

# 知能科学：チューリングマシン

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

# 講義の流れ

- 1 チューリング
- 2 チューリングマシン
- 3 動作例
  - 加算
  - 数える
  - 最大公約数
- 4 チャーチの提案
- 5 停止問題
- 6 まとめ

# チューリング Alan Turing (1912 - 1954)

- イギリスの数学者
- チューリングマシン (Turing machine) の考案者
- チューリングテスト (Turing test) の考案者
- 暗号解読への貢献 (ボンベによるエニグマの解読. ボンベはレイェフスキ (ポーランド) の発明)
- チューリング賞 (計算機科学分野のノーベル賞)
- 映画「イミテーション・ゲーム」
- 2019年 英国 50ポンド札の肖像に選ばれる (札は2021年より流通)

チューリング Alan Turing (1912 – 1954)

# Guardian

## Alan Turing to feature on new £50 banknote

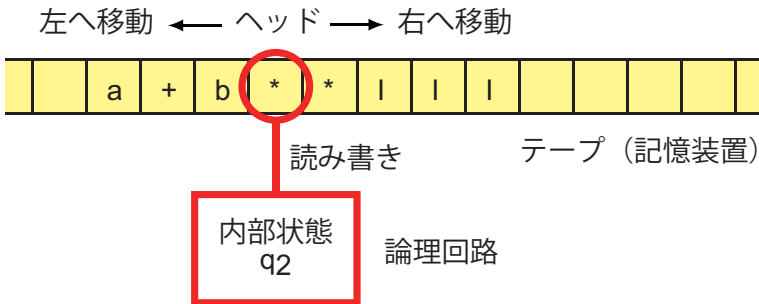
Mathematician who cracked Enigma code was persecuted for his homosexuality in 1950s

The father of modern computing: Alan Turing's legacy



# チューリングマシン

コンピュータのモデルとなる仮想的な機械  
(提唱 1936 年 コンピュータの実現より先)



# チューリングマシン

アルファベット 有限個 (たとえば a, b, c, 0, 1)  
空白を  $\Lambda$  で表す

ヘッドの移動 L(left, 左), R(right, 右), F(fix, 静止)

内部状態 有限個 (たとえば  $q_0, q_1, q_2, q_3$ )  
停止を  $!$  で表す

入力アルファベット テープから読み込む  
出力アルファベット テープに書き込む

入力アルファベット  
現在の状態



出力アルファベット  
ヘッドの移動  
次の状態

機能表

# 機能表

入力アルファベット

現在の状態

	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\Lambda R q_2$	$I L q_1$	$I R q_2$
$\Lambda$	$\Lambda R q_0$	$\Lambda R q_0$	$I F q_1$
*	$\Lambda !$	$* L q_1$	$* R q_2$

$* L q_1$

出力アルファベット    ヘッドの移動    次の状態

# 機能表 (省略形)

入力アルファベット

現在の状態

	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\Lambda R q_2$	L	R
$\Lambda$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\Lambda!$	L	R

\*L $q_1$

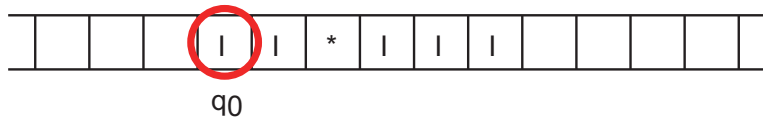
出力アルファベット

ヘッドの移動 次の状態



# 動作例

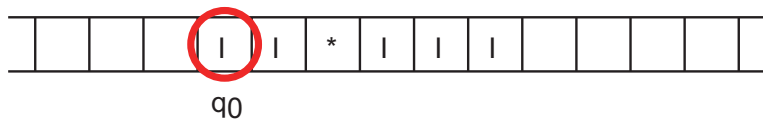
初期状態



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例

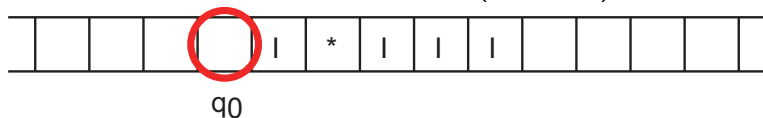
初期状態



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例

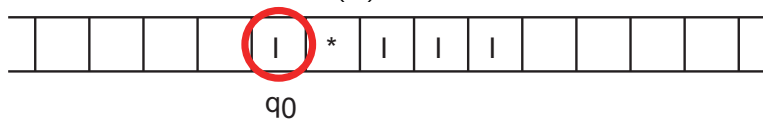
テープの文字を書き換える ( $\Lambda$ : 空白)



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\Lambda R q_2$	L	R
$\Lambda$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\Lambda!$	L	R

# 動作例

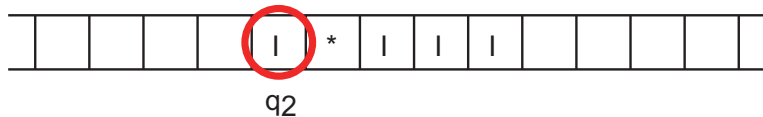
ヘッドの移動 (R)



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\Lambda R q_2$	L	R
$\Lambda$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\Lambda!$	L	R

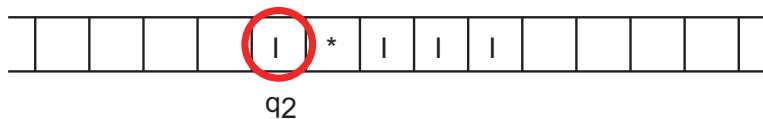
# 動作例

状態遷移



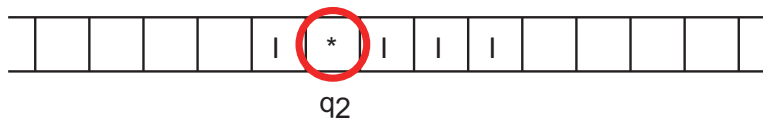
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\Lambda R q_2$	L	R
$\Lambda$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\Lambda!$	L	R

# 動作例



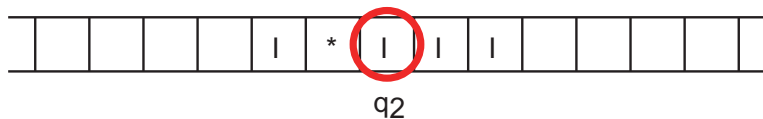
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\Lambda R q_2$	L	R
$\Lambda$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\Lambda!$	L	R

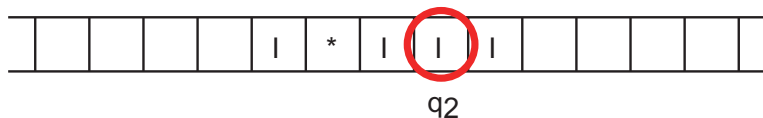
# 動作例



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

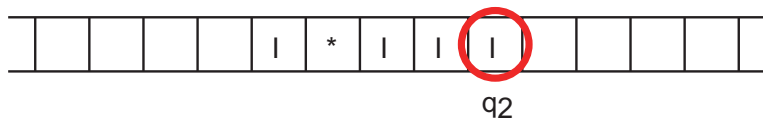


# 動作例



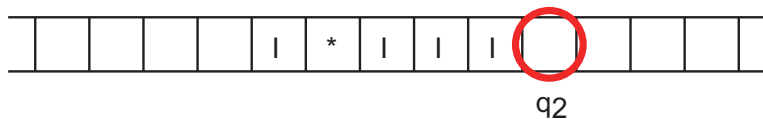
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

# 動作例



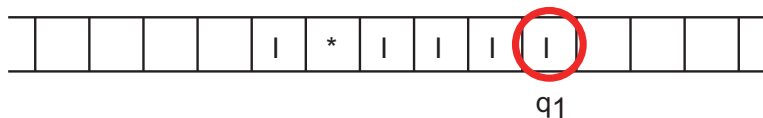
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
$ $	$\Lambda R q_2$	L	R
$\Lambda$	R	$R q_0$	$  q_1$
$*$	$\Lambda!$	L	R

# 動作例



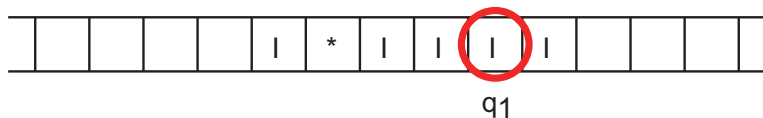
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

# 動作例



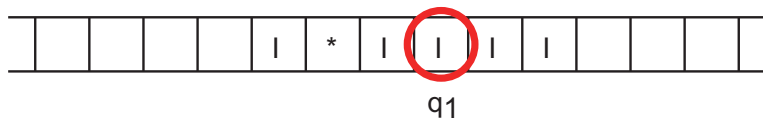
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例



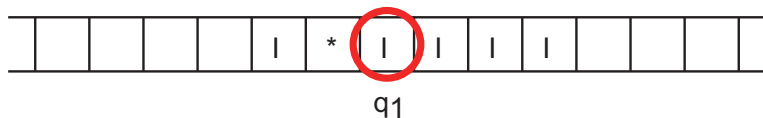
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

# 動作例



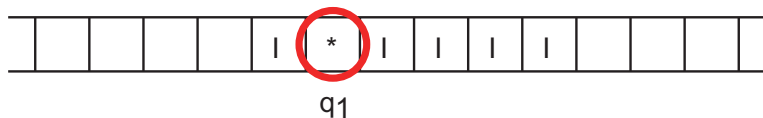
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

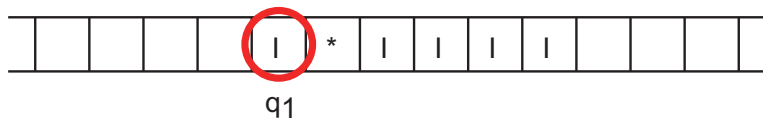
# 動作例



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

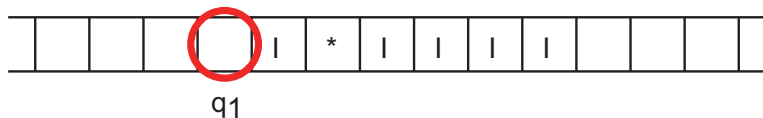


# 動作例



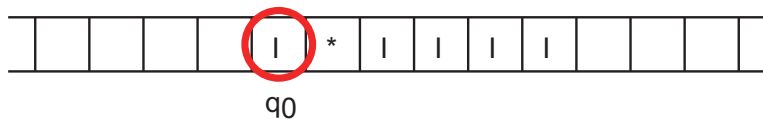
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
1	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$\mid q_1$
*	$\wedge !$	L	R

# 動作例



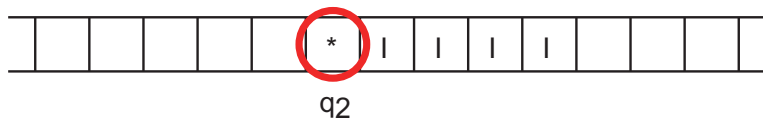
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

# 動作例



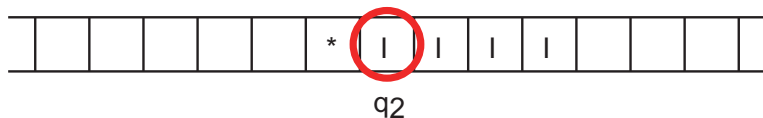
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例



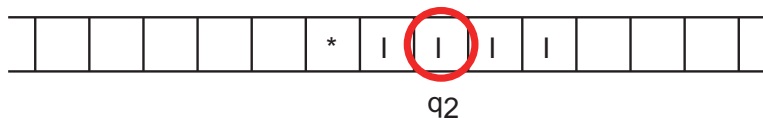
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
$ $	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$  q_1$
$*$	$\wedge !$	L	R

# 動作例



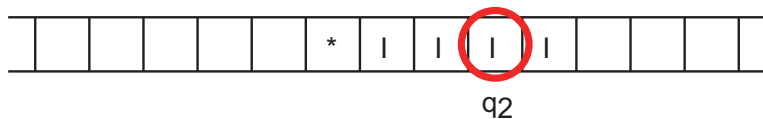
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例



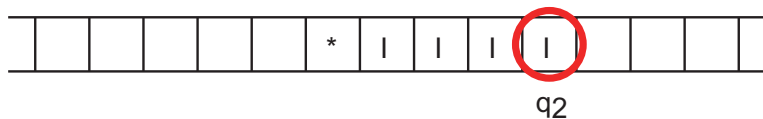
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

# 動作例



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge!$	L	R

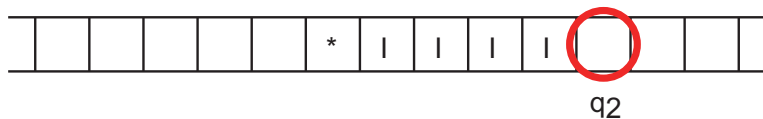
# 動作例



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

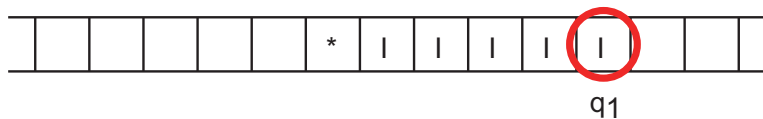


# 動作例



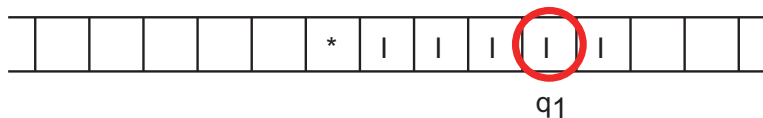
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\Lambda R q_2$	L	R
$\Lambda$	R	$R q_0$	$I q_1$
*	$\Lambda!$	L	R

# 動作例



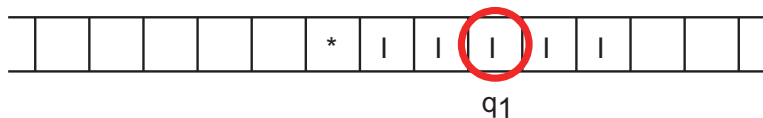
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例



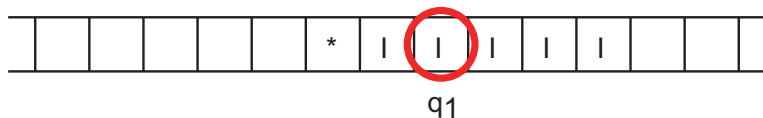
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

# 動作例



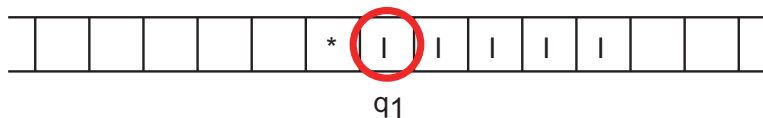
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例



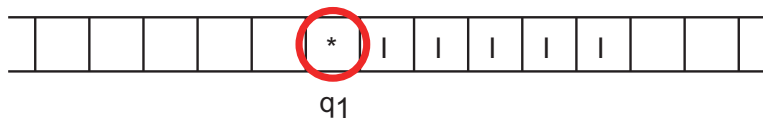
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

# 動作例



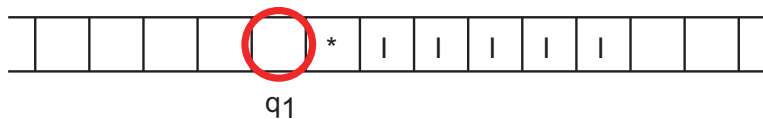
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	$q_1$
*	$\wedge !$	L	R

# 動作例



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

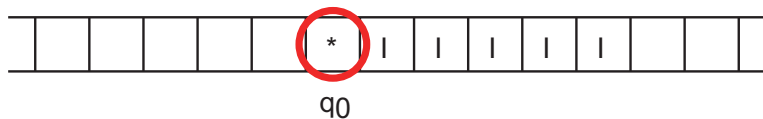
# 動作例



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R



# 動作例



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例

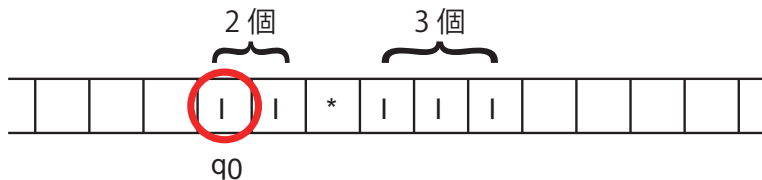
停止！



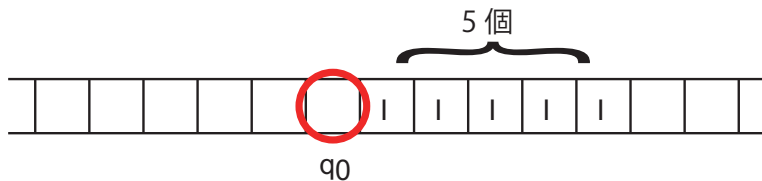
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I $q_1$
*	$\wedge!$	L	R

# 動作例

初期状態



停止状態



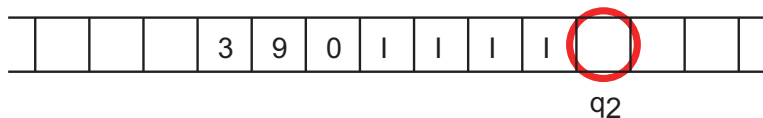
加算を計算する機能表

# 個数を数えて十進数で表す

	$q_0$	$q_1$	$q_2$		$q_0$	$q_1$	$q_2$		
0	1	$q_2$	!	R	6	7	$q_2$	!	R
1	2	$q_2$	!	R	7	8	$q_2$	!	R
2	3	$q_2$	!	R	8	9	$q_2$	!	R
3	4	$q_2$	!	R	9	0L	!	R	
4	5	$q_2$	!	R	$\Lambda$	1	$q_2$	!	$Lq_1$
5	6	$q_2$	!	R	I	L	$\Lambda Lq_0$		R

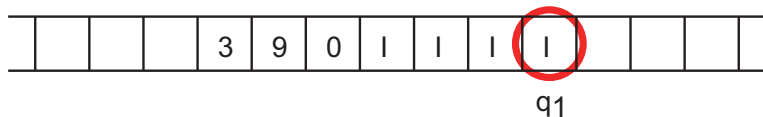
# 個数を数えて十進数で表す

初期状態



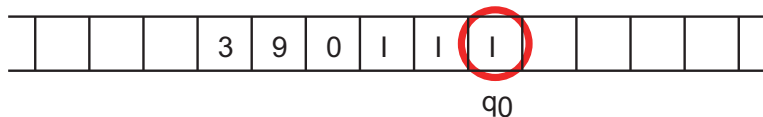
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
$\Lambda$	1 $q_2$	!	$Lq_1$

# 個数を数えて十進数で表す



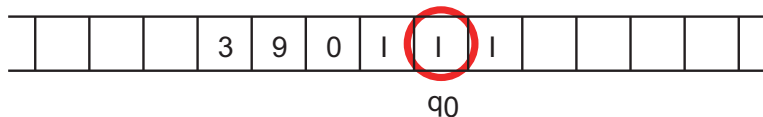
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
1	L	$\wedge L q_0$	R

# 個数を数えて十進数で表す



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	L	$\wedge L q_0$	R

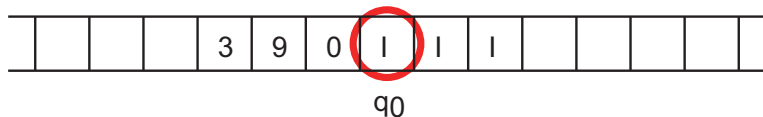
# 個数を数えて十進数で表す



	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	L	$\wedge L q_0$	R

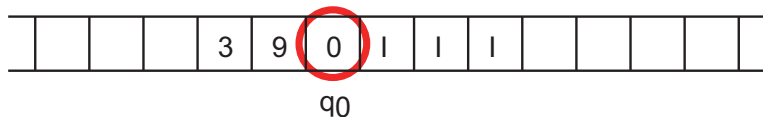


# 個数を数えて十進数で表す



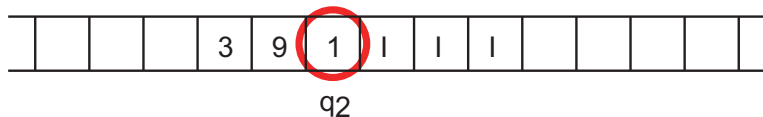
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	L	$\wedge L q_0$	R

# 個数を数えて十進数で表す



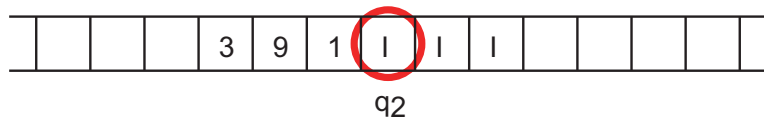
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
0	1 $q_2$	!	R

# 個数を数えて十進数で表す



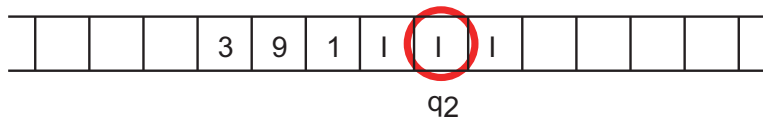
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
1	2 $q_2$	!	R

# 個数を数えて十進数で表す



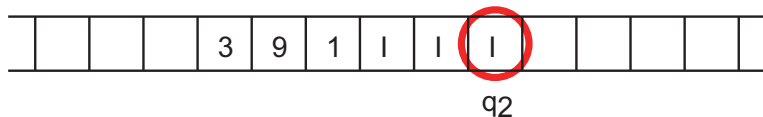
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	L	$\wedge L q_0$	R

# 個数を数えて十進数で表す



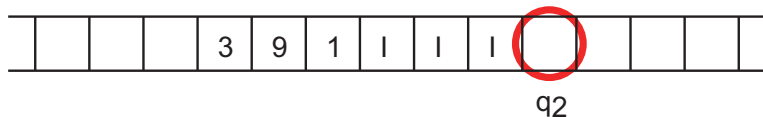
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	L	$\wedge L q_0$	R

# 個数を数えて十進数で表す



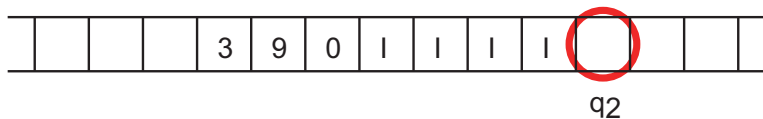
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
	L	$\wedge L q_0$	R

# 個数を数えて十進数で表す



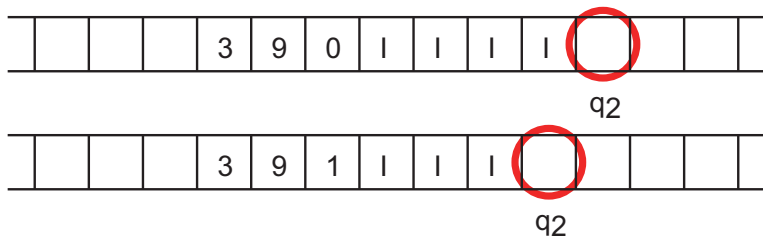
	$q_0$	$q_1$	$q_2$
$\Lambda$	1 $q_2$	!	$Lq_1$

# 個数を数えて十進数で表す

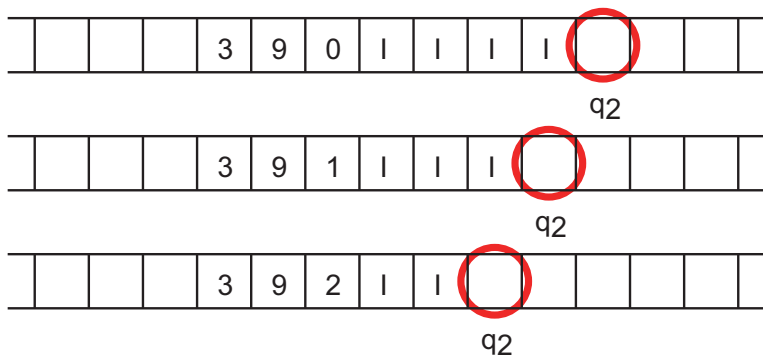




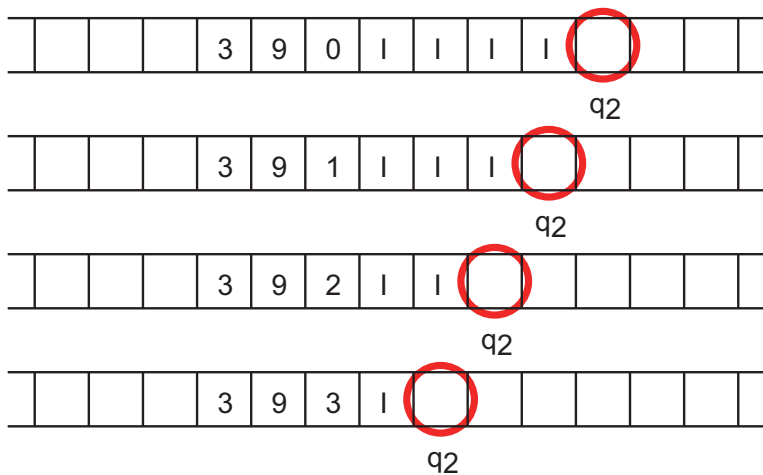
# 個数を数えて十進数で表す



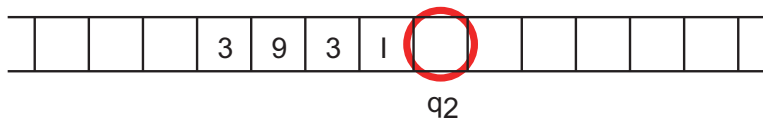
# 個数を数えて十進数で表す



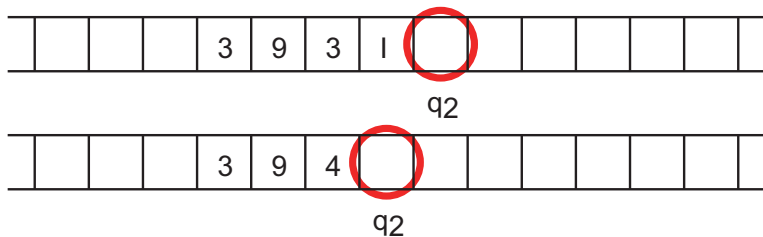
# 個数を数えて十進数で表す



# 個数を数えて十進数で表す



# 個数を数えて十進数で表す



# 個数を数えて十進数で表す



q2



q2



q1

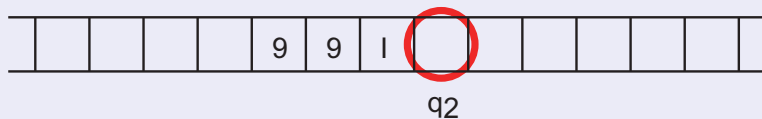
3 9 1

4

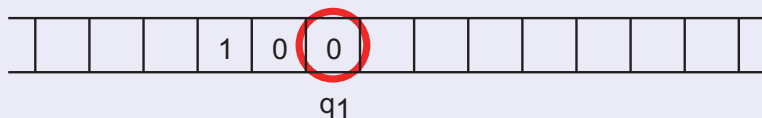
# 個数を数えて十進数で表す

## 問題

初期状態



から最終状態



への過程を記せ

# ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める



# ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

# ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

# ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

# ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

# ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$2 - 2 = 0$$

# ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$2 - 2 = 0$$

最大公約数は 2

# ユークリッドの互除法の機能表

	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
I	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$
$\Lambda$	$Rq_3$	$Lq_2$	$Rq_0$	!
$\alpha$	L	R	IL	$\Lambda R$
$\beta$	L	R	$\Lambda L$	IR

# 計算過程

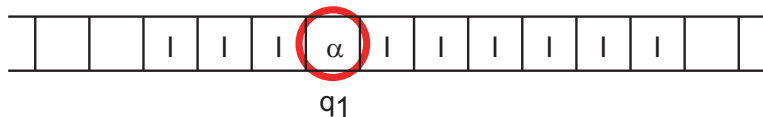
4 と 6 の差を計算



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
I	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

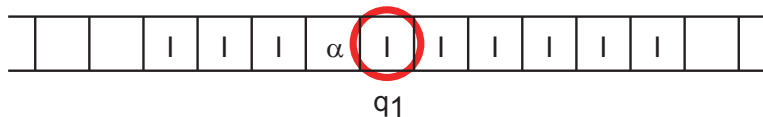


# 計算過程



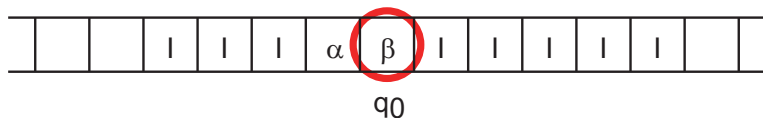
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	ΛR

# 計算過程



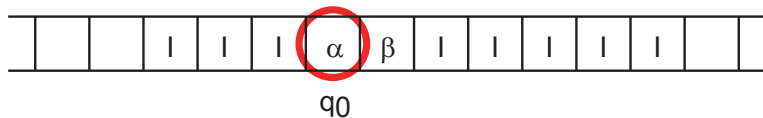
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程



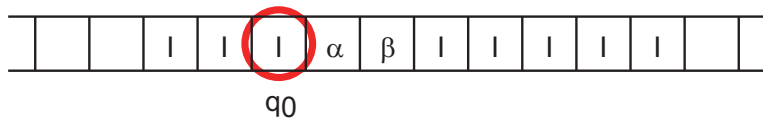
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge L$	IR

# 計算過程



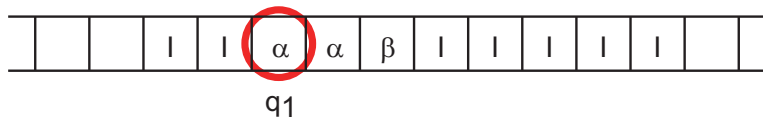
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	ΛR

# 計算過程



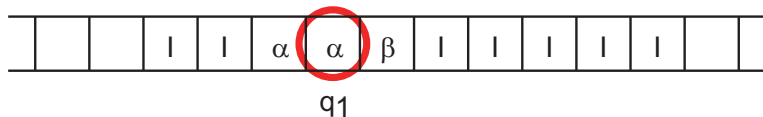
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程



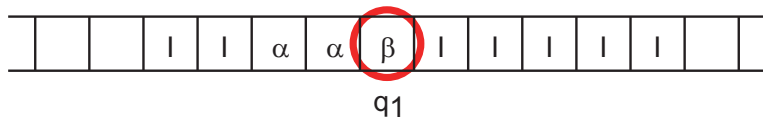
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	$\wedge R$

# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	ΛR

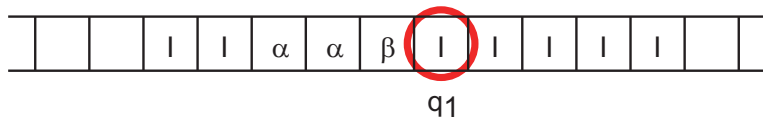
# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge$ L	IR

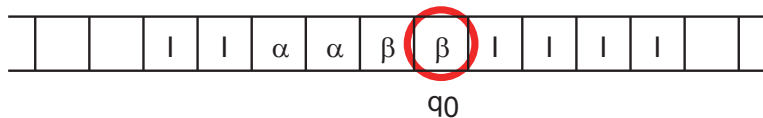


# 計算過程



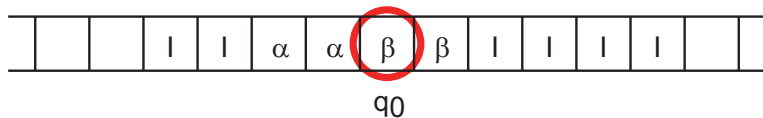
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程



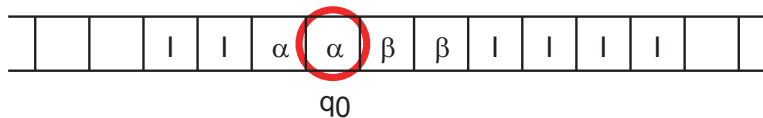
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge L$	IR

# 計算過程



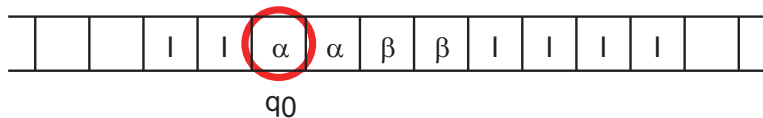
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge L$	IR

# 計算過程



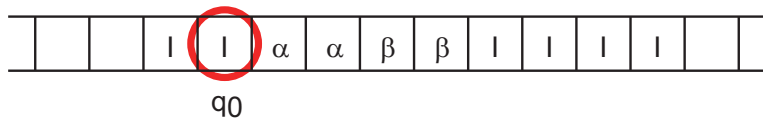
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	ΛR

# 計算過程



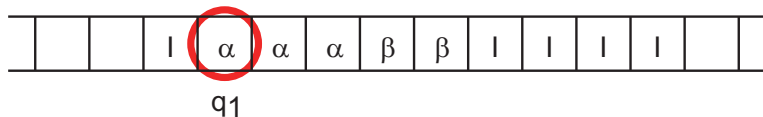
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	$\wedge R$

# 計算過程



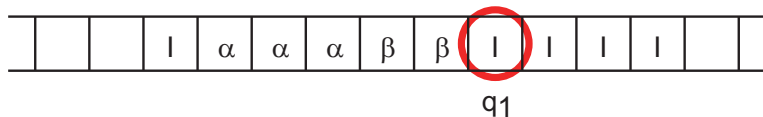
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	$\wedge R$

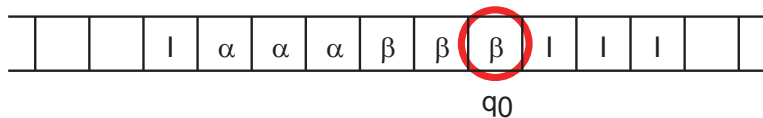
# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

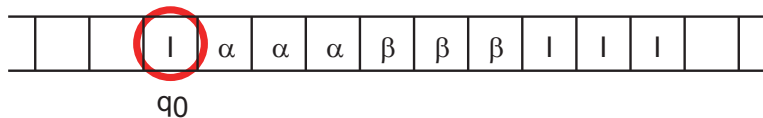


# 計算過程



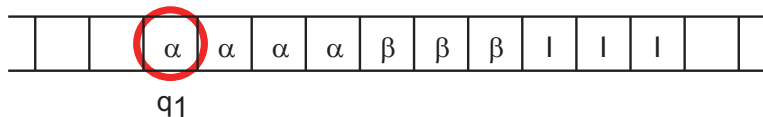
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge$ L	IR

# 計算過程



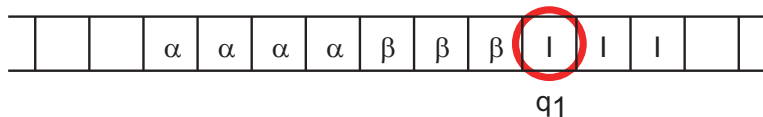
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$ $	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程



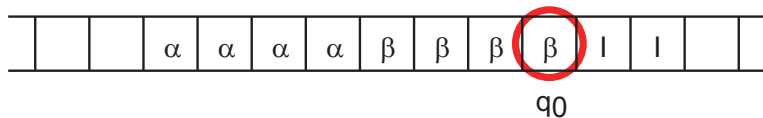
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	$\wedge R$

# 計算過程



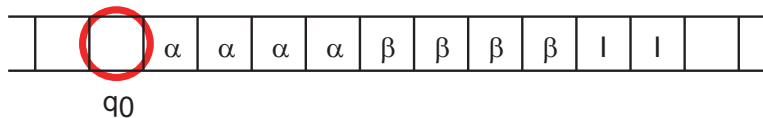
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$ $	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程



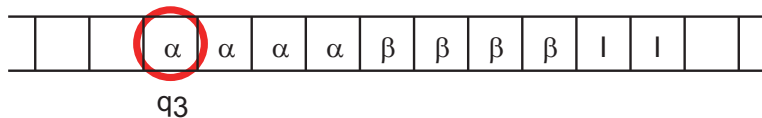
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge$ L	IR

# 計算過程



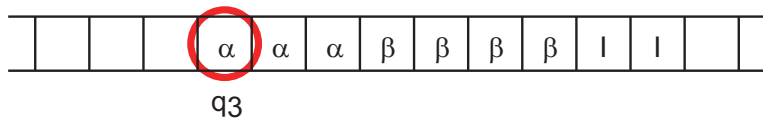
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\Lambda$	$Rq_3$	$Lq_2$	$Rq_0$	$!$

# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	AR

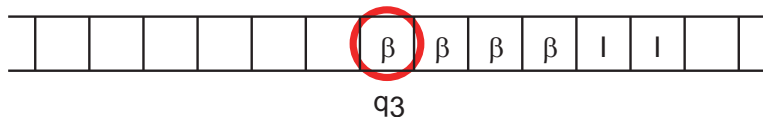
# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	AR

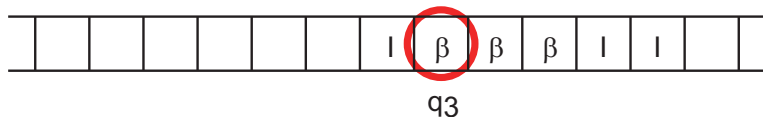


# 計算過程



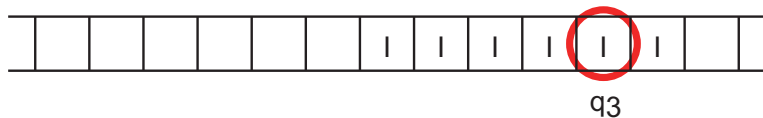
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge$ L	<b>IR</b>

# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge$ L	<b>IR</b>

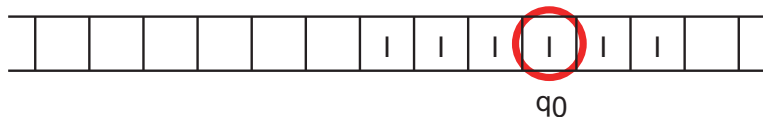
# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
I	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程

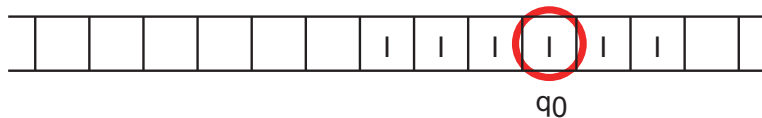
計算  $6 - 4 = 2$  の完了



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
I	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

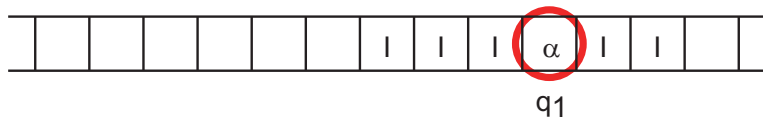
# 計算過程

4 と 2 の差を計算



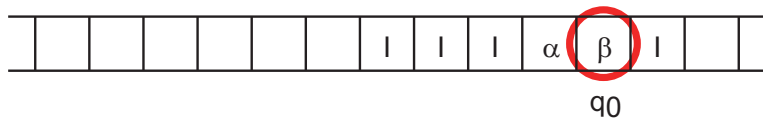
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
I	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程



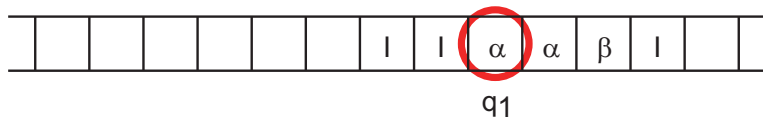
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	$\wedge R$

# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge$ L	IR

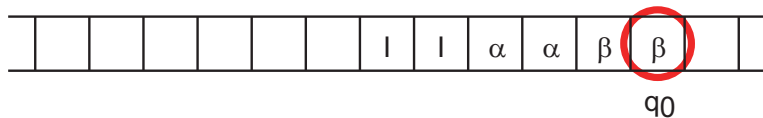
# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	$\wedge R$

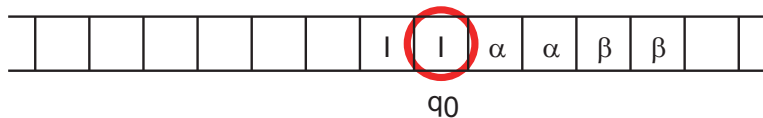


# 計算過程



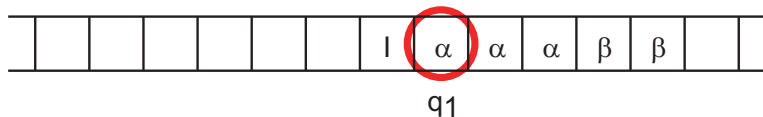
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge$ L	IR

# 計算過程



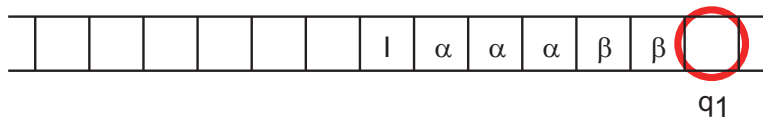
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
I	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程



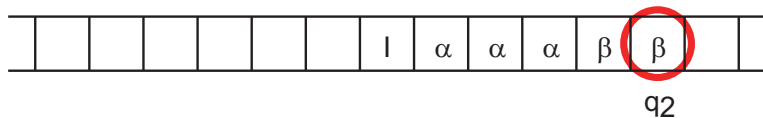
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	$\wedge R$

# 計算過程



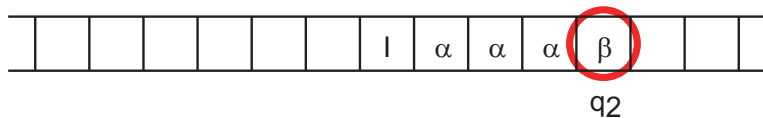
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\Lambda$	$Rq_3$	$Lq_2$	$Rq_0$	$!$

# 計算過程



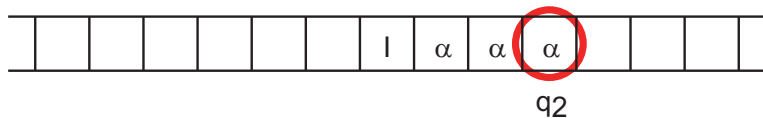
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge L$	IR

# 計算過程



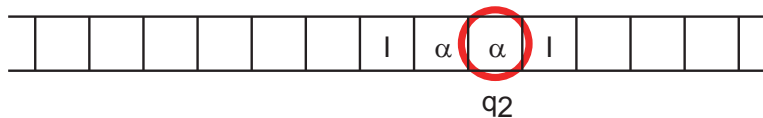
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\beta$	L	R	$\wedge L$	IR

# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	$\wedge R$

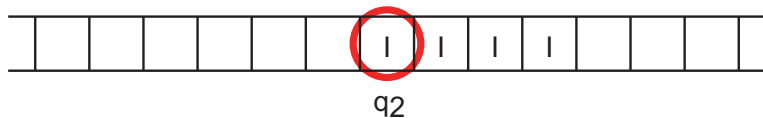
# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	$\wedge R$



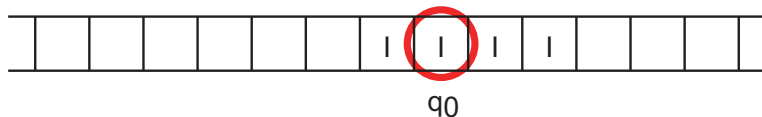
# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
1	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

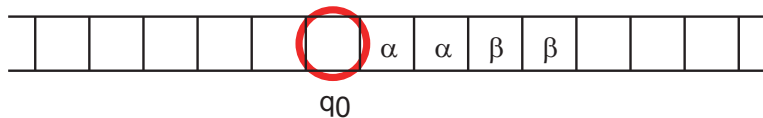
# 計算過程

計算  $4 - 2 = 2$  の完了 2 と 2 の差を計算



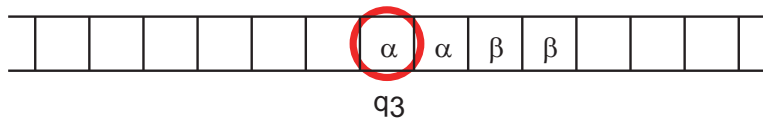
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
	$\alpha q_1$	$\beta q_0$	$Rq_0$	$Lq_0$

# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\Lambda$	$Rq_3$	$Lq_2$	$Rq_0$	!

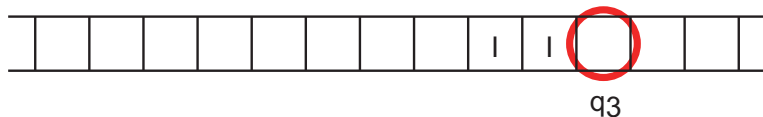
# 計算過程



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\alpha$	L	R	IL	AR

# 計算過程

計算  $2 - 2 = 0$  の完了 停止!



	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
$\Lambda$	$Rq_3$	$Lq_2$	$Rq_0$	!

# チャーチの提案

チューリングマシン = コンピュータ

機能表 = プログラム = アルゴリズム

チューリングマシンが停止することが条件

# 停止問題とは

**停止** アルゴリズムの条件

アルゴリズム=チューリングマシンの機能表

停止するか否かを判定するチューリングマシン

入力 チューリングマシンの機能表

出力 停止する or 停止しない

# 停止問題とは

**停止** アルゴリズムの条件

アルゴリズム=チューリングマシンの機能表

停止するか否かを判定するチューリングマシン

入力 チューリングマシンの機能表

出力 停止する or 停止しない

**X** 存在しない



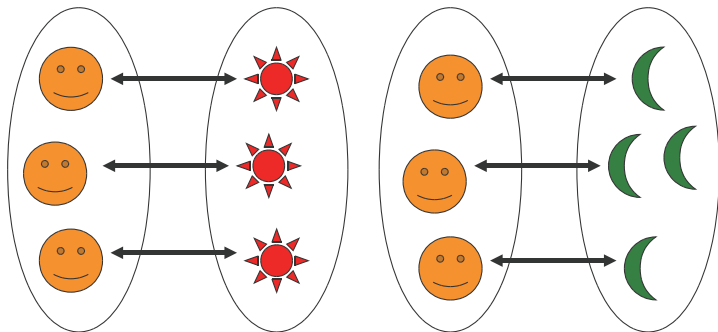
# 停止しない例

	$q_0$	$q_1$	$q_2$		$q_0$	$q_1$	$q_2$
0	1 $q_2$	!	R	6	7 $q_2$	!	R
1	2 $q_2$	!	R	7	8 $q_2$	!	R
2	3 $q_2$	!	R	8	9 $q_2$	!	R
3	4 $q_2$	!	R	9	0L	!	R
4	5 $q_2$	!	R	$\Lambda$	1 $q_2$	!	$Lq_0$
5	6 $q_2$	!	R	I	L	$\Lambda Lq_0$	R

# 無限を数える

自然数  
偶数  
どちらが多いか?

一対一対応が可能ならば個数は等しい



# 自然数と偶数

自然数		偶数
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
4	$\longleftrightarrow$	8
5	$\longleftrightarrow$	10
6	$\longleftrightarrow$	12
7	$\longleftrightarrow$	14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

二つの無限集合で  
一対一対応が可能



同じ濃度を持つ

自然数と偶数は同じ濃度

# 自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\iff$	0.2332988076...
2	$\iff$	0.3142592650...
3	$\iff$	0.5000000000...
4	$\iff$	0.0100100200...
5	$\iff$	0.7777777777...
6	$\iff$	0.4587009871...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

# 自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\iff$	0.2332988076...
2	$\iff$	0.3142592650...
3	$\iff$	0.5000000000...
4	$\iff$	0.0100100200...
5	$\iff$	0.7777777777...
6	$\iff$	0.4587009871...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

# 自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\iff$	0.2332988076...
2	$\iff$	0.3142592650...
3	$\iff$	0.5000000000...
4	$\iff$	0.0100100200...
5	$\iff$	0.7777777777...
6	$\iff$	0.4587009871...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

どの自然数にも対応しない実数  $0.321181\dots$  が存在

# 自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\iff$	0.2332988076...
2	$\iff$	0.3142592650...
3	$\iff$	0.5000000000...
4	$\iff$	0.0100100200...
5	$\iff$	0.7777777777...
6	$\iff$	0.4587009871...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

どの自然数にも対応しない実数  $0.321181\dots$  が存在  
仮定は誤り 一対一対応は不可能

# 自然数と実数 $[0, 1)$

実数は自然数と一対一対応させることができない（実数が余る）



実数は自然数より濃度が濃い

対角線論法



# プログラム = 文字列

## 機能表 = 文字列

	$q_0$	$q_1$	$q_2$
0	1 $q_2$	!	R
1	2 $q_2$	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 $q_2$	!	$Lq_1$
	L	$\wedge Lq_0$	R



12,3;0,1, $\dots$ , $\wedge$ ,|; $q_0,q_1,q_2$ ;1  $q_2$ ,!,R;2  $q_2$ ,!,R; $\dots$  1  $q_2$ ,!, $Lq_1$ ;L, $\wedge Lq_0$ ,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;  
内部状態; 遷移則

# プログラム = 文字列

## 機能表 = 文字列

	$q_0$	$q_1$	$q_2$
0	1 $q_2$	!	R
1	2 $q_2$	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 $q_2$	!	$Lq_1$
	L	$\wedge Lq_0$	R



12,3;0,1, $\dots$ , $\wedge$ ,|; $q_0,q_1,q_2$ ;1  $q_2$ ,!,R;2  $q_2$ ,!,R; $\dots$  1  $q_2$ ,!, $Lq_1$ ;L, $\wedge Lq_0$ ,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;  
内部状態; 遷移則

# プログラム = 文字列

## 機能表 = 文字列

	$q_0$	$q_1$	$q_2$
0	1 $q_2$	!	R
1	2 $q_2$	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 $q_2$	!	$Lq_1$
	L	$\wedge Lq_0$	R



12,3;**0,1,...**, $\wedge$ ,|; $q_0, q_1, q_2$ ;1  $q_2, !, R$ ;2  $q_2, !, R$ ;... 1  $q_2, !, Lq_1$ ;L, $\wedge Lq_0, R$ ;

アルファベットと内部状態の個数; **アルファベット**;  
内部状態; 遷移則

# プログラム = 文字列

## 機能表 = 文字列

	$q_0$	$q_1$	$q_2$
0	1 $q_2$	!	R
1	2 $q_2$	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 $q_2$	!	$Lq_1$
	L	$\wedge Lq_0$	R



12,3;0,1, $\dots$ , $\wedge$ ,|; $q_0, q_1, q_2$ ;1  $q_2, !, R$ ;2  $q_2, !, R$ ; $\dots$  1  $q_2, !, Lq_1$ ;L, $\wedge Lq_0, R$ ;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;

内部状態; 遷移則

# プログラム = 文字列

## 機能表 = 文字列

	$q_0$	$q_1$	$q_2$
0	1 $q_2$	!	R
1	2 $q_2$	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 $q_2$	!	$Lq_1$
	L	$\wedge Lq_0$	R



12,3;0,1, $\dots$ , $\wedge$ ,|; $q_0,q_1,q_2$ ;1  $q_2$ ,!,R;2  $q_2$ ,!,R; $\dots$ 1  $q_2$ ,!, $Lq_1$ ;L, $\wedge Lq_0$ ,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;

内部状態; 遷移則

# プログラム = 文字列

機能表: 文字列 (長さ有限)



テープの初期文字列 **TM** として  
チューリングマシンへ入力可能

プログラム = 文字列

# 文字列と機能表の濃度

文字列  $\iff$  自然数

文字列 390IIII



文字コード 0x33 0x39 0x30 0x49 0x49 0x49 0x49

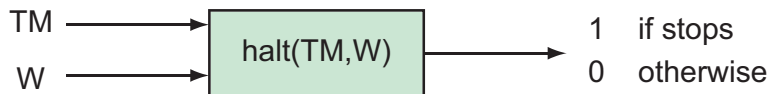
16進数 333930494949 : 自然数

機能表  $\iff$  自然数

機能表  $\iff$  文字列

文字列  $\iff$  自然数

# 停止性判定チューリングマシン



入力 チューリングマシンの機能表  $\text{TM}$   
テープの文字列  $W$

出力  $1$   $\text{TM}$  に  $W$  を入力すると停止  
 $0$  それ以外

## 仮定

停止性チューリングマシン  $\text{halt}(\text{TM}, W)$  が存在する



# 停止性判定チューリングマシンの出力

## テープの文字列

機能表

	W1	W2	W3	W4	...
TM1	1	1	1	1	...
TM2	1	0	0	1	...
TM3	0	1	0	1	...
TM4	1	1	1	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1: 停止    0: 停止しない

# 停止性判定チューリングマシンの出力

## テープの文字列

機能表

	W1	W2	W3	W4	...
TM1	1	1	1	1	...
TM2	1	0	0	1	...
TM3	0	1	0	1	...
TM4	1	1	1	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1: 停止    0: 停止しない

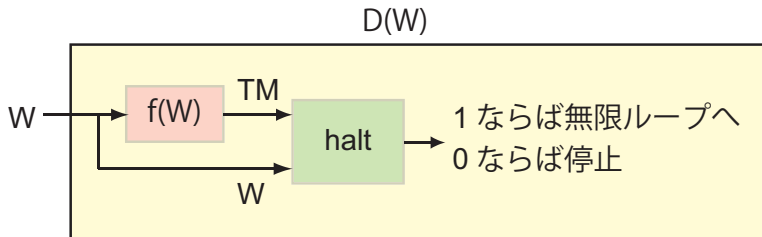
# 関数 $f(W)$

$$\begin{array}{lll} W1 & \iff & TM1 \\ W2 & \iff & TM2 \\ W3 & \iff & TM3 \\ W4 & \iff & TM4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad \implies \quad \begin{array}{l} f(W1)=TM1 \\ f(W2)=TM2 \\ f(W3)=TM3 \\ f(W4)=TM4 \\ \vdots \end{array}$$

一対一対応可能  
同じ濃度

関数を定義できる

# チューリングマシン $D(W)$



入力 テープの文字列  $W$

出力 停止あるいは無限ループ

チューリングマシン  $\text{halt}(TM, W)$  が存在するならば  
チューリングマシン  $D(W)$  は存在する

# チューリングマシン $D(W)$

$\text{halt}(\text{TM1}, W1)=1$

$\text{halt}(\text{TM2}, W2)=0$

$\text{halt}(\text{TM3}, W3)=0$

$\text{halt}(\text{TM4}, W4)=1$



$\vdots$



# チューリングマシン $D(W)$

$\text{halt}(\text{TM1}, W1)=1$	$\Rightarrow$	$D(W1)$	停止しない
$\text{halt}(\text{TM2}, W2)=0$		$D(W2)$	停止
$\text{halt}(\text{TM3}, W3)=0$		$D(W3)$	停止
$\text{halt}(\text{TM4}, W4)=1$		$D(W4)$	停止しない
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

$\Downarrow$

# チューリングマシン $D(W)$

$\text{halt}(\text{TM1}, W1)=1$	$\Rightarrow$	$D(W1)$	停止しない
$\text{halt}(\text{TM2}, W2)=0$		$D(W2)$	停止
$\text{halt}(\text{TM3}, W3)=0$		$D(W3)$	停止
$\text{halt}(\text{TM4}, W4)=1$		$D(W4)$	停止しない
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$



$\text{TM1}(W1)$	停止
$\text{TM2}(W2)$	停止しない
$\text{TM3}(W3)$	停止しない
$\text{TM4}(W4)$	停止
$\vdots$	$\vdots$

# チューリングマシン $D(W)$

$\text{halt}(\text{TM1}, W1)=1$	$\Rightarrow$	$D(W1)$	停止しない
$\text{halt}(\text{TM2}, W2)=0$		$D(W2)$	停止
$\text{halt}(\text{TM3}, W3)=0$		$D(W3)$	停止
$\text{halt}(\text{TM4}, W4)=1$		$D(W4)$	停止しない
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$



$\text{TM1}(W1)$	停止	$D \neq \text{TM1}$
$\text{TM2}(W2)$	停止しない	$D \neq \text{TM2}$
$\text{TM3}(W3)$	停止しない	$D \neq \text{TM3}$
$\text{TM4}(W4)$	停止	$D \neq \text{TM4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



# チューリングマシン $D(W)$

$D \neq TM1$

$D \neq TM2$

$D \neq TM3$

$D \neq TM4$

$\vdots$



$D$  は存在しない *i.e.* halt は存在しない

# まとめ

## コンピュータの原理

コンピュータ = チューリングマシン  
アルゴリズム = プログラム = 機能表

## 停止問題

チューリングマシンでは解くことができない  
コンピュータでは解くことができない

# レポート

下記の問題に答え， pdf ファイルで manaba+R に提出する．

ファイル名：学籍番号（11桁半角数字）名前（空白なし）.pdf

例えば 12345678901 平井慎一.pdf

12345678901HiraiShinichi.pdf

締切：10月23日（月曜）午前1時

(1) 自然数  $1, 2, 3, \dots$  と整数  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  が同じ濃度を持つことを示せ．

(2) 実数  $[0, 1)$  と二次元空間  $[0, 1) \times [0, 1)$  内の点と同じ濃度を持つことを示せ．

$$[0, 1) \times [0, 1) = \{(x, y) \mid x \in [0, 1), y \in [0, 1)\}$$

# 付録：一対一対応

以下の説明は正しいか。

偶数  $n$  に対して，一つの自然数  $n$  が対応する。  
したがって，偶数と自然数は一対一対応する。

偶数		自然数
		1
2	$\implies$	2
		3
4	$\implies$	4
		5
6	$\implies$	6
		7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

## 付録：一対一対応

以下の説明は正しいか.

自然数  $k$  に対して, 一つの偶数  $4k$  が対応する.  
したがって, 自然数と偶数は一対一対応する.

偶数		自然数
2		
4	$\longleftarrow$	1
6		
8	$\longleftarrow$	2
10		
12	$\longleftarrow$	3
14		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

## 付録：一対一対応

以下の説明は正しいか。

偶数  $n$  に対して、一つの自然数  $n$  が対応する。  
自然数  $k$  に対して、一つの偶数  $4k$  が対応する。  
したがって、偶数と自然数は一対一対応する。

偶数の集合を  $E$ 、自然数の集合を  $N$  で表す。  
任意の  $n \in E$  に対して、 $n \in N$  が対応する。  
これより、 $E \subset N$  である。  
任意の  $k \in N$  に対して、 $4k \in E$  が対応する。  
これより、 $N \subset E$  である。  
したがって、集合  $E$  と集合  $N$  は一対一対応する。