

図1に示すような、単スリットの問題をちゃんと考えてみましょう。  
スリットの間隔  $a$  を  $N$  等分しましょう (分割幅  $\Delta x = a/N$ )。

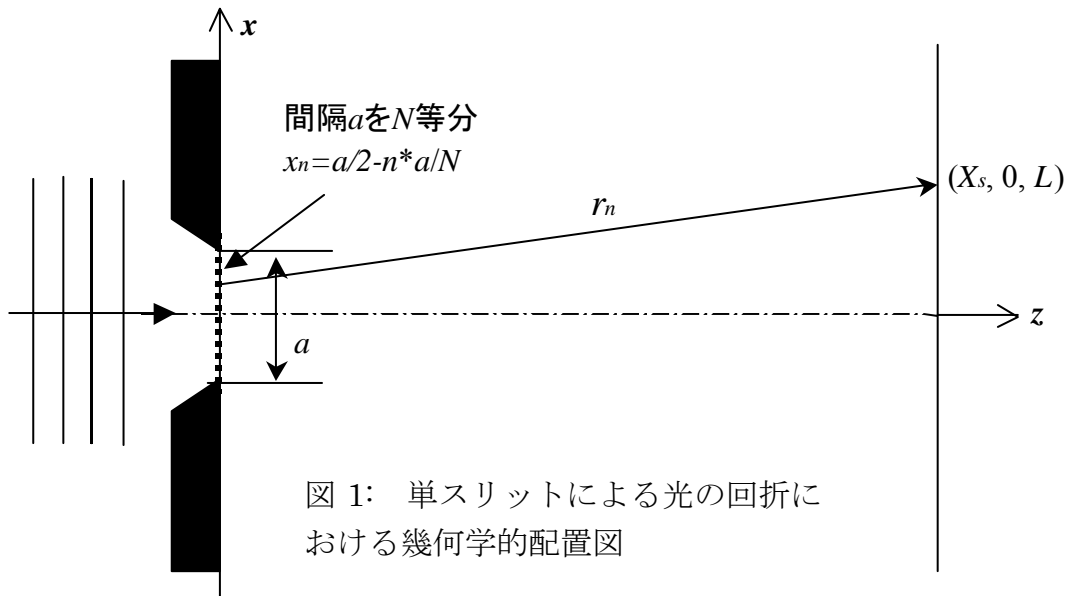


図1: 単スリットによる光の回折における幾何学的配置図

まず、単スリット上でのある位置  $x_n$  とスクリーン上の座標  $(X_s, 0, L)$  との距離  $r_n$  は、次のように表せます。

$$\begin{aligned}
 r_n &= \sqrt{L^2 + (X_s - x_n)^2} \\
 &= L \sqrt{1 + \left(\frac{X_s - x_n}{L}\right)^2} \\
 &\sim L \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{X_s - x_n}{L}\right)^2\right) \\
 &= L + \frac{1}{2L} (X_s - x_n)^2 \\
 &= \left(L + \frac{X_s^2}{2L}\right) - \frac{X_s}{L} \cdot x_n + \frac{x_n^2}{2L} \\
 &\rightarrow \left(L + \frac{X_s^2}{2L}\right) - \frac{X_s}{L} \cdot x_n
 \end{aligned}$$

2 次以上の微小量を無視  
( $\rightarrow$ フラウンホーファー近似)

あとは、あるスクリーン上の点( $X_s, 0, L$ )での回折強度  $I_s$  は、たくさんの素源点からの素源波(球面波)を重ね合わせる(←つまり、 $n$ に関する和をとること!)だけなので、次のように計算できます。

$$\begin{aligned}
 I_s &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} \frac{\exp\left[ik\left\{\left(L - \frac{X_s^2}{2L}\right) - \frac{X_s}{L} \cdot n \frac{a}{N}\right\}\right]}{r} \\
 &= \frac{1}{R} N \exp\left[ik\left\{L - \frac{X_s^2}{2L}\right\}\right] \sum_{n=-N/2}^{N/2} \exp\left[ik \cdot \frac{X_s}{L} \cdot n \frac{a}{N}\right] \\
 &\propto \sum_{n=-N/2}^{N/2} \exp\left[ik \cdot \frac{X_s}{L} \cdot n \frac{a}{N}\right]
 \end{aligned}$$

分母の  $r$  は、桁違いに大きいので、定数として外に出しました。これは、結局球面波から平面波にしまっていることを意味しますね。

この部分は、ちゃんと光路差になっていますよね。  
( $k$ を掛けると位相差になります)

最後に、 $a/N$ がゼロの極限をとると積分にすることができますので、最後のきれいな形まで手で計算することができます。

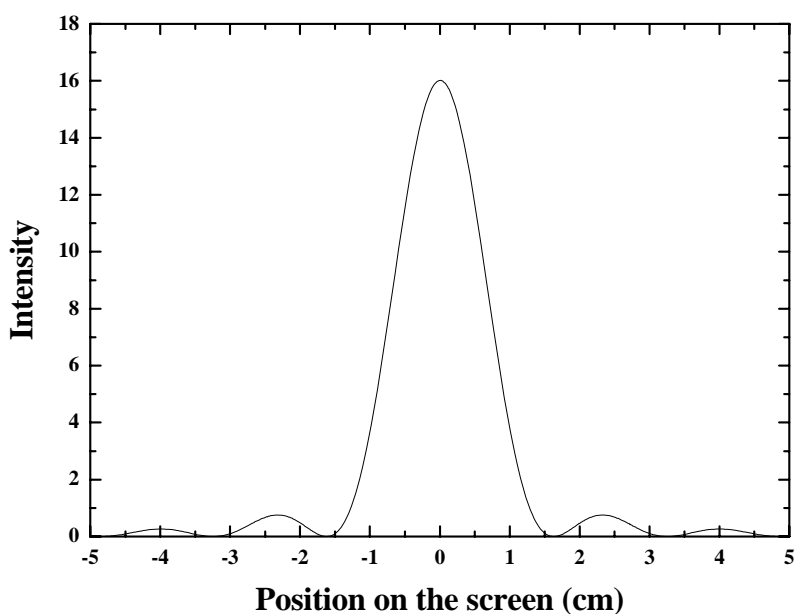
$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \exp\left[ik \cdot \frac{X_s}{L} \cdot n \frac{a}{N}\right] \\
 &= \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik \frac{X_s}{L} x} dx \\
 &= 2 \int_0^{a/2} \cos\left(k \frac{X_s}{L} \cdot x\right) dx \\
 &= a \cdot \frac{\sin\left(\frac{kX_s a}{2L}\right)}{\frac{kX_s a}{2L}} \rightarrow \frac{\sin \beta}{\beta}
 \end{aligned}$$

分割幅をゼロに近づけた和は、積分にすることができます。

となります。結構きれいな形なので、簡単に覚えることができます。この関数形は、**FORTTRAN**でグラフが描ける皆さんは、簡単に表示できるはずです。スクリーン上での強度を表したものですので、横軸は  $X_s$  で描かせればよいのです。つまり、微小な  $dX_s$  を適当に決めておいて、それぞれに対して最後の式の値をプロットします。

以前のプリントにも載せてありますが、先ほど得られた関数のグラフを示しましょう。条件としては、先週レーザーによる実験をやった幾何学的配置としましょう。つまり、

$L = 500 \text{ cm}$   
 $\lambda = 650 \text{ nm}$ (赤色),  $530 \text{ nm}$ (緑色)  
 $k$ としては、 $k = 2\pi/\lambda$   
 $a = 0.2 \text{ mm}$  (←今日やる条件のスリット)



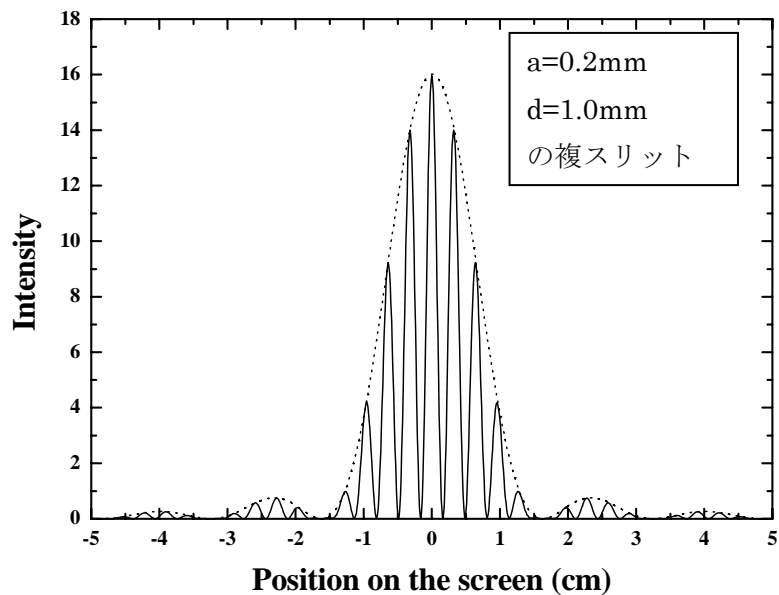
得られた、回折パターンとよく見比べて見てください。

こんな感じ？

では、複スリットでは、どんな回折パターンが得られましたか？



それは、こんな感じのようにも見えますし、ちょっと違うようにも見えます。単スリット間隔  $d$  が  $1 \text{ mm}$  として回折強度をシミュレーションすると、次のグラフのようになります。



包絡線は単スリットの強度分布と同じというところに気づきましたか？もし余裕のある人は、単スリットでの計算と同様に、複スリットの回折関数を導き出して見てください。最終結果を見ると、似ている理由が分かるはずです。

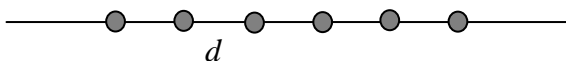
今までやってきたことを総合して考えると、いろいろなことが分かってきます。例えば、

- ① 単スリットの間隔  $a$  を広くすると上のグラフはどのように変わるでしょう？  
*hint:* 単スリット間隔  $a$  は上のグラフの包絡線(点線)とどのような関係がありましたか？

逆に、 $a$  をゼロの極限に持っていくとどのようなグラフになるでしょう？

- ② では、複スリット間隔  $d$  を狭くしていくとどうですか？

いわゆる格子を組む原子(結晶)による波の回折では、 $a$  が無限小でかつ  $d$  という間隔で原子が並んでいる回折格子のように考えればよいことに気がつきます。



最後に、今までの流れで、結晶による波の回折を考えてみましょう。ある距離に置いたスクリーン上で観測される回折パターンは、各原子からの位相( $\cos$ の中身の  $kx$  の部分)の異なる(素源)波の足し合わせで表すことができます。

例えば、原子が2つしかない場合、すでに皆さんはその結果を知っています。まさに、位相の異なる2つの波の足し合わせ！(シミュレーションしましたね。) 原子が3つの場合もやりました！(←間に1つ小さいものが出た)。原子の数がもっともっと多い場合、どのような回折パターンが得られるか、想像するに難くないと思います。きっとある方向に非常に局在した波が出現するはずです。それをスクリーン上に映し出したものが、「回折パターン」とよばれるものです。

このセミナーでは、基本的な波の性質を学び、自らシミュレーションをして波のもっとも重要な性質について理解を深めました。さらに、レーザーを用いた実験とその解析によりその性質を実感できたと思います。そこで、最後に今までの成果をレポートにまとめてほしいと思います。最低でも、コンピュータシミュレーションのときに出力したグラフとその条件、あと考察で一言(以下のキーワードを参考に)付け加えて提出したらよいと思います。もし、余裕があれば、最後のレーザーによる回折実験に関してもまとめられたら良いです。

キーワード：

- ・ 平面進行波
- ・ 位相の異なる2つの波の重ね合わせ(→うなり、群速度と位相速度)
- ・ 位相の異なる多数の波の重ね合わせと波束の形成
- ・ 波の不確定性関係
- ・ 波の干渉と回折