

線形計画法

知能科学：最適化

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

線形計画問題 (linear programming; LP)

$$\begin{aligned} &\text{maximize } y = x_1 + x_2 \\ &\text{subject to } \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

目的関数, 制約式がすべて線形

講義の流れ

- ① 線形計画法
- ② 線形同次不等式
- ③ 非線形最適化
- ④ まとめ

線形計画法

- 製品 A, B を二つの材料 P, Q から製造する.
- 材料 P が 15 Kg, Q が 24 Kg ある.
- 製品 A を 1 Kg 製造するために, P が 3 Kg, Q が 2 Kg 必要である.
- 製品 B を 1 Kg 製造するために, P が 1 Kg, Q が 3 Kg 必要である.
- 製品 A の価格は 1 Kg で 1 万円, 製品 B の価格は 1 Kg で 1 万円である.

↓

売上を最大にするためには, 製品 A, B をどれだけ製造すればよいか.

線形計画法

製品 A を x_1 Kg, 製品 B を x_2 Kg 製造する.

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

材料 P が 15 Kg あるので

$$3x_1 + x_2 \leq 15$$

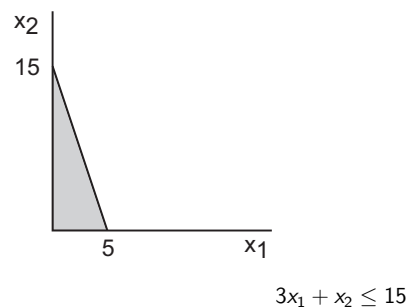
材料 Q が 24 Kg あるので

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

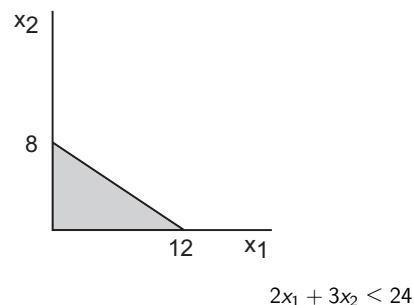
売上 (単位: 万円)

$$y = 1x_1 + 1x_2$$

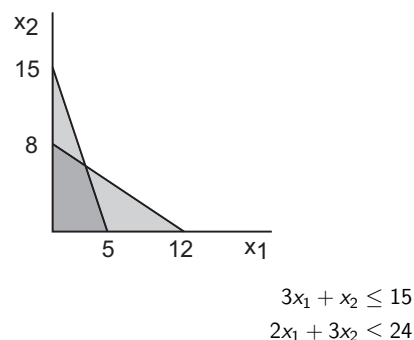
線形計画法



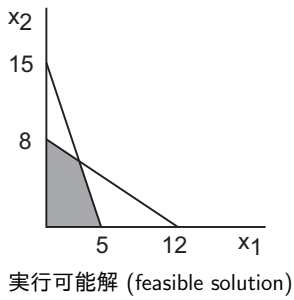
線形計画法



線形計画法



線形計画法



MATLAB

線形計画問題

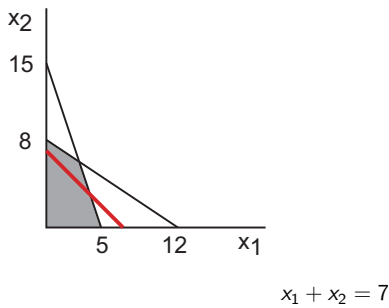
$$\begin{aligned} &\text{minimize } \mathbf{f}^\top \mathbf{x} \\ &\text{subject to } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{aligned}$$

↓

$\mathbf{x} = \text{linprog}(\mathbf{f}, \mathbf{A}, \mathbf{b})$

Optimization Toolbox が必要
最小化 (minimize) であることに注意
 $\text{maximize } f \implies \text{minimize } -f$

線形計画法

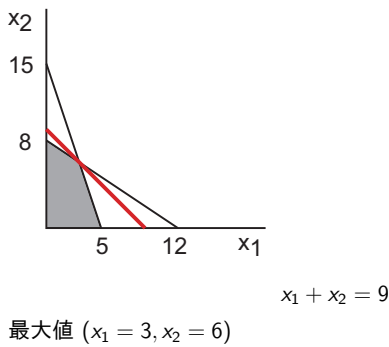


MATLAB

$$\begin{aligned} &\text{minimize } y = -x_1 - x_2 \\ &\text{subject to } \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

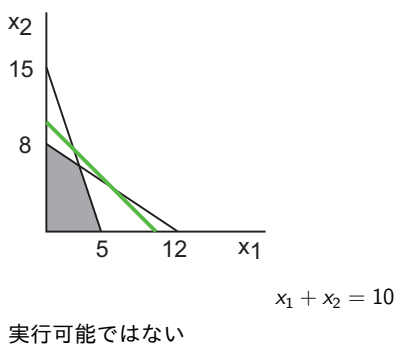
線形計画法



MATLAB

```
f = [-1; -1];  
A = [3, 1;  
     2, 3;  
     -1, 0;  
     0, -1];  
b = [15; 24; 0; 0];  
x = linprog(f, A, b);  
x
```

線形計画法



MATLAB

実行結果

```
>> linprog_2D
```

Optimal solution found.

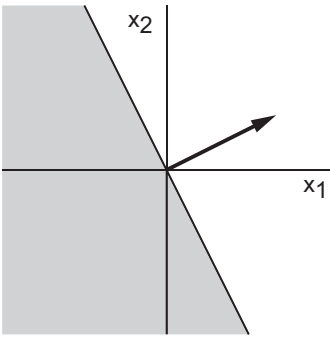
```
x =  
  
3.0000  
6.0000
```

実行可能性

条件式を満たす変数の値が存在しないとき

```
maximize y = x1 + x2
subject to 3x1 + x2 ≤ 15
           2x1 + 3x2 ≤ 24
           -x1 - x2 ≤ -10
           x1 ≥ 0
           x2 ≥ 0
```

線形同次不等式

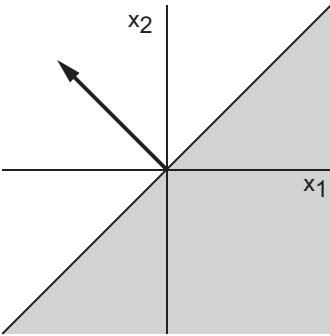


$2x_1 + x_2 \leq 0$

実行可能性

```
f = [ -1; -1 ];
A = [ 3, 1;
      2, 3;
      -1, -1;
      -1, 0;
      0, -1 ];
b = [ 15; 24; -10; 0; 0 ];
x = linprog(f, A, b);
x
```

線形同次不等式



$-2x_1 + 2x_2 \leq 0$

実行可能性

実行結果

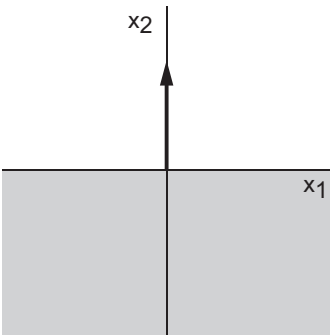
```
>> example_non_feasible

No feasible solution found.
Linprog stopped because no point satisfies the constraint.

x =

[]
```

線形同次不等式



$2x_2 \leq 0$

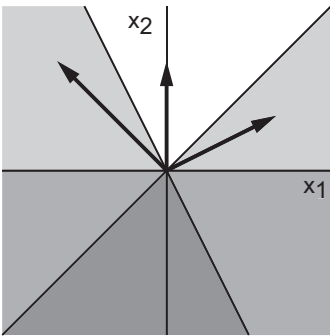
線形同次不等式

線形同次不等式

$2x_1 + x_2 \leq 0$
 $-2x_1 + 2x_2 \leq 0$
 $2x_2 \leq 0$

を満たす $x = [x_1, x_2]^T$ (ただし $x \neq 0$) が存在するか。
(この解を同次解とよぶ)

線形同次不等式



0 以外の解 (同次解) が存在する。

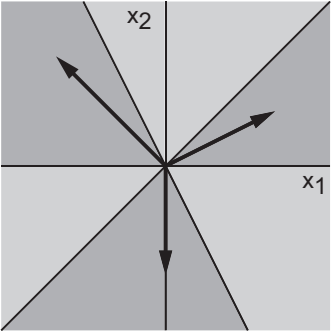
線形同次不等式

線形同次不等式

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ -2x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

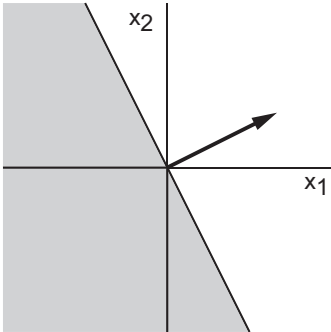
を満たす $x = [x_1, x_2]^T$ (ただし $x \neq 0$) が存在するか.

線形同次不等式



0 以外の解 (同次解) は存在しない.

線形同次不等式



$$2x_1 + x_2 \leq 0$$

線形同次不等式

線形同次不等式

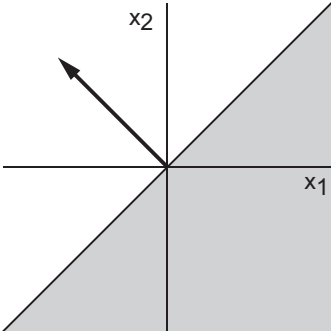
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ -2x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

の解は

$$x = 0$$

に限られる.

線形同次不等式



$$-2x_1 + 2x_2 \leq 0$$

判定法

線形同次不等式

$$a_i^T x \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

を満たす $x \neq 0$ が存在するか否かを判定

Step 1

連立一次方程式

$$a_i^T x = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

を満たす $x \neq 0$ が存在するか否かを調べる.
存在するときは, 線形同次不等式を満たす $x \neq 0$ が存在すると判定し, 終了.
存在しないときは Step 2 へ.

判定法

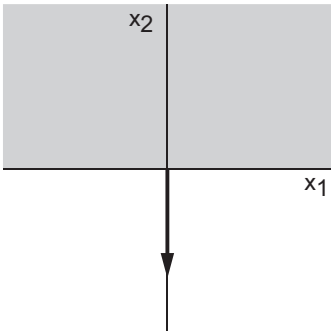
Step 2

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{maximize } & y = \sum \lambda_i \\ \text{subject to } & a_i^T x + \lambda_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \\ & \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

を解く.
 y の最大値が正ならば線形同次不等式を満たす $x \neq 0$ が存在すると判定し, 0 ならば存在しないと判定する.

線形同次不等式



$$-2x_2 \leq 0$$

判定法

Step 2 において、同次解が存在する

↓ ↑

$\mathbf{a}_k^\top \mathbf{x} > 0$ となる条件式がある。このとき $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

↓ ↑

$$\lambda_k > 0$$

↓ ↑

$$y > 0$$

判定法

Step 2 において、同次解が存在しない

↑

$$\mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = 0, \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} = 0, \dots$$

↑

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots$$

↑

$$y = 0$$

判定法

Step 2 において

$$\begin{aligned} y > 0 &\implies \exists k, \lambda_k > 0 \implies \mathbf{a}_k^\top \mathbf{x} < 0 \\ &\implies \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ &\implies \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Step 2 において $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) の解は $\mathbf{0}$ のみ

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \\ \implies \exists k, \mathbf{a}_k^\top \mathbf{x} < 0 \implies \exists \lambda_k > 0 \implies y > 0 \end{aligned}$$

↓

Step 2 において

$$y > 0 \equiv \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

判定法

Step 2 における不等式は同次式

$(\mathbf{x}, \lambda)$ が解 $\implies (\alpha \mathbf{x}, \alpha \lambda)$ が解 ($\alpha > 0$)

↓

解がある場合、 y は ∞ に発散する。

↓

発散を防ぐために、条件式

$$\sum \lambda_i \leq 1$$

を追加（追加しても解が存在するか否かは変わらない）

判定法

線形同次不等式

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &\leq 0 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

を満たす $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するか。

↓

$$\begin{aligned} \text{maximize } y &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \text{subject to } 2x_1 + x_2 - 5x_3 + \lambda_1 &\leq 0 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 + \lambda_2 &\leq 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

↓

判定法

最小化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize } y &= -\lambda_1 - \lambda_2 \\ \text{subject to } 2x_1 + x_2 - 5x_3 + \lambda_1 &\leq 0 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 + \lambda_2 &\leq 0 \\ -\lambda_1 &\leq 0 \\ -\lambda_2 &\leq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

変数ベクトル

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

判定法

↓

$$\begin{aligned} \text{minimize } y &= [0 \ 0 \ 0 \mid -1 \ -1] \mathbf{q} \\ \text{subject to } \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ \hline & & & 1 & 1 \end{array} \right] \mathbf{q} &\leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
function stat=non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
N = null(A); sz = size(N);
if (sz(2) > 0)
    stat = 1;
    return;
end

sz = size(A);
m = sz(1); % number of inequalities
n = sz(2); % dimension
I = eye(m);
```

```

C = [ A, I;
      zeros(m,n), -I;
      zeros(1,n), ones(1,m) ];
b = [ zeros(m,1); zeros(m,1); 1 ];
f = [ zeros(n,1); -ones(m,1) ];
x = linprog(f, C, b);
if (f'*x < 0)
    stat = 1;
else
    stat = 0;
end
end
end

```

線形同次不等式

$$a_i^\top x \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

の解は $x = \mathbf{0}$ のみである。

|||

ベクトル

$$x = \sum_i c_i a_i \quad (c_1, c_2, \dots \geq 0)$$

が全空間をカバーする。

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```

>> A
A =

     2     1
    -2     2
     0     2

>> non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
Optimal solution found.

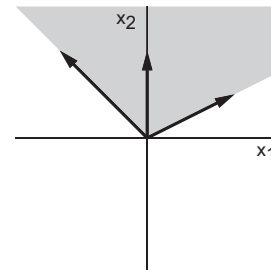
ans =

     1

```

双対問題

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

 x は全空間をカバーしない。

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```

>> A
A =

     2     1
    -2     2
     0    -2

>> non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
Optimal solution found.

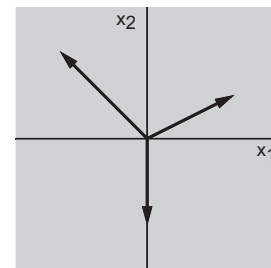
ans =

     0

```

双対問題

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

 x は全空間をカバーする。

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```

>> A
A =

     2     1    -5
    -2    -1     5

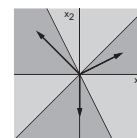
>> non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)

ans =

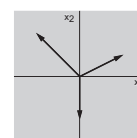
     1

```

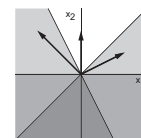
双対問題

解は $\mathbf{0}$ のみ

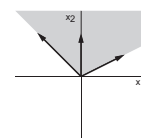
|||



全空間をカバー

 $\mathbf{0}$ 以外の解

|||



カバーしない

一変数関数の最小化

区間 $[-\pi, \pi]$ で関数 $\cos x$ の最小値を求める.

```
x = fminbnd(@cos, -pi, pi);
x

x =
    -3.1415
```

一変数関数の最小化

区間 $[-10, 10]$ で関数 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x$ の最小値を求める.

```
f = @(x) x.^4 - 3*x.^3 - 4*x;
x = fminbnd(f, -10, 10);
x

x =
     2.4207

x=-2:0.01:4;
plot(x,f(x));
```

非線形最適化

ローゼンブロッック関数 (Rosenbrock function)

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

の最小値を数値的に求める.

MATLAB

ローゼンブロッック関数を記述
ファイル Rosenbrock.m に保存

```
function f = Rosenbrock( x )
    x1 = x(1); x2 = x(2);
    f = 100*(x2 - x1^2)^2 + (1 - x1)^2;
end
```

MATLAB

ファイル Rosenbrock_minimize.m

```
xinit = [ -1.2; 1.0 ]; % initial value
[xmin, fmin] = fminsearch(@Rosenbrock, xinit);
xmin
fmin
```

変数の初期値 : $[x_1, x_2]^T = [-1.2, 1.0]^T$

MATLAB

実行結果

```
>> Rosenbrock_minimize

xmin =
    1.0000
    1.0000

fmin =
    8.1777e-10
```

MATLAB

計算過程を表示する

```
xinit = [ -1.2; 1.0 ]; % initial value
options = optimset('Display','iter');
[xmin, fmin] = fminsearch(@Rosenbrock, xinit, options);
xmin
fmin
```

MATLAB

Iteration	Func-count	min f(x)	Procedure
0	1	24.2	
1	3	20.05	initial simp
2	5	5.1618	expand
3	7	4.4978	reflect
4	9	4.4978	contract out
5	11	4.38136	contract ins
6	13	4.24527	contract ins
7	15	4.21762	reflect
8	17	4.21129	contract ins
9	19	4.13556	expand
10	21	4.13556	contract ins
11	23	4.01273	expand
12	25	3.93738	expand
13	27	3.60261	expand
14	28	3.60261	reflect

MATLAB

```
83          155          1.12293e-09          contract ins
84          157          1.10755e-09          contract out
85          159          8.17766e-10          contract ins
```

最適化が終了しました:
現在の x は 1.000000e-04 の OPTIONS.TolX を使って終了基準を満たし、F(x) は 1.000000e-04 の OPTIONS.TolFun を使って収束基準を満たします。

```
xmin =
    1.0000
    1.0000

fmin =
    8.1777e-10
```

制約付き非線形最適化

体積が一定で表面積が最小の直方体を求める。
体積：5³
直方体の三辺の長さ：x, y, z

minimize

$S(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$

subject to

$xyz - 5^3 = 0$
 $x, y, z \geq 0$

MATLAB

目的関数 $S(x, y, z)$

```
function S = area ( q )
% 面積
    x = q(1); y = q(2); z = q(3);
    S = 2*(x*y+y*z+z*x);
end
```

ファイル area.m に保存

MATLAB

不等式制約 $-x \leq 0, -y \leq 0, -z \leq 0$
等式制約 $xyz - 5^3 = 0$

```
function [ ineq, cond ] = nonlcon( q )
% 制約条件
    x = q(1); y = q(2); z = q(3);
    ineq = [-x; -y; -z];
    cond = [ x*y*z - 5^3 ];
end
```

ファイル nonlcon.m に保存

MATLAB

ファイル area_minimize_under_nonlcon.m

```
qinit = [1;1;1];
[qmin,smin] = fmincon(@area, qinit, ...
    [], [], [], [], [], @nonlcon);

qmin
smin
```

Optimization Toolbox が必要

MATLAB

実行結果

```
>> rectangular_min_area_with_constant_volume
制約を満たす局所的最小値が見つかりました。
目的関数が最適性の許容誤差値の範囲内の実行可能な方向
において非減少であり、制約が制約の許容誤差値の範囲内で
満たされているため、最適化は完了しました。
```

<停止条件の詳細>

```
qmin =
    5.0000
    5.0000
    5.0000

smin =
    150.0000
```

まとめ

- 線形計画問題
- 線形目的関数と線形制約（等式，不等式）
linprog
- 線形同次不等式
- 非零の解があるか否かを判定
線形計画問題に帰着
双対問題
- 非線形最適化
- fminsearch
制約付き最適化 fmincon

レポート

下記の問題に答え、pdf ファイルで manaba+R に提出する。
ファイル名：学籍番号（11 桁半角数字）名前（空白なし）.pdf
期限 1 月 6 日（月曜）午前 1 時

(1) 三角形 ABC の周囲長が 3 cm であり、BC と CA の比が 2 : 1 である。面積が最大になる三角形の各辺の長さや面積の値を、MATLAB を用いて求めよ。プログラムと実行結果を示すこと。

(2) 四角形 ABCD の周囲長が 4 cm であり、AB と BC の比が 2 : 1 である。面積が最大になる四角形の各辺の長さや面積の値を、MATLAB を用いて求めよ。プログラムと実行結果を示すこと。

レポート

(1) 一辺の長さが a, b, c で与えられる三角形の面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

で与えられる.

`fmincon` は関数の最小値を求める. 最大値を求めるときは, 目的関数 f の逆 $-f$ の最小値を計算すれば良い.

maximize f

↓

minimize $g = -f$

(2) 四角形の辺の長さ a, b, c, d と, 対角線 AC の長さ x を変数とする.