

数値計算：有限要素法（一次元）

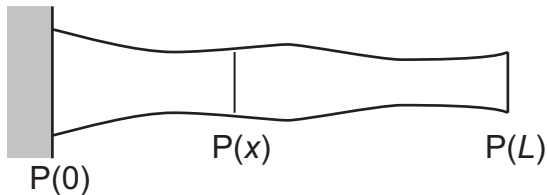
平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

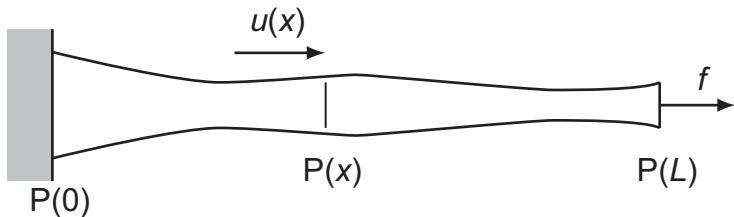
講義の流れ

- ① ビームの静的変形
 - ビームの一次元変形の積分表現
 - 積分表現の近似
 - 釣り合いの方程式の計算
- ② ビームの動的変形
 - ビームの一次元動的変形
 - 運動エネルギー
 - ラグランジュの運動方程式
- ③ まとめ

ビームの一次元静的変形



自然状態



変形状態

ビームの一次元静的変形

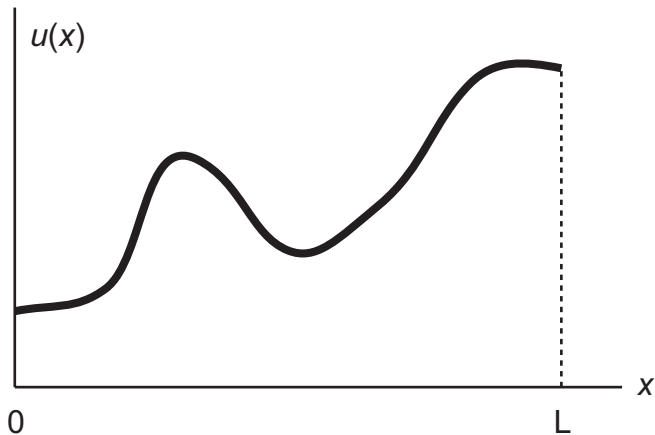
L ビームの長さ
 $P(x)$ 左端から距離 x の点
 $E(x)$ 点 $P(x)$ におけるヤング率
 $A(x)$ 点 $P(x)$ における断面積

$u(x)$ 点 $P(x)$ の変位



ビームの変形： 関数 $u(x)$ ($0 \leq x \leq L$)

ビームの一次元静的変形



ビームの一次元静的変形

左端 $P(0)$: 空間に固定

右端 $P(L)$: 外力 f を作用

ビームの変形を表す微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = 0$$

ただし

$$u(0) = 0$$

$$E(L)A(L) \frac{du}{dx}(L) = f$$

境界値問題 (boundary value problem)

ルンゲクッタ法等 : 常微分方程式の初期値問題の解法
境界値問題には不向き

有限要素法

有限要素法 (finite element method; FEM)

境界値問題を解く手法

- ① 境界値問題と等価な積分表現を導く
- ② 未知関数を近似し，積分表現を有限個の変数で表す
- ③ 積分表現を最小化 (最大化) する変数を求める

積分表現

弾性ポテンシャルエネルギー U :

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx,$$

外力 f による仕事 W :

$$W = f u(L)$$

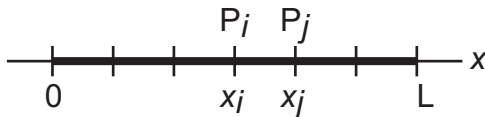
静力学の変分原理 :

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad I = U - W \\ &\text{subject to} \quad u(0) = 0 \end{aligned}$$

未知関数の近似

区間 $[0, L]$ を 6 個の小区間に等分

各小区間の幅： $h = L/6$



節点 (nodal point)

$$x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_6 = L$$

節点上の変位 $u_i \triangleq u(x_i)$

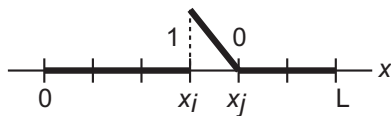
未知関数 $u(x)$ ：7 個の変数 $u_0, u_1, u_2, \dots, u_6$ で表される

未知関数の近似

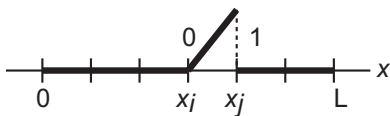
小区間 $[x_i, x_j]$ における関数 $u(x)$ の区分的線形補間

$$u(x) = u_i N_{i,j}(x) + u_j N_{j,i}(x), \quad (x_i \leq x \leq x_j)$$

u_i, u_j : 節点 x_i, x_j における変位



$$\begin{aligned} N_{i,j}(x) &= \frac{x_j - x}{h} \\ &= \begin{cases} 1 & (x = x_i) \\ 0 & (x = x_j) \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} N_{j,i}(x) &= \frac{x - x_i}{h} \\ &= \begin{cases} 0 & (x = x_i) \\ 1 & (x = x_j) \end{cases} \end{aligned}$$

未知関数の近似

未知関数 : $u(x)$ ($0 \leq x \leq L$)

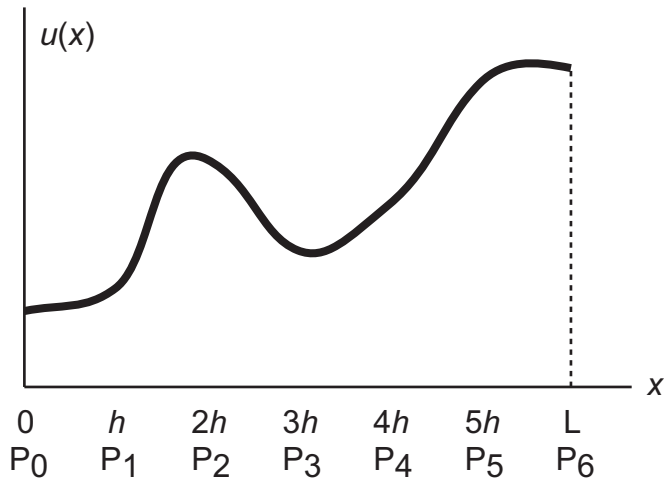


区分線形補間

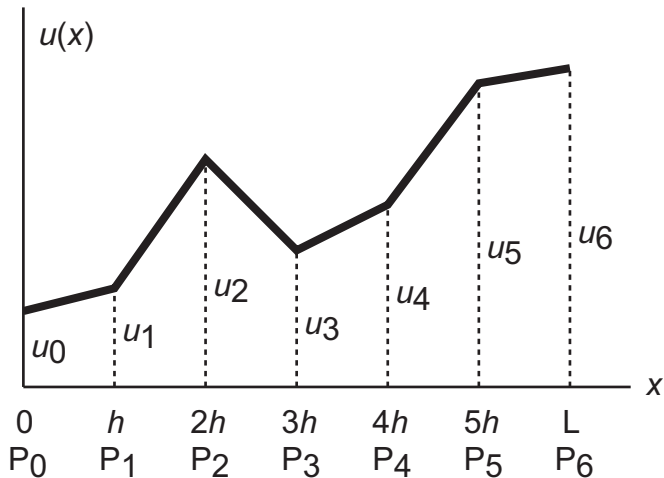
$$u(x) = \begin{cases} u_0 N_{0,1}(x) + u_1 N_{1,0}(x) & (x_0 \leq x \leq x_1) \\ u_1 N_{1,2}(x) + u_2 N_{2,1}(x) & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ u_2 N_{2,3}(x) + u_3 N_{3,2}(x) & (x_2 \leq x \leq x_3) \\ \vdots & \\ u_5 N_{5,6}(x) + u_6 N_{6,5}(x) & (x_5 \leq x \leq x_6) \end{cases}$$

関数 $u(x)$ を 7 個の変数 $u_0, u_1, \dots, u_6$ で表す

未知関数の近似



未知関数の近似



未知関数の近似

小区間 $[x_i, x_j]$:

$$N_{i,j}(x) = \frac{x_j - x}{h},$$

$$N'_{i,j}(x) = \frac{-1}{h},$$

$$N_{j,i}(x) = \frac{x - x_i}{h}$$

$$N'_{j,i}(x) = \frac{1}{h}$$

$$u(x) = u_i N_{i,j}(x) + u_j N_{j,i}(x)$$

$$\frac{du}{dx} = u_i N'_{i,j}(x) + u_j N'_{j,i}(x)$$

$$= u_i \frac{-1}{h} + u_j \frac{1}{h}$$

$$= \frac{-u_i + u_j}{h}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

弾性ポテンシャルエネルギー

⇒ 7個の変数 $u_0, u_1, \dots, u_6$ で表す
変位ベクトル

$$\mathbf{u}_N = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix}$$

積分を分解

$$\int_0^L = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_3} + \dots + \int_{x_5}^{x_6}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

ヤング率 E が一定と仮定

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx &= \int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{2} EA \left(\frac{-u_i + u_j}{h} \right)^2 dx \\&= \frac{1}{2} \frac{E}{h^2} (-u_i + u_j)^2 \int_{x_i}^{x_j} A dx \\&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{i,j} & -V_{i,j} \\ -V_{i,j} & V_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ここで

$$V_{i,j} = \int_{x_i}^{x_j} A dx$$

$\Rightarrow$ 小区間 $[x_i, x_j]$ で切り取られる領域の体積

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} \\ -V_{0,1} & V_{0,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{1,2} & -V_{1,2} \\ -V_{1,2} & V_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{2,3} & -V_{2,3} \\ -V_{2,3} & V_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \dots + \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_5 & u_6 \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{5,6} & -V_{5,6} \\ -V_{5,6} & V_{5,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N$$

剛性行列 $K =$

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} & & & & & \\ -V_{0,1} & V_{0,1} + V_{1,2} & -V_{1,2} & & & & \\ & -V_{1,2} & V_{1,2} + V_{2,3} & -V_{2,3} & & & \\ & & -V_{2,3} & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & V_{4,5} + V_{5,6} & -V_{5,6} & \\ & & & & -V_{5,6} & V_{5,6} & \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N$$

剛性行列 $K =$

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} & & & & & \\ -V_{0,1} & V_{0,1} + V_{1,2} & -V_{1,2} & & & & \\ & -V_{1,2} & V_{1,2} + V_{2,3} & -V_{2,3} & & & \\ & & -V_{2,3} & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & V_{4,5} + V_{5,6} & -V_{5,6} \\ & & & & -V_{5,6} & V_{5,6} \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N$$

剛性行列 $K =$

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} & & & & & \\ -V_{0,1} & V_{0,1} + V_{1,2} & -V_{1,2} & & & & \\ & -V_{1,2} & V_{1,2} + V_{2,3} & -V_{2,3} & & & \\ & & -V_{2,3} & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & V_{4,5} + V_{5,6} & -V_{5,6} \\ & & & & -V_{5,6} & V_{5,6} \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N$$

剛性行列 $K =$

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} & & & & & \\ -V_{0,1} & V_{0,1} + V_{1,2} & -V_{1,2} & & & & \\ & -V_{1,2} & V_{1,2} + V_{2,3} & -V_{2,3} & & & \\ & & -V_{2,3} & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & V_{4,5} + V_{5,6} & -V_{5,6} & \\ & & & & -V_{5,6} & V_{5,6} & \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

特に断面積 A が一定の場合 $V_{i,j} = Ah$

$$K = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

特に断面積 A が一定の場合 $V_{i,j} = Ah$

$$K = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & & & & \\ & & -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & & & -1 & 1+1 & -1 & & \\ & & & & -1 & 1+1 & -1 & \\ & & & & & -1 & 1+1 & -1 \\ & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

特に断面積 A が一定の場合 $V_{i,j} = Ah$

$$K = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & & & & \\ & & -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & & & -1 & 1+1 & -1 & & \\ & & & & -1 & 1+1 & -1 & \\ & & & & & -1 & 1+1 & -1 \\ & & & & & & -1 & 1+1 \end{bmatrix}$$

仕事

外力 f による仕事 $W = f u(L) = f u_6$

$$W = \mathbf{f}^\top \mathbf{u}_N$$

ただし

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

制約

幾何制約 $u(0) = u_0 = 0$

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N = 0$$

ただし

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

積分表現を有限個の変数で表現

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & I = U - W \\ \text{subject to} \quad & u(0) = 0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & I(\mathbf{u}_N) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N - \mathbf{f}^\top \mathbf{u}_N \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N = 0 \end{aligned}$$

積分表現を最小化(最大化)する変数を計算

制約付き最小化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & l(\mathbf{u}_N) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N - \mathbf{f}^\top \mathbf{u}_N, \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N = 0 \end{aligned}$$

⇓ ラグランジュの未定乗数を導入

制約なし最小化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & J(\mathbf{u}_N, \lambda) = l(\mathbf{u}_N) - \lambda \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N \\ & = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N - \mathbf{f}^\top \mathbf{u}_N - \lambda \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N \end{aligned}$$

積分表現を最小化(最大化)する変数を計算

⇓

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}_N} &= K\mathbf{u}_N - \mathbf{f} - \lambda\mathbf{a} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= -\mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N = 0\end{aligned}$$

⇓

ベクトル形式

$$\left[\begin{array}{c|c} K & -\mathbf{a} \\ \hline -\mathbf{a}^\top & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_N \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

積分表現を最小化(最大化)する変数を計算

⇓

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}_N} &= K \mathbf{u}_N - \mathbf{f} - \lambda \mathbf{a} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= -\mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N = 0\end{aligned}$$

⇓

ベクトル形式

$$\left[\begin{array}{c|c} K & -\mathbf{a} \\ \hline -\mathbf{a}^\top & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_N \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

積分表現を最小化(最大化)する変数を計算

⇓

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}_N} &= K \mathbf{u}_N - \mathbf{f} - \lambda \mathbf{a} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= -\mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N = 0\end{aligned}$$

⇓

ベクトル形式

$$\left[\begin{array}{c|c} K & -\mathbf{a} \\ \hline -\mathbf{a}^\top & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_N \\ \lambda \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f} \\ 0 \end{array} \right]$$

係数行列は正則 $\implies$ 上式を解いて $\mathbf{u}_N$ と λ の値を求める

サンプルプログラム beam_static.m

% ビームの静的変形（断面積一定）

```
L = 10; A = 2;
```

```
n = 6; h = L/n;
```

```
E = 200;
```

```
fext = 5;
```

```
e0 = 2*ones(n+1,1);
```

```
e0(1) = 1; e0(n+1) = 1;
```

```
e1 = (-1)*ones(n+1,1);
```

```
K = (E*A/h)*spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角行列
```

```
fprintf("剛性行列 K\n");
```

```
full(K)
```

サンプルプログラム beam_static.m

```
f = zeros(n+1,1);  
f(n+1) = fext;  
fprintf("ベクトル f\n");  
f
```

```
a = zeros(n+1,1);  
a(1) = 1;  
fprintf("ベクトル a\n");  
a
```

```
mat = [ K,  -a; ...  
        -a',  0 ];  
vec = [ f; 0 ];  
sol = mat \ vec;  
un = sol(1:n+1);  
lambda = sol(n+2);
```

サンプルプログラム beam_static.m

```
>> beam_static
```

剛性行列 K

```
ans =
```

240	-240	0	0	0	0	0
-240	480	-240	0	0	0	0
0	-240	480	-240	0	0	0
0	0	-240	480	-240	0	0
0	0	0	-240	480	-240	0
0	0	0	0	-240	480	-240
0	0	0	0	0	-240	240

ベクトル f

```
f =
```

0
0
0
0

サンプルプログラム beam_static.m

計算結果

un =

0

0.0208

0.0417

0.0625

0.0833

0.1042

0.1250

lambda =

-5.0000

サンプルプログラム beam_static.m

伸び

ans =

0.0208

0.0208

0.0208

0.0208

0.0208

0.0208

サンプルプログラム beam_static_irregular.m

% ビームの静的変形（断面積が一定でない）

```
L = 10;
A = @(x) (2 - (1/10).*x); % 断面積を表す関数
V = @(xi,xj) (2*(xj-xi) - (1/20)*(xj.^2-xi.^2)); % 小区間で切り取られる領域の体積
n = 6; h = L/n;
E = 200;
fext = 5;

xi = h*[0:n-1]';
xj = h*[1:n]';
Vij = V(xi,xj);
```

サンプルプログラム beam_static_irregular.m

```
e0 = [Vij;0] + [0;Vij];  
em = (-1)*[Vij;0];  
ep = (-1)*[0;Vij];  
K = (E/(h^2))*spdiags([em e0 ep], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角  
行列  
fprintf("剛性行列 K\n");  
full(K)  
  
f = zeros(n+1,1);  
f(n+1) = fext;  
fprintf("ベクトル f\n");  
f  
  
a = zeros(n+1,1);  
a(1) = 1;  
fprintf("ベクトル a\n");
```

サンプルプログラム beam_static_irregular.m

```
>> beam_static_irregular
```

剛性行列 K

```
ans =
```

230.0000	-230.0000	0	0	0	0
-230.0000	440.0000	-210.0000	0	0	0
0	-210.0000	400.0000	-190.0000	0	0
0	0	-190.0000	360.0000	-170.0000	0
0	0	0	-170.0000	320.0000	-150.0000
0	0	0	0	-150.0000	280.0000
0	0	0	0	0	-130.0000

ベクトル f

```
f =
```

0
0
0
0

サンプルプログラム beam_static_irregular.m

計算結果

un =

0

0.0217

0.0455

0.0719

0.1013

0.1346

0.1731

lambda =

-5.0000

サンプルプログラム beam_static_irregular.m

伸び

ans =

0.0217

0.0238

0.0263

0.0294

0.0333

0.0385

断面積が一定でない場合

体積

$$V_{i,j} = \int_{x_i}^{x_j} A(x) \, dx$$

を数値積分で計算

MATLAB において定積分

$$S = \int_a^b f(x) \, dx$$

の値を数値計算

```
S = integral(f, a, b);
```

断面積が一定でない場合

断面積 $A(x) = a - 2bx$ (a, b は正の定数で $A(L) > 0$ を満たす)

```
E = 2; rho = 1.0;
```

```
L = 10; a = 4; b = 0.1;
```

```
area = @(x) a - 2*b*x;
```

```
n = 4; h = L/n;
```

```
nodal = h*[0:n];
```

```
for i=1:n
```

```
    Vs(i) = integral(area, nodal(i), nodal(i+1));
```

```
end
```

```
V = zeros(n+1,n+1);
```

```
for i=1:n
```

```
    V(i:i+1,i:i+1) = V(i:i+1,i:i+1) + Vs(i)*[1,-1;-1,1];
```

```
end
```

```
K = E/h/h*V;
```

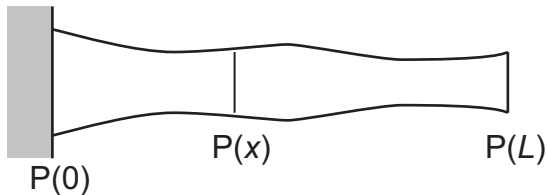
断面積が一定でない場合

```
>> irregular_beam
```

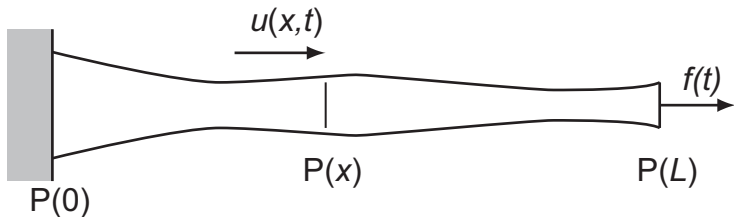
```
K =
```

3.0000	-3.0000	0	0	0
-3.0000	5.6000	-2.6000	0	0
0	-2.6000	4.8000	-2.2000	0
0	0	-2.2000	4.0000	-1.8000
0	0	0	-1.8000	1.8000

ビームの一次元動的変形



時刻 0



時刻 t

運動エネルギーの近似

ビームの運動エネルギー

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 dx$$

ビームの運動エネルギーを 7 個のパラメータ $u_0, u_1, \dots, u_6$ で表す

小区間 $[x_i, x_j]$ における関数 $u(x, t)$ の区分線形補間 :

$$u(x, t) = u_i(t) N_{i,j}(x) + u_j(t) N_{j,i}(x), \quad (x_i \leq x \leq x_j)$$

時間微分

$$\dot{u}(x, t) = \dot{u}_i(t) N_{i,j}(x) + \dot{u}_j(t) N_{j,i}(x), \quad (x_i \leq x \leq x_j)$$

運動エネルギーの近似

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \rho A \{ \dot{u}_i(t) N_{i,j}(x) + \dot{u}_j(t) N_{j,i}(x) \}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_i & \dot{u}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{i,j;i,j} & m_{i,j;j,i} \\ m_{j,i;i,j} & m_{j,i;j,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}m_{i,j;i,j} &= \int_{x_i}^{x_j} \rho A (N_{i,j})^2 dx, & m_{j,i;j,i} &= \int_{x_i}^{x_j} \rho A (N_{j,i})^2 dx \\ m_{i,j;j,i} &= m_{j,i;i,j} = \int_{x_i}^{x_j} \rho A N_{i,j} N_{j,i} dx\end{aligned}$$

運動エネルギーの近似

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{u}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_0 & \dot{u}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{0,1;0,1} & m_{0,1;1,0} \\ m_{1,0;0,1} & m_{1,0;1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{u}_1 \end{bmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 & \dot{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,2;1,2} & m_{1,2;2,1} \\ m_{2,1;1,2} & m_{2,1;2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_2 & \dot{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{2,3;2,3} & m_{2,3;3,2} \\ m_{3,2;2,3} & m_{3,2;3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} + \dots + \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_5 & \dot{u}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{5,6;5,6} & m_{5,6;6,5} \\ m_{6,5;5,6} & m_{6,5;6,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_N^\top \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_N \end{aligned}$$

運動エネルギーの近似

慣性行列 $M =$

$$\begin{bmatrix} m_{0,1; 0,1} & m_{0,1; 1,0} & & & & & \\ m_{1,0; 0,1} & m_{1,0; 1,0} + m_{1,2; 1,2} & m_{1,2; 2,1} & & & & \\ & m_{2,1; 1,2} & \ddots & & & & \\ & & & m_{4,5; 5,4} & & & \\ & & & m_{5,4; 4,5} & m_{5,4; 5,4} + m_{5,6; 5,6} & m_{5,6; 6,5} & \\ & & & & m_{6,5; 5,6} & m_{6,5; 6,5} & \end{bmatrix}$$

例

断面積 A と密度 ρ が一定の場合

$$\int_{x_i}^{x_j} (N_{i,j})^2 dx = \int_{x_i}^{x_j} (N_{j,i})^2 dx = \frac{h}{3}$$
$$\int_{x_i}^{x_j} N_{i,j} N_{j,i} dx = \int_{x_i}^{x_j} N_{j,i} N_{i,j} dx = \frac{h}{6}$$

慣性行列

$$M = \frac{\rho Ah}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

例

断面積 A と密度 ρ が一定の場合

$$M = \frac{\rho Ah}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

例

断面積 A と密度 ρ が一定の場合

$$M = \frac{\rho Ah}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2+2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2+2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 2+2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2+2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2+2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2+2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

例

断面積 A と密度 ρ が一定の場合

$$M = \frac{\rho Ah}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 1 & 2+2 & 1 & & & & \\ & 1 & 2+2 & 1 & & & \\ & & 1 & 2+2 & 1 & & \\ & & & 1 & 2+2 & 1 & \\ & & & & 1 & 2+2 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

断面積が一定でない場合

断面積 $A(x) = a - 2bx$ (a, b は正の定数で $A(L) > 0$ を満たす)

```
E = 2; rho = 1.0;
```

```
L = 10; a = 4; b = 0.1;
```

```
area = @(x) a - 2*b*x;
```

```
n = 4; h = L/n;
```

```
nodal = h*[0:n];
```

```
N = @(i,j,x) (x-nodal(j))/(nodal(i)-nodal(j));
```

```
ANiipNjpp = @(x, i, ip, j, jp) area(x).*N(i,ip,x).*N(j,jp
```

```
M = zeros(n+1,n+1);
```

```
for i=1:n
```

```
    Vsii = integral(@(x) ANiipNjpp(x, i, i+1, i, i+1),
```

```
    Vsiip = integral(@(x) ANiipNjpp(x, i, i+1, i+1, i),
```

```
    Vsipip = integral(@(x) ANiipNjpp(x, i+1, i, i+1, i),
```

```
    M(i:i+1,i:i+1) = M(i:i+1,i:i+1) + rho*[ Vsii, Vsiip;
```

断面積が一定でない場合

```
>> irregular_beam
```

```
M =
```

3.2292	1.5625	0	0	0
1.5625	5.8333	1.3542	0	0
0	1.3542	5.0000	1.1458	0
0	0	1.1458	4.1667	0.9375
0	0	0	0.9375	1.7708

ラグランジアン

ラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{u}_N, \dot{\mathbf{u}}_N) &= T - U + W + \lambda R \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_N^\top M \dot{\mathbf{u}}_N - \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N + \mathbf{f}^\top \mathbf{u}_N + \lambda \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N\end{aligned}$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}_N} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_N} = -K \mathbf{u}_N + \mathbf{f} + \lambda \mathbf{a} - M \ddot{\mathbf{u}}_N = \mathbf{0}$$

制約安定化

$$R = \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N$$

$$\dot{R} = \mathbf{a}^\top \dot{\mathbf{u}}_N$$

$$\ddot{R} = \mathbf{a}^\top \ddot{\mathbf{u}}_N$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{a}^\top \ddot{\mathbf{u}}_N + 2\alpha \mathbf{a}^\top \dot{\mathbf{u}}_N + \alpha^2 \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_N = 0$$

常微分方程式

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{u}}_{\mathrm{N}} - \lambda \mathbf{a} &= -K\mathbf{u}_{\mathrm{N}} + \mathbf{f} \\ -\mathbf{a}^{\top} \ddot{\mathbf{u}}_{\mathrm{N}} &= \mathbf{a}^{\top} (2\alpha \dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{N}} + \alpha^2 \mathbf{u}_{\mathrm{N}}) \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{N}} &= \mathbf{v}_{\mathrm{N}} \\ \begin{bmatrix} M & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a}^{\top} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{N}} \\ \lambda \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -K\mathbf{u}_{\mathrm{N}} + \mathbf{f} \\ \mathbf{a}^{\top} (2\alpha \mathbf{v}_{\mathrm{N}} + \alpha^2 \mathbf{u}_{\mathrm{N}}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

beam_dynamic_equation_param.m

```
function dotq = beam_dynamic_equation_param (t,q, n,M,B,K,a,alpha)
% ビームの運動方程式
    un = q(1:n+1);
    vn = q(n+2:2*(n+1));

    f = zeros(n+1,1);
    f(n+1) = beam_dynamic_external_force(t);

    mat = [ M,  -a; ...
            -a',  0 ];
    vec = [ -K*un-B*vn+f; ...
            a'*(2*alpha*vn + (alpha^2)*un) ];
    sol = mat \ vec;
    dotvn = sol(1:n+1);

    dotq = [ vn; dotvn ];

end
```

beam_dynamic_external_force.m

```
function f = beam_dynamic_external_force (t)
% ビームに作用する外力
% 正弦波
%f = 5 * sin(2*pi*t);
% ステップ
f = 5 * (t <= 2);
end
```

サンプルプログラム beam_dynamic.m

% ビームの動的変形（断面積一定）

L = 10; A = 2;

n = 6; h = L/n;

E = 200; % 弾性率（ヤング率）

c = 10; % 粘性率

rho = 0.5; % 密度

alpha = 2000; % 制約安定化法

tf = 20.0; % シミュレーションの終端時刻

e0 = (4/6)*ones(n+1,1);

e0(1) = (2/6); e0(n+1) = (2/6);

e1 = (1/6)*ones(n+1,1);

M = (rho*A*h)*spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角
行列

fprintf("慣性行列 M\n");

full(M)

サンプルプログラム beam_dynamic.m

```
e0 = 2*ones(n+1,1);  
e0(1) = 1; e0(n+1) = 1;  
e1 = (-1)*ones(n+1,1);  
K = (E*A/h)*spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角行列  
fprintf("剛性行列 K\n");  
full(K)  
  
B = (c*A/h)*spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角行列  
fprintf("粘性行列 B\n");  
full(B)  
  
a = zeros(n+1,1);  
a(1) = 1;  
fprintf("ベクトル a\n");  
a
```

サンプルプログラム beam_dynamic.m

```
beam_dynamic_equation = @(t,q) beam_dynamic_equation_param (t

interval = [0,tf];
qinit = [ zeros(n+1,1); zeros(n+1,1) ];
[time,q] = ode45(beam_dynamic_equation, interval, qinit);

clf;
plot(time, beam_dynamic_external_force(time));
fprintf("外力\n");
fprintf("一時停止：何かのキーを押してください\n");
pause;

clf;
hold on;
for k=1:n+1
    plot(time,q(:,k));
end
```

サンプルプログラム beam_dynamic.m

```
>> beam_dynamic
```

慣性行列 M

```
ans =
```

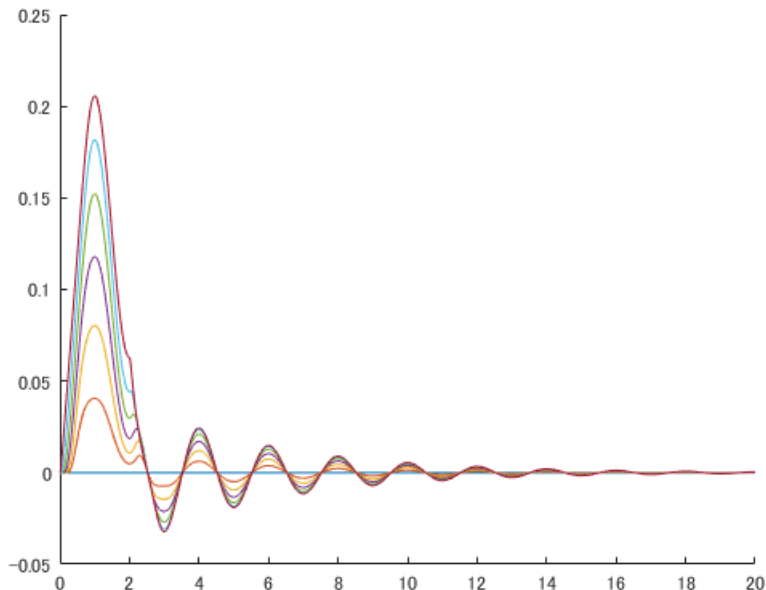
0.5556	0.2778	0	0	0	0
0.2778	1.1111	0.2778	0	0	0
0	0.2778	1.1111	0.2778	0	0
0	0	0.2778	1.1111	0.2778	0
0	0	0	0.2778	1.1111	0.2778
0	0	0	0	0.2778	1.1111
0	0	0	0	0	0.2778

剛性行列 K

```
ans =
```

240	-240	0	0	0	0
-240	480	-240	0	0	0
0	-240	480	-240	0	0
0	0	-240	480	-240	0

サンプルプログラム beam_dynamic.m



まとめ

有限要素法

- エネルギーの積分表現
- エネルギーを有限個の変数で近似

ビームの変形

- ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N, \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_N^\top M \dot{\mathbf{u}}_N$$

- 静的な変形 $\implies$ 釣り合いの方程式
- 動的な変形 $\implies$ ラグランジュの運動方程式

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「有限要素法（一次元）」
締切：2025 年 7 月 14 日（月曜）01:00 AM

ベクトルに関する微分

ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

スカラー y のベクトル $\mathbf{x}$ に関する微分

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

内積の微分

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

内積

$$y = \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = b_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = b_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = b_3$$

内積の微分

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{b}^\top \mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

二次形式の微分

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

二次形式

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \{ a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} \{ a_{11} \cdot 2x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 \} \\ &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \end{aligned}$$

二次形式の微分

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

二次形式の微分

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \right) = A \mathbf{x}$$