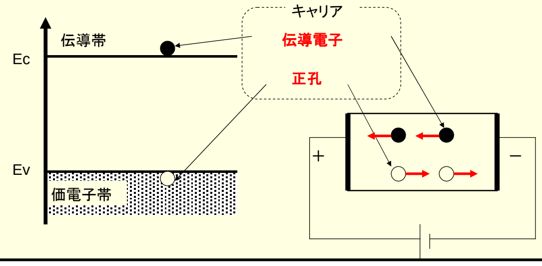
- P型：BのようなIII族の不純物は
  アクセプタとなって正孔(正電荷キャリア)が発生
- N型：AsのようなV族の不純物は
  ドナーとなって伝導電子(負電荷キャリア)が発生



電荷輸送とキャリア密度

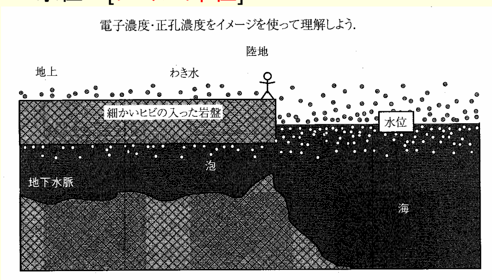
- キャリアの濃度は(1)(2)から求められる.

(1)あるエネルギーに存在できる準位の密度:[状態密度]
(2)それぞれのエネルギー準位に存在できる[分布関数]:
　分布関数の指標として使用するのが[フェルミ準位]



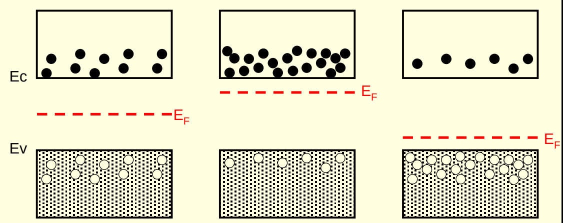
フェルミ準位と水位のアナロジー

- わき水⇒[伝導電子]
- 泡⇒[正孔]
- 水位⇒[フェルミ準位]



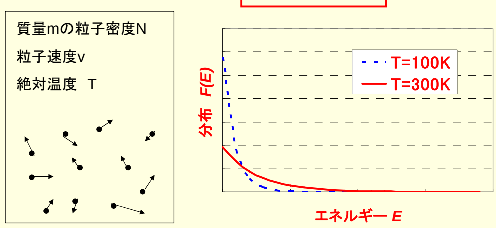
フェルミ準位とキャリア密度

- フェルミ準位が高い(水位が高い)場合
  - 伝導電子密度(わき水)は[増加する]
  - 正孔密度(泡)は[減少する]



マックスウェル・ボルツマン分布

- 熱平衡状態にある粒子の分布 $\boxed{F(E) \propto \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)}$

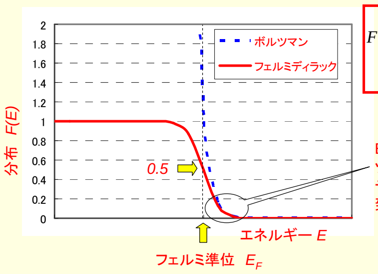


分子の平均エネルギー $\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T}$

ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} [J/K]$

フェルミ・ディラックの分布

- 粒子がパウリの排他律に従う場合のエネルギー分布



$$F(E)=\frac{1}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)}$$ (3･2)

$E-E_F >> k_BT$ではボルツマン分布とフェルミディラックの分布は一致する

7

練習問題

- T=300Kにおけるk_BTは何eVになるかを求めよ。
  $k_BT/q=1.38e^{-23}X300/1.6e^{-19}=0.026$ [eV]

- $E-E_F >> k_BT$ならば，フェルミ・ディラックの分布関数は，マックスウエル・ボルツマンの分布関数で近似できることを証明せよ．

$E-E_F >> k_BT$より，$\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)>>1$

$$F(E)=\frac{1}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)}\cong\frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)}=\exp\left(-\frac{E-E_F}{k_BT}\right)$$ (3･3)

マックスウェルボルツマン型

8

練習問題

- フェルミ・ディラックの分布関数
  $f(E)=1/\{1+\exp\{(E-E_F)/k_BT\}$　に関して
  $1-f(E)=1/\{1+\exp\{(E_F-E)/k_BT\}$になることを証明せよ．

$$1-F(E)=1-\frac{1}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)}=\frac{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)-1}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)}=\frac{\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)}$$

$$=\frac{1}{\exp\left(\frac{E_F-E}{k_BT}\right)+1}=\frac{1}{1+\exp\left(\frac{E_F-E}{k_BT}\right)}$$

正負反対！

分母・分子に $\exp\left(\frac{E_F-E}{k_BT}\right)$ をかけた．

9

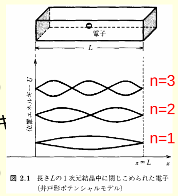
状態密度関数の導出(1)

- 位置エネルギーUは0≦x≦Lで0, x<0およびL<xで∞
- 速度vで運動している電子の波長λは
  [λ=h/mv]なので，電子を波動として考えると，波が0～Lの区間内に存在するためには右図からわかるようにLがλ/2の整数倍でなければならない．

$$L=\frac{1}{2}\lambda n=\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{mv}\cdot n$$ (3･01)

- このときの電子のエネルギーEnは位置エネルギU=0なので

$$E_n=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2m}(mv)^2=\frac{1}{2m}\cdot\left(\frac{h}{2L}\right)^2\cdot n^2$$ (3･02)



- 一辺の長さがLの立方体に拡張して考えると
  $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$　なので

$$E_n=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2m}\cdot\left(\frac{h}{2L}\right)^2\cdot(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$$ (3･03)

（ただし，nx, ny, nzは1,2,3･･･の整数である）

10

状態密度関数の導出(2)

- パウリの排他律により，(n_x, n_y, n_z)の1組に対してスピンの異なる2つ状態があるため，エネルギーが0からEまでの間にある状態の総数をN(E)とすればn_x, n_y, n_zが正の整数であることから

$$N(E)=2\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi\left\{2m\left(\frac{2L}{h}\right)^2\cdot E\right\}^{\frac{3}{2}}$$ (3･04)

- ここで，EからE+dEの間にある状態数をZ(E)dEとすれば，Z(E)は

$$Z(E)=\frac{dN(E)}{dE}=\frac{\pi}{2}\cdot\left\{2m\left(\frac{2L}{h}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\cdot E^{\frac{1}{2}}$$ (3･05)

- 伝導帯の電子密度$N_n(E)$について考えるとZ(E)の式において，
  E→E-Ec，L=1となるので

$$N_n(E)=4\pi\cdot\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(E-Ec)^{\frac{1}{2}}$$ (3･1)

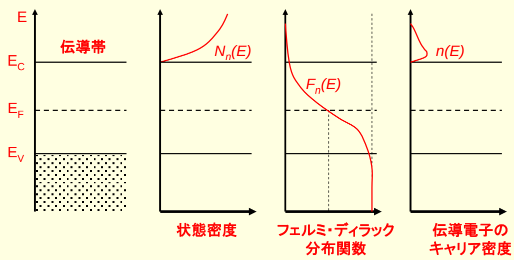
11

キャリア密度の計算(1)

- 伝導帯における伝導電子のキャリア密度n(E)

$$n(E)=N_n(E)\cdot F_n(E)$$ (3･4)

状態密度　フェルミ・ディラック分布関数



12

補足図面

■ 伝導帯近傍の拡大図

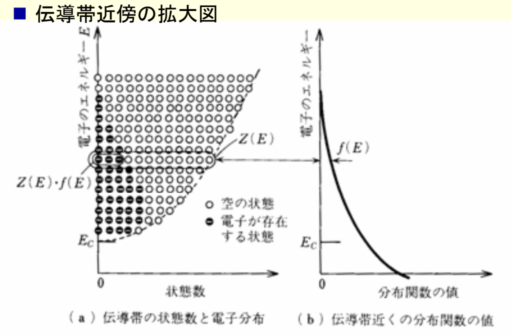


図 2.6 伝導帯の状態密度と電子分布の関係。電子濃度は状態密度と分布関数の積。

13

キャリア密度の計算(2)伝導電子

状態密度

$$N_n(E)=4\pi\cdot\left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(E-Ec)^{\frac{1}{2}} \quad (3\cdot1)$$

フェルミディラック分布

$$F_n(E)=\frac{1}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)} \quad (3\cdot2)$$

■ 単位体積あたりの伝導電子の個数（伝導電子密度n）

$$n=\int_{E_c}^{\infty}N_n(E)\cdot F_n(E)\quad dE$$

■ これを解くと

重要！

$$n=2\left(\frac{2\pi m_e k_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\exp\left(\frac{E_F-E_C}{k_BT}\right)=\boxed{N_C\cdot\exp\left(\frac{E_F-E_C}{k_BT}\right)} \quad (3\cdot5)$$

$$N_C=2\left(\frac{2\pi\cdot m_e\cdot k_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

N_C:伝導帯の実効状態密度
m_e:電子の有効質量

14

(3・5)式導出

$$n=4\pi\left(\frac{2\cdot m_e}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\int_{E_C}^{\infty}\left\{(E-E_C)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{E_F-E}{k_BT}\right)\right\}dE$$

$$\frac{E-E_C}{k_BT}=x^2$$
$$dE=k_BT\cdot2x\cdot dx$$

$$=4\pi\left(\frac{2\cdot m_e}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\int_0^{\infty}\left\{\sqrt{k_BT}\cdot x\cdot\exp\left(\frac{E_F-E_C}{k_BT}\right)\cdot\exp(-x^2)\cdot k_BT\cdot2x\right\}dx$$

$$=4\pi\left(\frac{2\cdot m_e}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(k_BT)^{\frac{3}{2}}\cdot\exp\left(\frac{E_F-E_C}{k_BT}\right)\int_0^{\infty}\{2x^2\cdot\exp(-x^2)\}dx$$

$$=2\left(\frac{2\pi\cdot m_e\cdot k_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\exp\left(\frac{E_F-E_C}{k_BT}\right)$$

$$\int_0^{\infty}\{x^2\cdot\exp(-x^2)\}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

15

$\int_0^{\infty}\{x^2\cdot\exp(-x^2)\}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ の導出

$$\int f'(x)\cdot g(x)dx=f(x)\cdot g(x)+\int f(x)\cdot g'(x)dx$$

$$f'(x)=xe^{-x^2},\ g(x)=x$$

$$f(x)=-\frac{e^{-x^2}}{2},\ g'(x)=1$$

$$\int_0^{\infty}\{x^2\cdot e^{-x^2}\}dx=\left[-x\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\left\{\frac{e^{-x^2}}{2}\right\}dx=\int_0^{\infty}\left\{\frac{e^{-x^2}}{2}\right\}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

16

$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ の導出

■ガウス関数exp(-x²)は良く使用されるので積分は覚えておいたほうがよい

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy}=\sqrt{\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

極座標変換

$$x=r\cdot\sin\theta,\ y=r\cdot\cos\theta$$
$$x^2+y^2=r^2,\ dx\cdot dy=r\cdot d\theta\cdot dr$$

$$\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}r\cdot e^{-r^2}drd\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}r\cdot e^{-r^2}drd\theta=[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{4}$$

17

キャリア密度の計算(3)正孔

状態密度

$$N_p(E)=4\pi\cdot\left(\frac{2m_h}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(E_V-E)^{\frac{1}{2}} \quad (3\cdot6)$$

フェルミディラック分布

$$F_p(E)=1-F_n(E) \quad (3\cdot7)$$

■ 単位体積あたりの伝導電子の個数（伝導電子密度n）

$$p=\int_{-\infty}^{E_V}N_p(E)\cdot F_p(E)\quad dE$$

■ これを解くと

重要！

$$p=2\left(\frac{2\pi m_h k_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\exp\left(\frac{E_V-E_F}{k_BT}\right)=\boxed{N_V\cdot\exp\left(\frac{E_V-E_F}{k_BT}\right)} \quad (3\cdot9)$$

$$N_V=2\left(\frac{2\pi\cdot m_h\cdot k_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

N_V:価電子帯の実効状態密度
m_h:正孔の有効質量

18

有効質量とは？

- 半導体中で電子は波として扱われるので，真空中の質量とは異なった値をもつ．これを有効質量と呼びm^*と表す．
- 正孔は，正確には，負の質量を持った電子(負電荷)であるが，取り扱いを簡単にするために正の電荷，正の質量をもった「電子の抜け穴⇒正孔」として取り扱っている
- 電子の有効質量はm_e^* ,電子の有効質量はm_h^*で表わす

＊各種半導体の有効質量の例

	有効質量 m*/m$_0$		
	Ge	Si	GaAs
電子	0.55	0.40	0.08
正孔	0.37	0.58	0.5

真性半導体のキャリア密度n_i

- 不純物を含まない真性半導体においては，伝導電子と正孔は対生成されるため，密度は同じ.

$$n_i = \underbrace{N_C \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_C}{k_B T}\right)}_{\text{電子密度n(3・5)}} = \underbrace{N_V \cdot \exp\left(\frac{E_V - E_F}{k_B T}\right)}_{\text{正孔密度p(3・9)}} \quad \text{(3・91)}$$

$$N_C \cdot \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) \cdot \exp\left(\frac{-E_C}{k_B T}\right) = N_V \cdot \exp\left(-\frac{E_F}{k_B T}\right) \cdot \exp\left(\frac{E_V}{k_B T}\right)$$

$$N_C \cdot \exp\left(\frac{2E_F}{k_B T}\right) = N_V \cdot \exp\left(\frac{E_C + E_V}{k_B T}\right)$$

ルートを取る変形

$$\boxed{\sqrt{N_C} \cdot \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right)} = \sqrt{N_V} \cdot \exp\left(\frac{E_C + E_V}{2k_B T}\right) \quad \text{(3・92)}$$

代入

$$n_i = N_C \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_C}{k_B T}\right) = \sqrt{N_C \cdot N_V} \cdot \exp\left(\frac{E_C + E_V}{2k_B T}\right) \cdot \exp\left(\frac{-E_C}{k_B T}\right)$$

$$= \sqrt{N_C \cdot N_V} \cdot \exp\left(\frac{-E_C + E_V}{2k_B T}\right) = \sqrt{N_C \cdot N_V} \cdot \exp\left(-\frac{E_G}{2k_B T}\right) \approx \boxed{1.5 \times 10^{-16} [m^{-3}]}$$

(3・10)

覚える！

真性半導体のフェルミ準位E_i

- (3・92)より

$$\sqrt{N_C} \cdot \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) = \sqrt{N_V} \cdot \exp\left(\frac{E_C + E_V}{2k_B T}\right)$$

- 両辺の自然対数lnをとり，E_Fについて解くと

$$\frac{1}{2}\ln(N_C) + \frac{E_F}{k_B T} = \frac{1}{2}\ln(N_V) + \frac{E_C + E_V}{2k_B T}$$

$$\therefore\ E_F = k_B T \cdot \left\{\frac{\ln(N_V) - \ln(N_C)}{2} + \frac{E_C + E_V}{2k_B T}\right\} = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{k_B T}{2}\ln\left(\frac{N_V}{N_C}\right)$$

(3・10)

$$\left.\begin{array}{l} N_C = 2\left(\dfrac{2\pi \cdot m_e \cdot k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ N_V = 2\left(\dfrac{2\pi \cdot m_h \cdot k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \end{array}\right\} \frac{k_B T}{2}\ln\left(\frac{N_V}{N_C}\right) = \frac{k_B T}{2}\frac{3}{2}\ln\left(\frac{m_h^*}{m_e^*}\right) << \frac{E_C + E_V}{2}$$

$$\boxed{E_i = E_F \approx \frac{E_C + E_V}{2}} \quad \text{(3・11)}$$

覚える！