

数値計算：常微分方程式

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

講義の流れ

- ① 常微分方程式の標準形
- ② オイラー法, ホイン法, ルンゲ・クッタ法
- ③ ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法
- ④ 制約を有する常微分方程式
- ⑤ 制約安定化法
- ⑥ まとめ

標準形

時刻 t に従う変数 x, y に関する一階の常微分方程式

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

状態変数ベクトル

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

状態変数ベクトル \mathbf{q} から、その時間微分 $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}, \dot{y}]^T$ を計算

標準形

ファイル `name.m` : 標準形を記述

```
function dotq = name (t, q)
    x = q(1);
    y = q(2);
    dotx = f(x,y);
    doty = g(x,y);
    dotq = [dotx; doty];
end
```

標準形

ファイル `calc.m` : 標準形 `name.m` を数値的に解き, グラフを描く

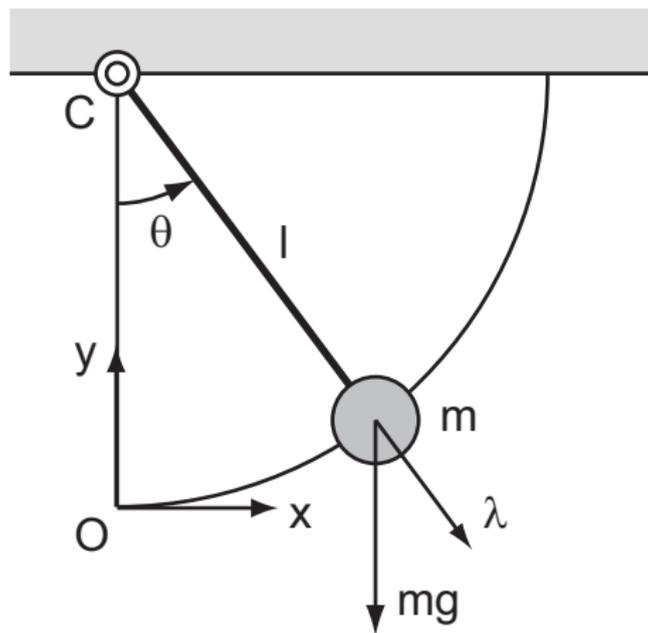
```
interval = 0:0.001:4; % 固定ステップ
%interval = [0,4]; % 可変ステップ
qinit = [2;0];
[time, q] = ode45(@name, interval, qinit);
```

```
plot(time, q(:,1)); % t-x グラフ
pause;
```

```
plot(time, q(:,2)); % t-y グラフ
pause;
```

```
plot(q(:,1), q(:,2)); % x-y グラフ
pause;
```

単振り子



単振り子

θ 時刻 t における単振り子の振れ角

支点 C まわりの慣性モーメント

重力により支点 C まわりに作用するモーメント

振れ角の角加速度

$$J = ml^2$$

$$-mgl \sin \theta$$

$$\ddot{\theta}$$

支点 C まわりの回転に関する運動方程式

$$J\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

⇒ 変数 θ に関する二階の常微分方程式

単振り子

運動方程式を一階の微分方程式に変換

新しい変数 $\omega \triangleq \dot{\theta}$ を導入

$$J\dot{\omega} = -mgl \sin \theta$$

新しい変数 ω の定義式と上式の両辺を $J = ml^2$ で割った式

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

⇒ 二つの変数 θ と ω に関する一階の微分方程式

標準形

常微分方程式の標準形

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \sin \theta\end{aligned}$$

変数 θ と ω の値を与える.



状態変数の時間微分 $\dot{\theta}$ と $\dot{\omega}$ の値を計算できる.

標準形

状態変数ベクトル

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

ベクトル値関数

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} \omega \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix}$$

常微分方程式の標準形

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

⇓

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q})$$

標準形

常微分方程式を数値的に解く

Step 1 常微分方程式を標準形に変換

Step 2 変換した標準形をアルゴリズムに適用

(ルンゲ・クッタ法, ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法など)

標準形に変換すれば, 既存のソフトウェアを用いることができる

MATLAB

関数ファイル pendulum_ode.m

```
function dotq = pendulum_ode(t, q)
    global len;
    global grav;

    theta = q(1);
    omega = q(2);

    dottheta = omega;
    dotomega = -(grav/len)*sin(theta);

    dotq = [dottheta; dotomega];
end
```

MATLAB

スクリプトファイル pendulum.m

```
global len;  
global mass;  
global grav;  
  
len = 2.0;  
mass = 0.01;  
grav = 9.8;  
  
interval = 0:0.1:10; % 固定ステップ  
qinit = [pi/3; 0]; % 初期値  
[time, q] = ode45(@pendulum_ode, interval, qinit);
```

MATLAB

スクリプトファイル pendulum.m

```
[time, q] = ode45(@pendulum_ode, interval, qinit);
```

```
plot(time, q(:,1), time, q(:,2), '--');
```

```
title(['simple pendulum : l = ', num2str(len), ', m = ',
```

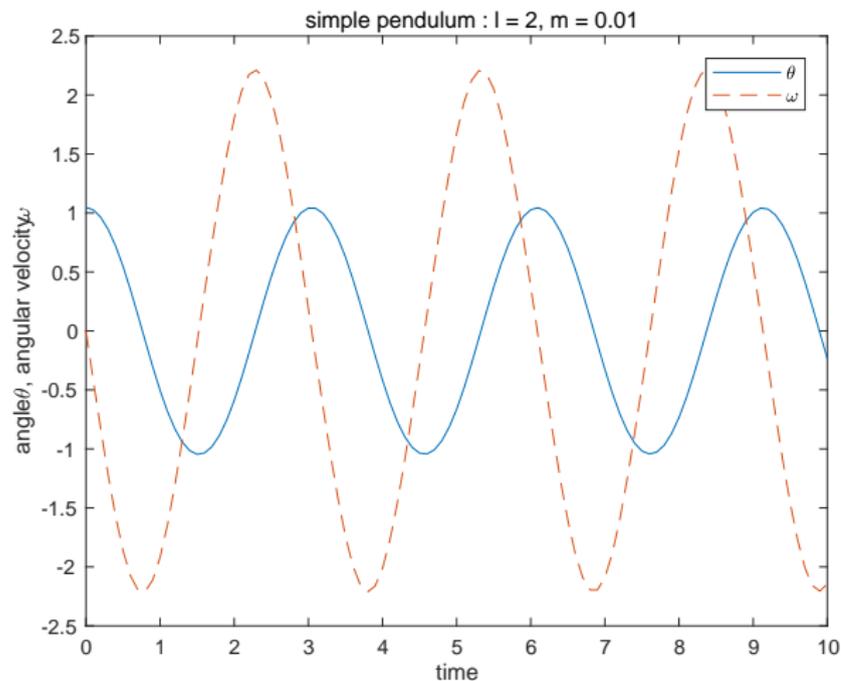
```
xlabel('time');
```

```
ylabel('angle \theta, angular velocity \omega');
```

```
legend('\theta', '\omega');
```

MATLAB

```
>> pendulum
```



MATLAB

```
>> time
```

```
time =
```

```
    0  
0.1000  
0.2000  
0.3000  
0.4000  
0.5000  
0.6000  
0.7000  
0.8000  
0.9000  
1.0000  
1.1000
```

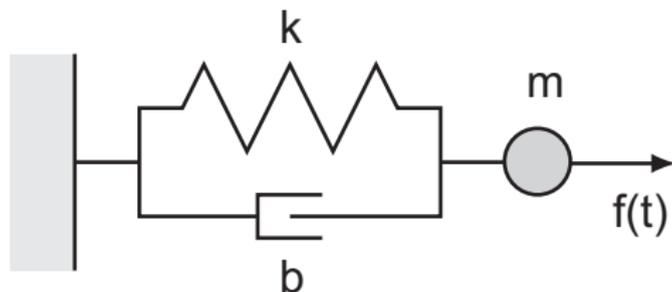
MATLAB

```
>> q
```

```
q =
```

```
1.0472         0
1.0260    -0.4226
0.9630    -0.8343
0.8600    -1.2228
0.7199    -1.5715
0.5476    -1.8619
0.3500    -2.0750
0.1356    -2.1942
-0.0852    -2.2071
-0.3019    -2.1117
-0.5043    -1.9174
-0.6829    -1.6427
```

質点・バネ・ダンパー系



運動方程式

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + f(t)$$

質点・バネ・ダンパー系

新しい変数

$$v \triangleq \dot{x}$$

運動方程式

$$m\dot{v} = -bv - kx + f(t)$$

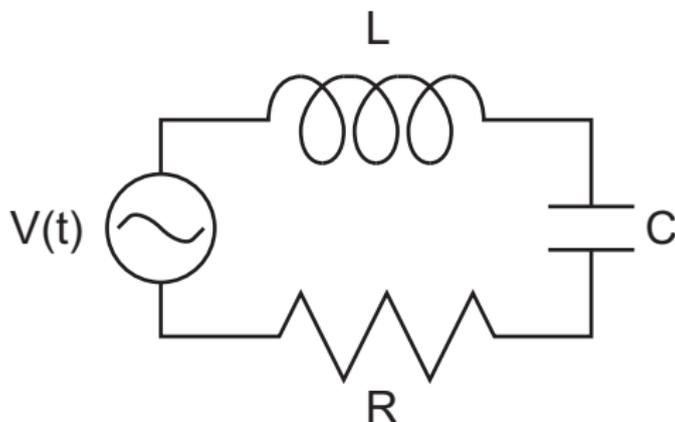
↓

$$\dot{x} = v$$

$$m\dot{v} = -bv - kx + f(t)$$

⇒ 二つの変数 x と v に関する一階の微分方程式

LCR回路



回路方程式

$$V(t) - Li - \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau - Ri = 0$$

LCR回路

新しい変数

$$q(t) \triangleq \int_0^t i(\tau) d\tau$$

上式を時間微分

$$\dot{q} = i$$

回路方程式

$$V(t) - Li\dot{} - \frac{1}{C}q - Ri = 0$$

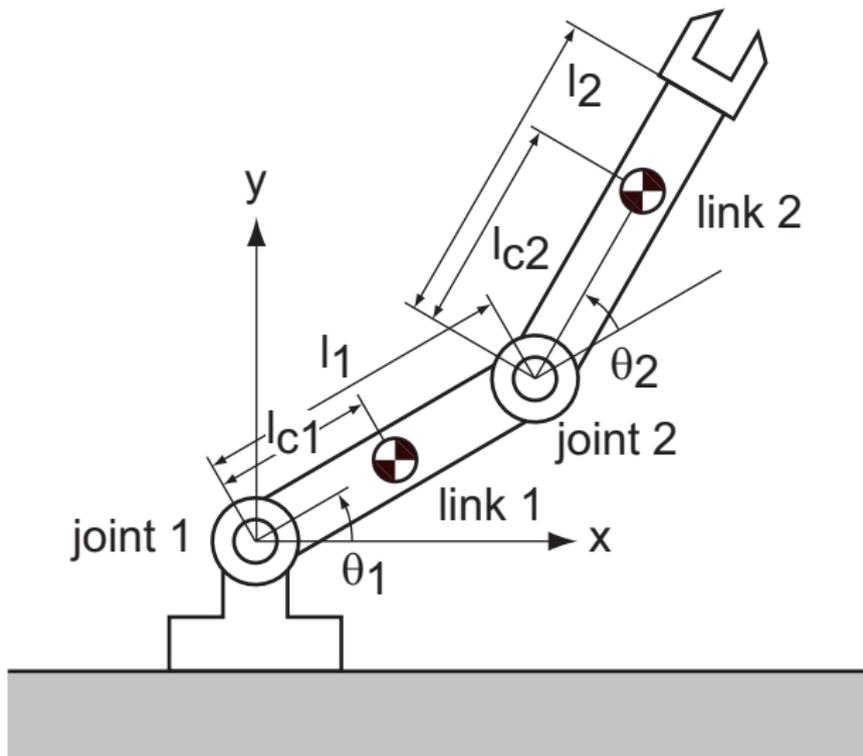
⇓

$$\dot{q} = i$$

$$Li\dot{} = -Ri - \frac{1}{C}q + V(t)$$

⇒ 二つの変数 q と i に関する一階の微分方程式

ロボットアーム



ロボットアーム

ロボットアームの運動方程式

$$H_{11}\ddot{\theta}_1 + H_{12}\ddot{\theta}_2 = h_{12}\dot{\theta}_2^2 + 2h_{12}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - G_1 - G_{12} + \tau_1$$

$$H_{22}\ddot{\theta}_2 + H_{12}\ddot{\theta}_1 = -h_{12}\dot{\theta}_1^2 - G_{12} + \tau_2$$

ただし

$$H_{11} = J_1 + m_1 l_{c1}^2 + J_2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2)$$

$$H_{12} = J_2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_2)$$

$$H_{22} = J_2 + m_2 l_{c2}^2$$

$$h_{12} = m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2$$

$$G_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos \theta_1$$

$$G_{12} = m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

ロボットアーム

$$\omega_1 \triangleq \dot{\theta}_1, \quad \omega_2 \triangleq \dot{\theta}_2$$

常微分方程式の標準形

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{12}\omega_2^2 + 2h_{12}\omega_1\omega_2 - G_1 - G_{12} + \tau_1 \\ -h_{12}\omega_1^2 - G_{12} + \tau_2 \end{bmatrix}$$

変数 $\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2$ の値を与える。

⇒ 上式左辺の行列の要素と右辺のベクトルの要素の値を計算。

⇒ 連立一次方程式を解き時間微分 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ の値を計算する。

ロボットアーム

状態変数ベクトル

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

常微分方程式の標準形

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q})$$

常微分方程式の標準形

- 状態変数に関する一階の微分方程式
- 状態変数の値を与えると、その時間微分の値を計算できる。
- 時間微分の値が一意に決まる。

常微分方程式の標準形

標準形か否かを判定せよ.

(a) $\dot{x} = 3\sqrt{x}$

(b) $\dot{x}^2 = 9x$

(c) $\dot{x}^2 = 9x \quad (\dot{x} \leq 0)$

(d)
$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = x \\ \dot{x} - \dot{y} = y \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} \dot{x} - 2\dot{y} = x \\ -2\dot{x} + 4\dot{y} = y \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} 2\dot{x} + p = x \\ 2\dot{y} + 3p = y \\ \dot{x} + 3\dot{y} = x - y \end{cases}$$

常微分方程式の数値解法

常微分方程式 (1 変数) の標準形

$$\dot{x} = f(t, x)$$

を数値的に解く.

微分方程式を数値的に解く

離散的な時刻 $t_n = nT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) における x の値を求める.
ステップ幅 T : 時間間隔を表す定数

常微分方程式の数値解法

オイラー法	(Euler method)
ホイン法	(Heun method)
ルンゲ・クッタ法	(Runge-Kutta method)

時刻 t_n における x の値 $x_n = x(t_n)$



時刻 t_{n+1} における x の値 $x_{n+1} = x(t_{n+1})$ を計算する漸化式

常微分方程式の初期値 $x_0 = x(0)$ から始めて漸化式を繰り返し適用
順次 $x_n = x(nT)$ ($n = 1, 2, \dots$) の値を求める。

常微分方程式の数値解法

微分方程式 $dx/dt = -2x$ をオイラー法で数値的に解く
初期値 $x(0) = 1.00$, ステップ幅 0.1

t	x
0.000000	1.000000
0.100000	0.818567
0.200000	0.670052
0.300000	0.548482
0.400000	0.448969
0.500000	0.367511
0.600000	0.300833
0.700000	0.246252
0.800000	0.201573
0.900000	0.165001
1.000000	0.135065

常微分方程式の数値解法

長所

- 解析的に解けない微分方程式を解くことができる
- シミュレーション（力学，回路，CG）

短所

- 方法によって解が異なる
- ステップ幅によって解が異なる

ステップ幅が大きい 計算した解が誤っている
ステップ幅が小さい 計算時間が要する

ステップ幅を小さく（たとえば半分）にして解が一致



もとのステップ幅で計算してよい。

オイラー法

オイラー法

$$x_{n+1} = x_n + Tf(t_n, x_n)$$

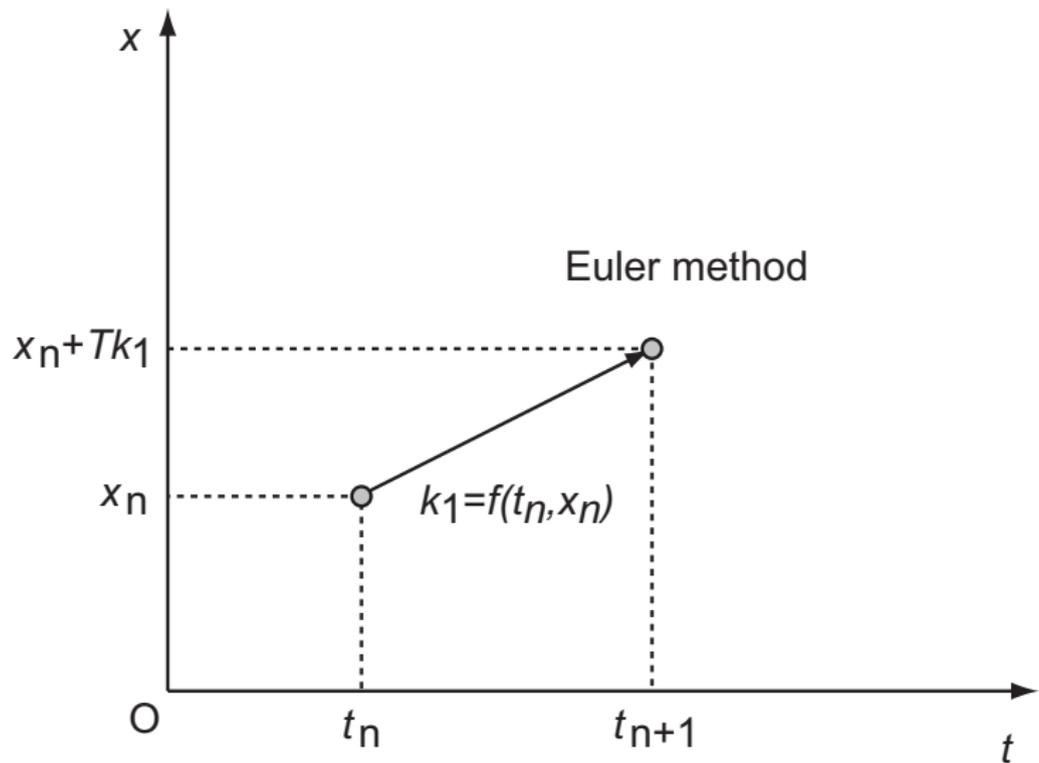
1 段解法 t と x の一つの組 (t_n, x_n) で $f(t, x)$ を計算

$x_{n+1} = x((n+1)T) = x(nT + T) = x(t_n + T)$ を一次の項まで展開

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x(t_n) + \dot{x}(t_n)T \\ &= x(t_n) + f(t_n, x(t_n))T \\ &= x_n + Tf(t_n, x_n)\end{aligned}$$

オイラー法の両辺は一次のオーダーまで一致

オイラー法



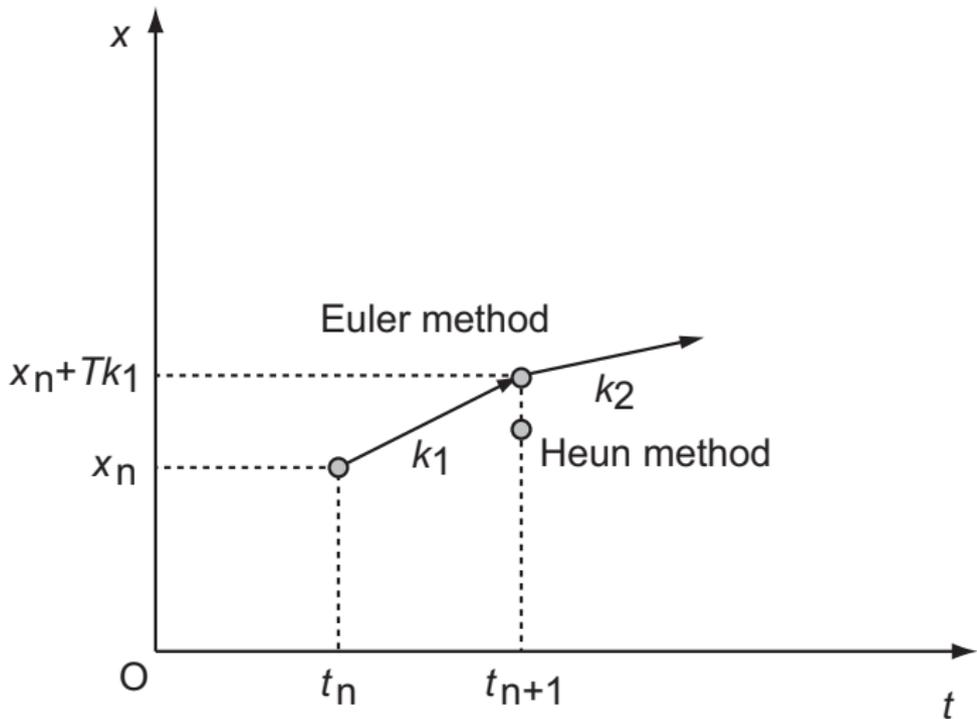
ホイン法

ホイン法

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{T}{2}(k_1 + k_2) \\k_1 &= f(t_n, x_n) \\k_2 &= f(t_n + T, x_n + Tk_1)\end{aligned}$$

2段解法 二つの組 (t_n, x_n) と $(t_n + T, x_n + Tk_1)$ で $f(t, x)$ を計算

ホイン法



$k_1 > k_2$ のとき $\ddot{x} < 0$

ホイン法

$x_{n+1} = x(t_n + T)$ を二次の項まで展開

$$x_{n+1} = x(t_n) + \dot{x}(t_n)T + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_n)T^2$$

$\dot{x} = f(t, x)$ の両辺を時間微分

$$\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} = f_t + f_x f$$

ホイン法の左辺

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)T + \frac{1}{2}(f_t + f_x f)T^2$$

ホイン法

k_2 を展開

$$\begin{aligned}k_2 &= f(t_n + T, x_n + Tk_1) = f(t_n, x_n) + f_t T + f_x Tk_1 \\ &= f + (f_t + f_x f) T\end{aligned}$$

ホイン法の右辺

$$\begin{aligned}x_n + \frac{T}{2}(k_1 + k_2) &= x_n + \frac{T}{2}(f + f + (f_t + f_x f) T) \\ &= x_n + fT + \frac{1}{2}(f_t + f_x f) T^2\end{aligned}$$

ホイン法の両辺は二次のオーダーまで一致

ルンゲ・クッタ法

ルンゲ・クッタ法

$$x_{n+1} = x_n + \frac{T}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}T, x_n + \frac{1}{2}Tk_1\right)$$

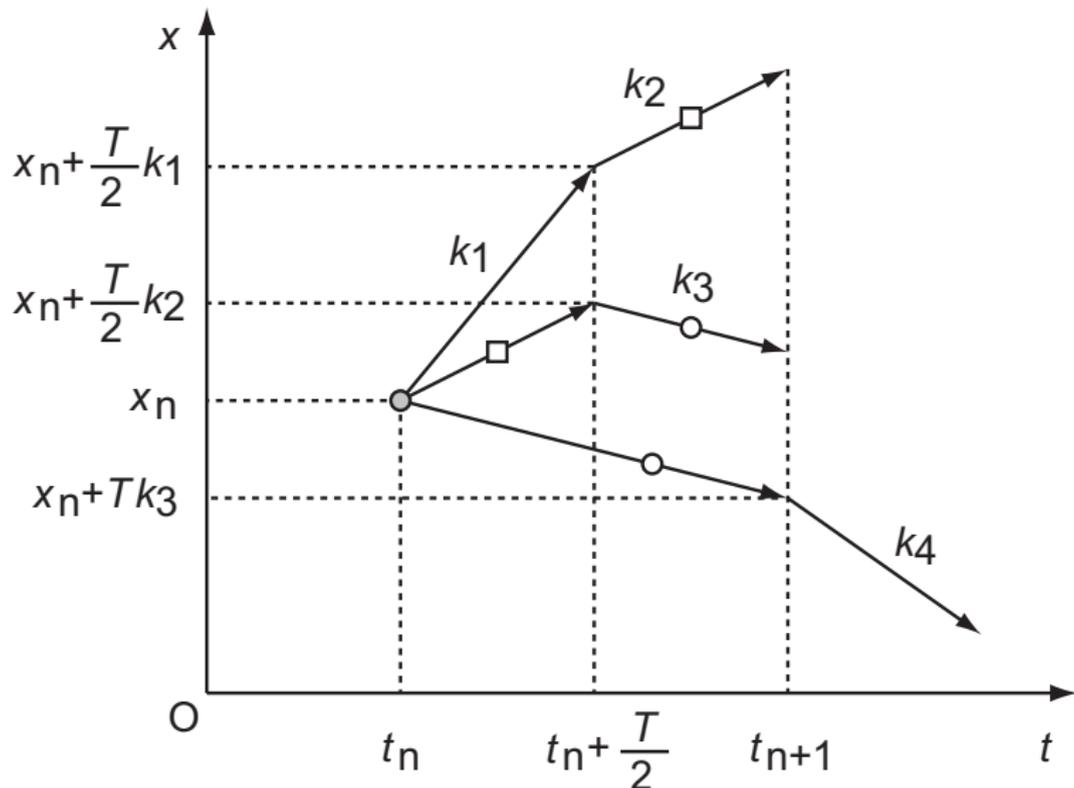
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}T, x_n + \frac{1}{2}Tk_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + T, x_n + Tk_3)$$

4段解法 t と x の四つの組で $f(t, x)$ を計算

ルンゲ・クッタ法の両辺は四次のオーダーまで一致

ルンゲ・クッタ法



階数とオーダー

階数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
オーダー	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7

階数 1 : オイラー法

階数 2 : ホイン法

階数 4 : ルンゲ・クッタ法

階数 5 以上ではオーダーは階数に達しない

常微分方程式の数値解法

常微分方程式 (多変数) の標準形

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q})$$

を数値的に解く。



オイラー法, ホイン法, ルンゲ・クッタ法の漸化式で

状態変数 $x \implies$ 状態変数ベクトル \mathbf{q}

スカラー関数 $f \implies$ ベクトル関数 \mathbf{f}

スカラー $k \implies$ ベクトル \mathbf{k}

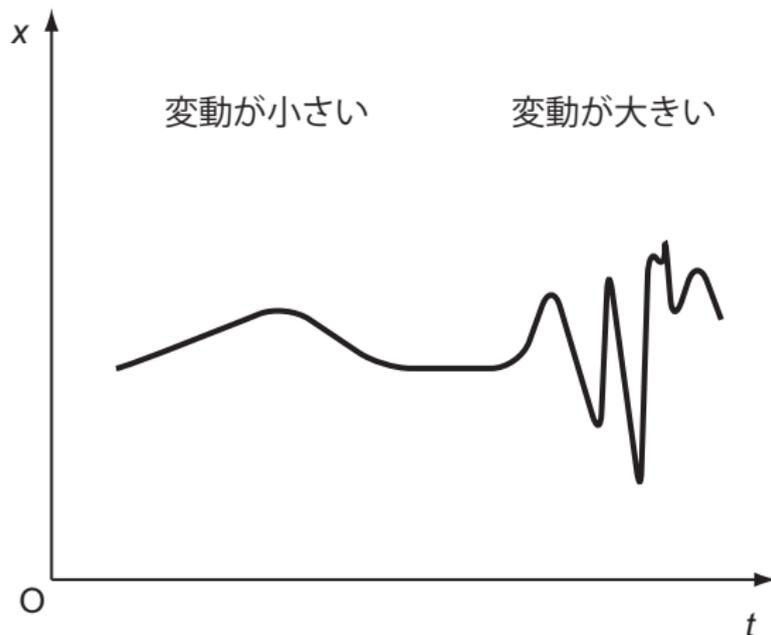
ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

オイラー法
ホイン法
ルンゲ・クッタ法

} ステップ幅固定

ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法 → ステップ幅可変

ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法



変動が小さい：大きいステップ幅
変動が大きい：小さいステップ幅

ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

6段階法

$$k_1 = f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{4}T, x_n + \frac{T}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{3}{8}T, x_n + \frac{T}{32}(3k_1 + 9k_2)\right)$$

$$k_4 = f\left(t_n + \frac{12}{13}T, x_n + \frac{T}{2179}(1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3)\right)$$

$$k_5 = f\left(t_n + T, x_n + T\left(\frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)\right)$$

$$k_6 = f\left(t_n + \frac{1}{2}T, x_n + T\left(-\frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)\right)$$

ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

5 次のオーダの解

$$x_{n+1} = x_n + T \left(\frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right)$$

4 次のオーダの解

$$x_{n+1}^* = x_n + T \left(\frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5 \right)$$

変動が小さい: x_{n+1} と x_{n+1}^* の差が小さい \rightarrow 大きいステップ幅

変動が大きい: x_{n+1} と x_{n+1}^* の差が大きい \rightarrow 小さいステップ幅

ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

ルンゲ・クッタ・フェールベルグ公式

- Step 1 5 次のオーダの解 x_{n+1} を計算する.
- Step 2 4 次のオーダの解 x_{n+1}^* を計算する.
- Step 3 次式で表される \hat{T} を計算する.

$$\hat{T} = \alpha T \left\{ \frac{\epsilon}{\|x_{n+1} - x_{n+1}^*\|} \right\}^{\frac{1}{5}}$$

ϵ は許容量を表す小さい正の定数, α は安全率で 0.8 から 0.9 の範囲から選ぶ.

- Step 4 時間ステップ T の値を \hat{T} 以下で選ぶ.

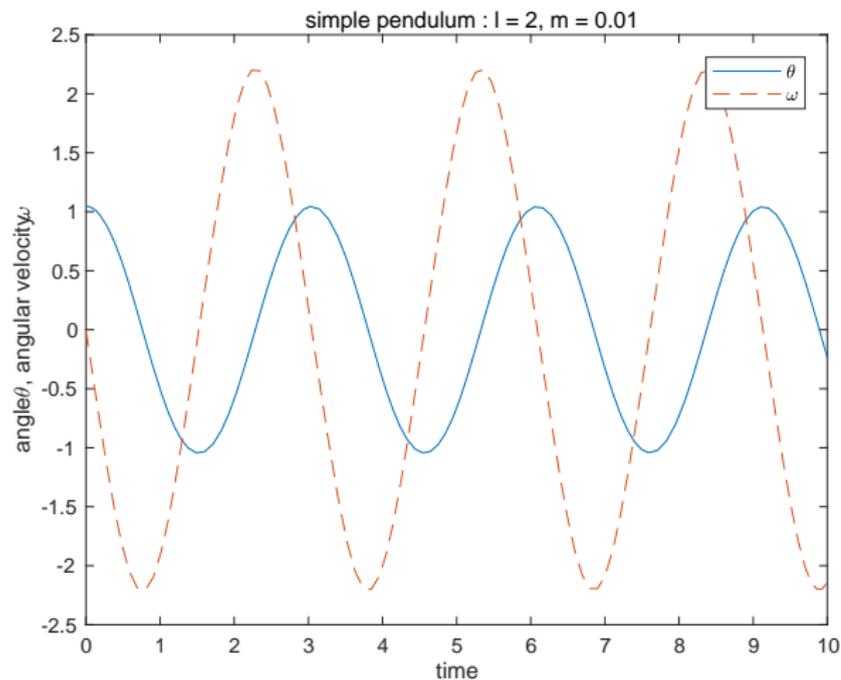
MATLAB

スクリプトファイル pendulum.m

```
interval = 0:0.1:10; % 固定ステップ  
qinit = [pi/3; 0]; % 初期値  
[time, q] = ode45(@pendulum_ode, interval, qinit);
```

可変ステップを指定

```
interval=[0,10]; % 可変ステップ  
qinit = [pi/3; 0]; % 初期値  
[time, q] = ode45(@pendulum_ode, interval, qinit);
```



MATLAB

```
>> time
```

```
time =
```

```
0
```

```
0.0000
```

```
0.0000
```

```
0.0000
```

```
0.0000
```

```
0.0001
```

```
0.0002
```

```
0.0002
```

```
0.0003
```

```
0.0006
```

```
0.0009
```

```
0.0012
```

```
0.0015
```

```
0.0029
```

MATLAB

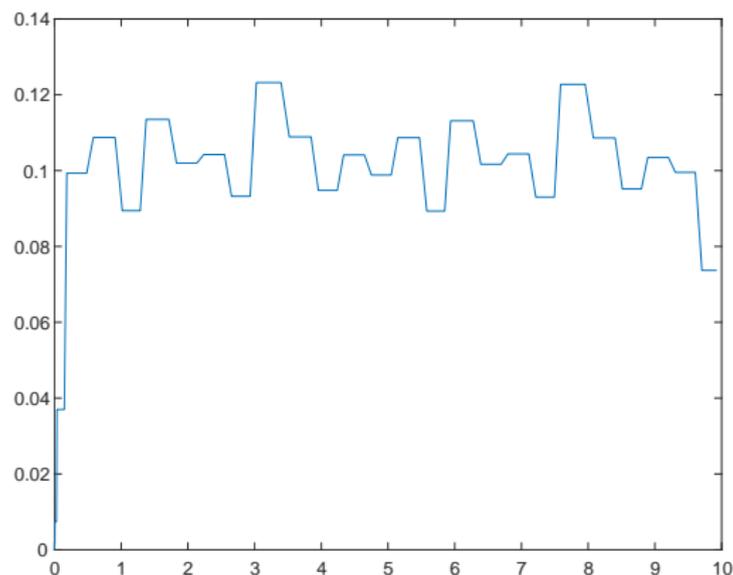
```
>> q
```

```
q =
```

```
1.0472         0
1.0472    -0.0001
1.0472    -0.0001
1.0472    -0.0002
1.0472    -0.0002
1.0472    -0.0005
1.0472    -0.0007
1.0472    -0.0010
1.0472    -0.0012
1.0472    -0.0025
1.0472    -0.0037
1.0472    -0.0050
1.0472    -0.0062
1.0472    -0.0125
```

MATLAB

```
>> sz = size(time); n = sz(1);  
>> dtime = time(2:n) - time(1:n-1);  
>> plot(time(1:n-1), dtime)
```



講義の目標

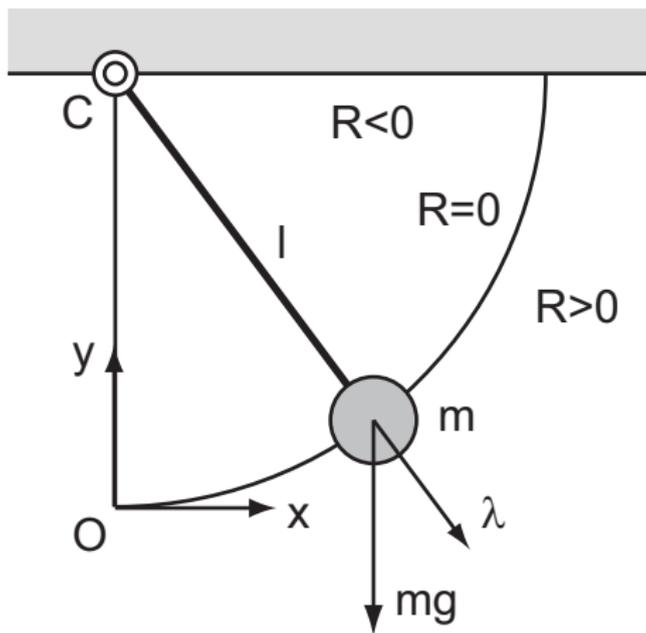
講義の内容

制約を有する常微分方程式
制約安定化法

講義の目標

制約を有する常微分方程式を理解する
制約安定化法で標準形に変換できる

単振り子 (直交座標)



単振り子 (直交座標)

時刻 t における質点の位置 (x, y)

制約

振り子の支点 C から質点までの距離は l に等しい。

$$R(x, y) \triangleq \{x^2 + (y - l)^2\}^{(1/2)} - l = 0$$

$R(x, y)$: 長さの次元. 軌道円の外側で正, 内側で負の値.

勾配ベクトル $[R_x, R_y]^T$

$$R_x(x, y) \triangleq \frac{\partial R}{\partial x} = x \{x^2 + (y - l)^2\}^{(-1/2)}$$

$$R_y(x, y) \triangleq \frac{\partial R}{\partial y} = (y - l) \{x^2 + (y - l)^2\}^{(-1/2)}$$

制約式 $R(x, y) = 0$ が表す円軌跡の外向き法線ベクトル

単振り子 (直交座標)

張力の方向 勾配ベクトル $[R_x, R_y]^T$

張力の大きさ 未知数 λ

質点の運動方程式

$$m\ddot{x} = \lambda R_x(x, y)$$

$$m\ddot{y} = \lambda R_y(x, y) - mg$$

ただし

$$R(x, y) = 0$$

単振り子 (直交座標)

$$v_x \triangleq \dot{x}, \quad v_y \triangleq \dot{y}$$

制約付きの常微分方程式

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$m\dot{v}_x = \lambda R_x(x, y)$$

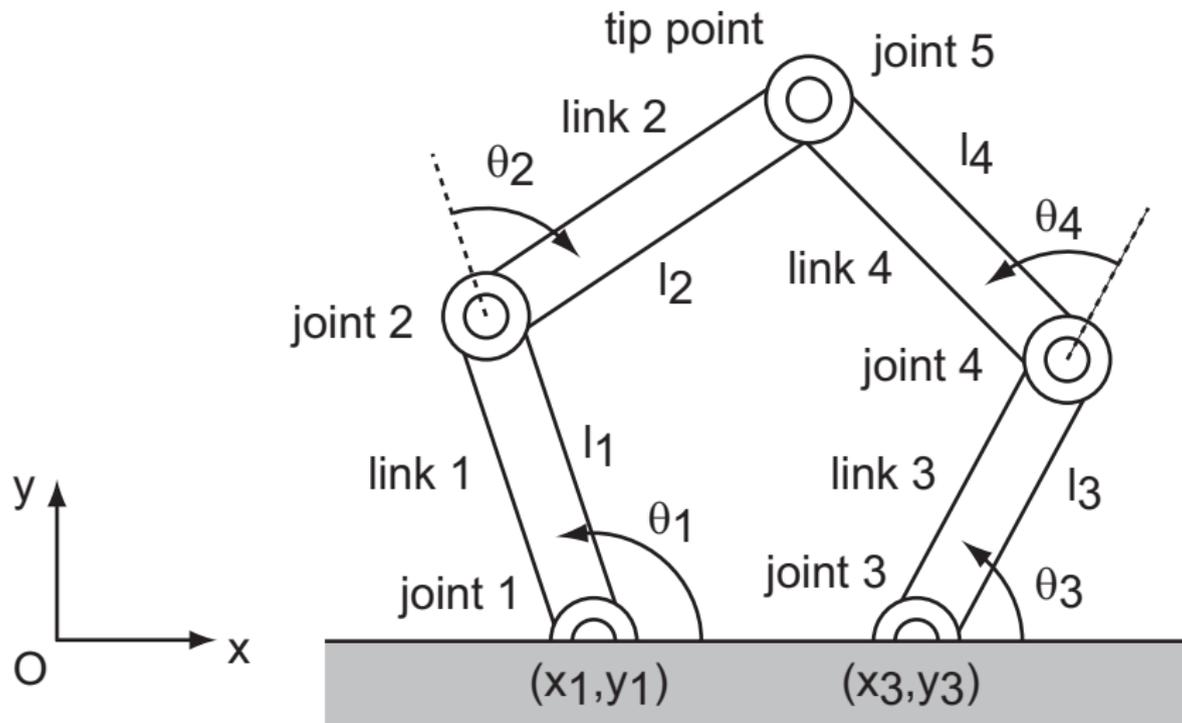
$$m\dot{v}_y = \lambda R_y(x, y) - mg$$

$$R(x, y) = 0$$

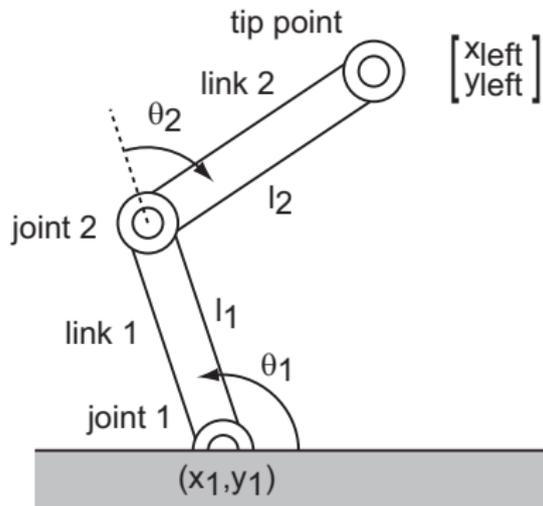
未知変数： x, y, v_x, v_y, λ

4 個の常微分方程式と 1 個の代数方程式

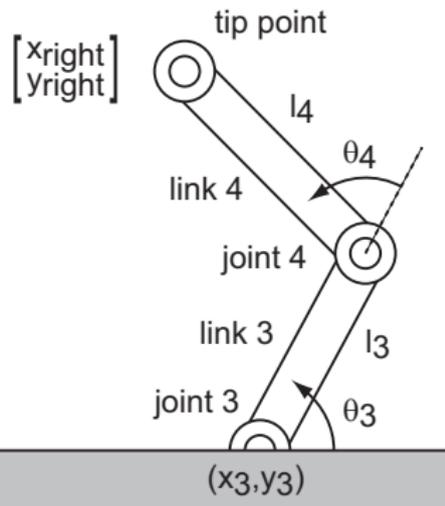
閉リンク機構



閉リンク機構



左アーム



右アーム

閉リンク機構

左アームの端点の座標

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + l_1 \begin{bmatrix} C_1 \\ S_1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} C_{1+2} \\ S_{1+2} \end{bmatrix}$$

||

右アームの端点の座標

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + l_3 \begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \end{bmatrix} + l_4 \begin{bmatrix} C_{3+4} \\ S_{3+4} \end{bmatrix}$$

制約

$$X(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \triangleq l_1 C_1 + l_2 C_{1+2} - l_3 C_3 - l_4 C_{3+4} + x_1 - x_3 = 0$$

$$Y(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \triangleq l_1 S_1 + l_2 S_{1+2} - l_3 S_3 - l_4 S_{3+4} + y_1 - y_3 = 0$$

閉リンク機構

運動方程式

$$H_{11}\dot{\omega}_1 + H_{12}\dot{\omega}_2 = f_1 + \lambda_x(-l_1 S_1 - l_2 S_{1+2}) + \lambda_y(l_1 C_1 + l_2 C_{1+2})$$

$$H_{22}\dot{\omega}_2 + H_{12}\dot{\omega}_1 = f_2 + \lambda_x(-l_2 S_{1+2}) + \lambda_y l_2 C_{1+2}$$

$$H_{33}\dot{\omega}_3 + H_{34}\dot{\omega}_4 = f_3 + \lambda_x(l_3 S_3 + l_2 S_{3+4}) + \lambda_y(-l_3 C_3 - l_4 C_{3+4})$$

$$H_{44}\dot{\omega}_4 + H_{34}\dot{\omega}_3 = f_4 + \lambda_x l_4 S_{3+4} + \lambda_y(-l_4 C_{3+4})$$

ここで

$$f_1 = h_{12}\omega_2^2 + 2h_{12}\omega_1\omega_2 - G_1 - G_{12} + \tau_1, \quad f_2 = -h_{12}\omega_1^2 - G_{12}$$

$$f_3 = h_{34}\omega_4^2 + 2h_{34}\omega_3\omega_4 - G_3 - G_{34} + \tau_3, \quad f_4 = -h_{34}\omega_3^2 - G_{34}$$

閉リンク機構

制約付きの常微分方程式

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1, \quad \dot{\theta}_2 = \omega_2, \quad \dot{\theta}_3 = \omega_3, \quad \dot{\theta}_4 = \omega_4$$

$$H_{11}\dot{\omega}_1 + H_{12}\dot{\omega}_2 = f_1 + \lambda_x(-l_1 S_1 - l_2 S_{1+2}) + \lambda_y(l_1 C_1 + l_2 C_{1+2})$$

$$H_{22}\dot{\omega}_2 + H_{12}\dot{\omega}_1 = f_2 + \lambda_x(-l_2 S_{1+2}) + \lambda_y l_2 C_{1+2}$$

$$H_{33}\dot{\omega}_3 + H_{34}\dot{\omega}_4 = f_3 + \lambda_x(l_3 S_3 + l_2 S_{3+4}) + \lambda_y(-l_3 C_3 - l_4 C_{3+4})$$

$$H_{44}\dot{\omega}_4 + H_{34}\dot{\omega}_3 = f_4 + \lambda_x l_4 S_{3+4} + \lambda_y(-l_4 C_{3+4})$$

$$X(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = 0$$

$$Y(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = 0$$

未知変数： $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \lambda_x, \lambda_y$

8個の常微分方程式と2個の代数方程式

制約安定化法

代数方程式

$$R = 0$$

↓

微分方程式

$$\ddot{R} + 2\alpha\dot{R} + \alpha^2 R = 0$$

α : あらかじめ定める大きい正の定数

数値計算の過程で幾何制約 R が破られる.

⇒ 上式 (臨界減衰の式) により R の値は再び 0 に収束

⇒ 結果的に制約式 $R = 0$ が保たれる.

制約安定化法

$R(x, y)$ の時間微分 \dot{R}

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \frac{\partial R}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= R_x \dot{x} + R_y \dot{y}\end{aligned}$$

偏微分 $R_x(x, y)$ の時間微分

$$\begin{aligned}\dot{R}_x &= \frac{\partial R_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= R_{xx} \dot{x} + R_{xy} \dot{y}\end{aligned}$$

偏微分 $R_y(x, y)$ の時間微分

$$\begin{aligned}\dot{R}_y &= \frac{\partial R_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= R_{yx} \dot{x} + R_{yy} \dot{y}\end{aligned}$$

制約安定化法

$R(x, y)$ の二階時間微分 \ddot{R}

$$\begin{aligned}\ddot{R} &= \dot{R}_x \dot{x} + R_x \ddot{x} + \dot{R}_y \dot{y} + R_y \ddot{y} \\ &= R_x \ddot{x} + R_y \ddot{y} + (R_{xx} \dot{x} + R_{xy} \dot{y}) \dot{x} + (R_{yx} \dot{x} + R_{yy} \dot{y}) \dot{y} \\ &= R_x \ddot{x} + R_y \ddot{y} + \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\ddot{R} + 2\alpha \dot{R} + \alpha^2 R = 0$$

↓

$$-R_x \ddot{x} - R_y \ddot{y} = C(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

ただし

$$C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + 2\alpha(R_x \dot{x} + R_y \dot{y}) + \alpha^2 R$$

制約安定化法

単振り子 (直交座標)

$$m\ddot{x} = \lambda R_x(x, y)$$

$$m\ddot{y} = \lambda R_y(x, y) - mg$$

$$R(x, y) = 0$$

⇓

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$m\dot{v}_x - \lambda R_x(x, y) = 0$$

$$m\dot{v}_y - \lambda R_y(x, y) = -mg$$

$$-R_x \dot{v}_x - R_y \dot{v}_y = C(x, y, v_x, v_y)$$

未知変数 : x, y, v_x, v_y, λ

5 個の常微分方程式

制約安定化法

$$P(x, y) \triangleq \{x^2 + (y - l)^2\}^{(-1/2)}$$

偏微分を計算

$$R_x = xP, \quad R_y = (y - l)P$$

$$R_{xx} = P - x^2P^3, \quad R_{yy} = P - (y - l)^2P^3, \quad R_{xy} = -x(y - l)P^3$$

制約安定化法

$$m\dot{v}_x - \lambda R_x(x, y) = 0$$

$$m\dot{v}_y - \lambda R_y(x, y) = -mg$$

$$-R_x \dot{v}_x - R_y \dot{v}_y = C(x, y, v_x, v_y)$$

⇓

$$\begin{bmatrix} m & 0 & -R_x \\ 0 & m & -R_y \\ -R_x & -R_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ C(x, y, v_x, v_y) \end{bmatrix}$$

状態変数 x, y, v_x, v_y の値を与える。

⇒ 上式左辺の行列の要素と右辺のベクトルの要素の値を計算。

⇒ 連立一次方程式を解き時間微分 \dot{v}_x, \dot{v}_y の値を計算する。

制約安定化法

状態変数ベクトル

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

常微分方程式の標準形

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q})$$

MATLAB

$$m = 0.01, \quad l = 2, \quad g = 9.8$$

初期値 $\theta(0) = (\pi/3)$, $\omega(0) = 0$ に対応する初期値

$$x(0) = l \sin \theta(0), \quad y(0) = l(1 - \cos \theta(0)), \quad v_x(0) = 0, \quad v_y(0) = 0$$

制約付きの常微分方程式を制約安定化法で標準形に変換
得られた標準形を数値的に解く。

MATLAB

関数ファイル pendulumCartesian_ode.m

```
function dotq = pendulumCartesian_ode (t, q)
```

```
% 単振り子 直交座標 標準形
```

```
global len;
```

```
global mass;
```

```
global grav;
```

```
global alpha;
```

```
x = q(1);
```

```
y = q(2);
```

```
vx = q(3);
```

```
vy = q(4);
```

MATLAB

関数ファイル pendulumCartesian_ode.m

```
R = sqrt(x*x + (y-len)*(y-len)) - len;
```

```
P = 1/sqrt(x*x + (y-len)*(y-len));
```

```
Rx = x*P; Ry = (y-len)*P;
```

```
Rxx = P - x^2*P^3;
```

```
Ryy = P - (y-len)^2*P^3;
```

```
Rxy = -x*(y-len)*P^3;
```

```
C = Rxx*vx*vx + Ryy*vy*vy + 2*Rxy*vx*vy + 2*alpha*(Rx*vx
```

MATLAB

関数ファイル pendulumCartesian_ode.m

```
A = [ mass, 0, -Rx; ...  
      0, mass, -Ry; ...  
      -Rx, -Ry, 0 ];  
b = [ 0; -mass*grav; C ];  
d = A\b;  
dotvx = d(1);  
dotvy = d(2);  
dotq = [vx; vy; dotvx; dotvy];  
end
```

MATLAB

スクリプトファイル pendulumCartesian.m

```
global len;  
global mass;  
global grav;  
global alpha;
```

```
len = 2.00;  
mass = 0.01;  
grav = 9.8;
```

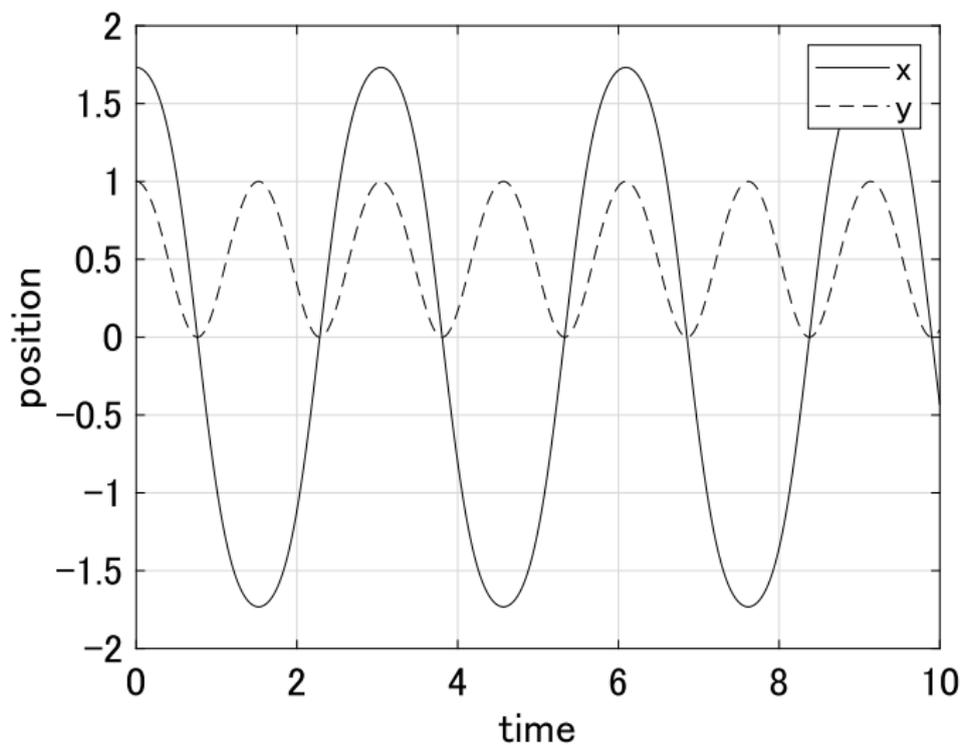
```
alpha = 2000;
```

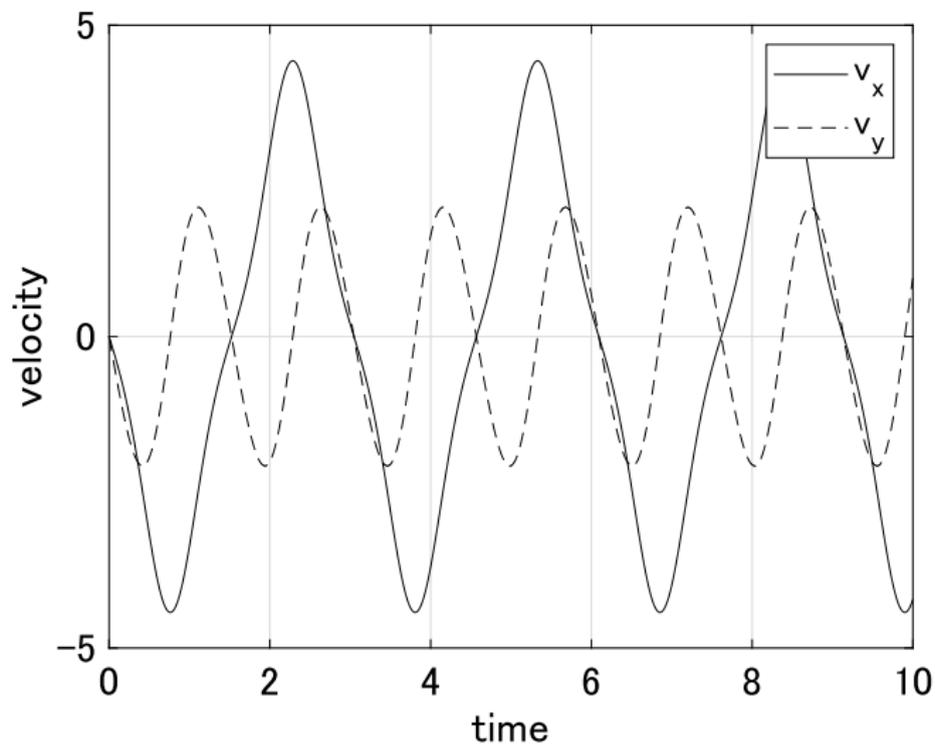
MATLAB

スクリプトファイル pendulumCartesian.m

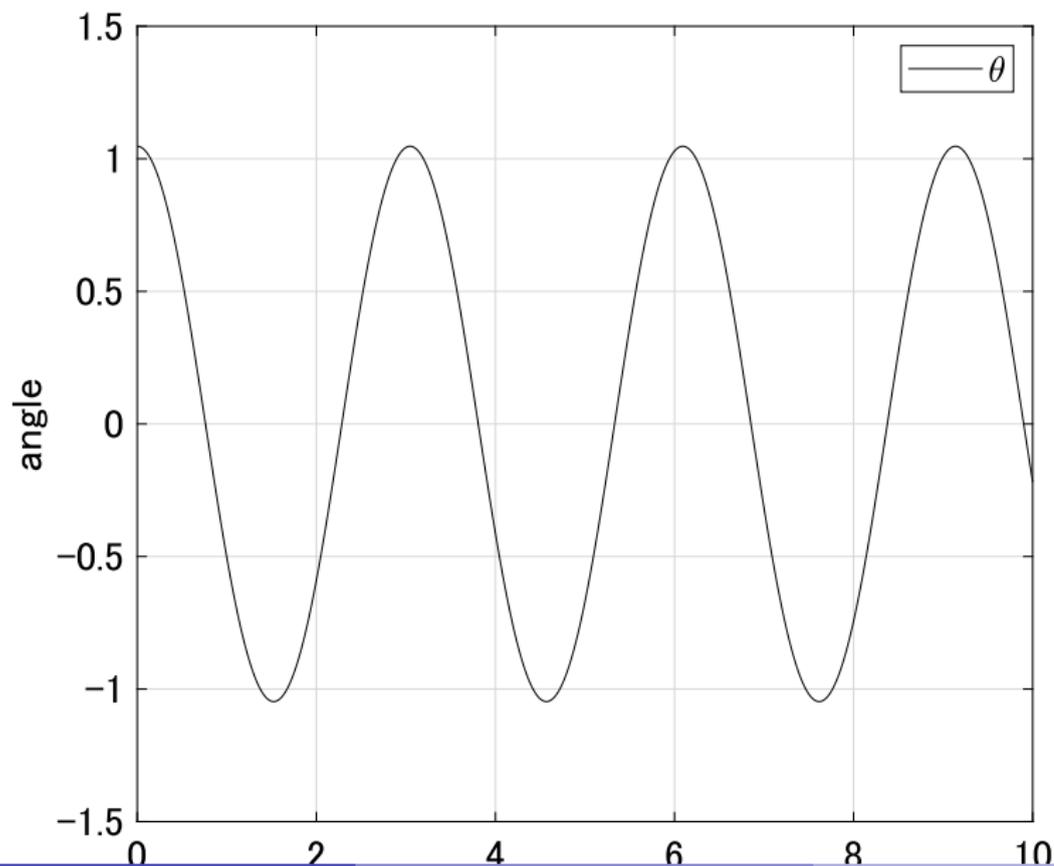
```
%interval=0:0.1:10; % 固定ステップ  
interval = [0,10]; % 可変ステップ  
thetainit = pi/3; % 初期角度  
qinit = [len*sin(thetainit); len*(1-cos(thetainit)); 0; 0];  
[time, q] = ode45(@pendulumCartesian_ode, interval, qinit);
```

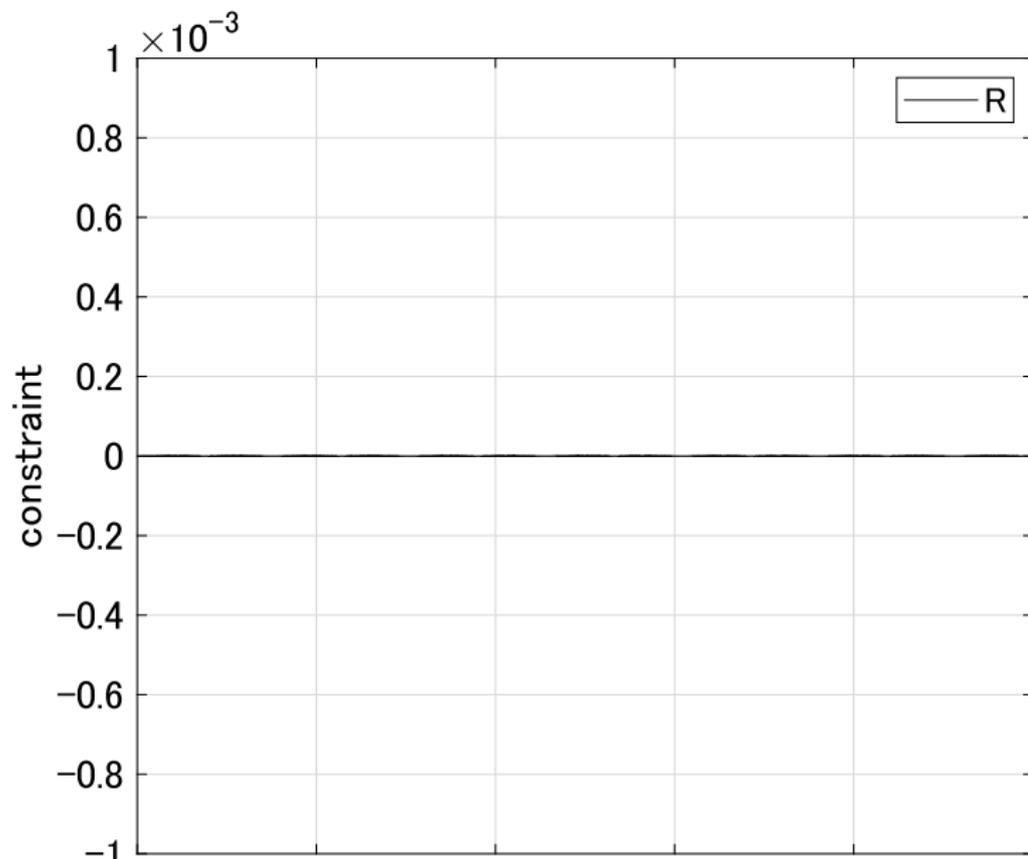
MATLAB



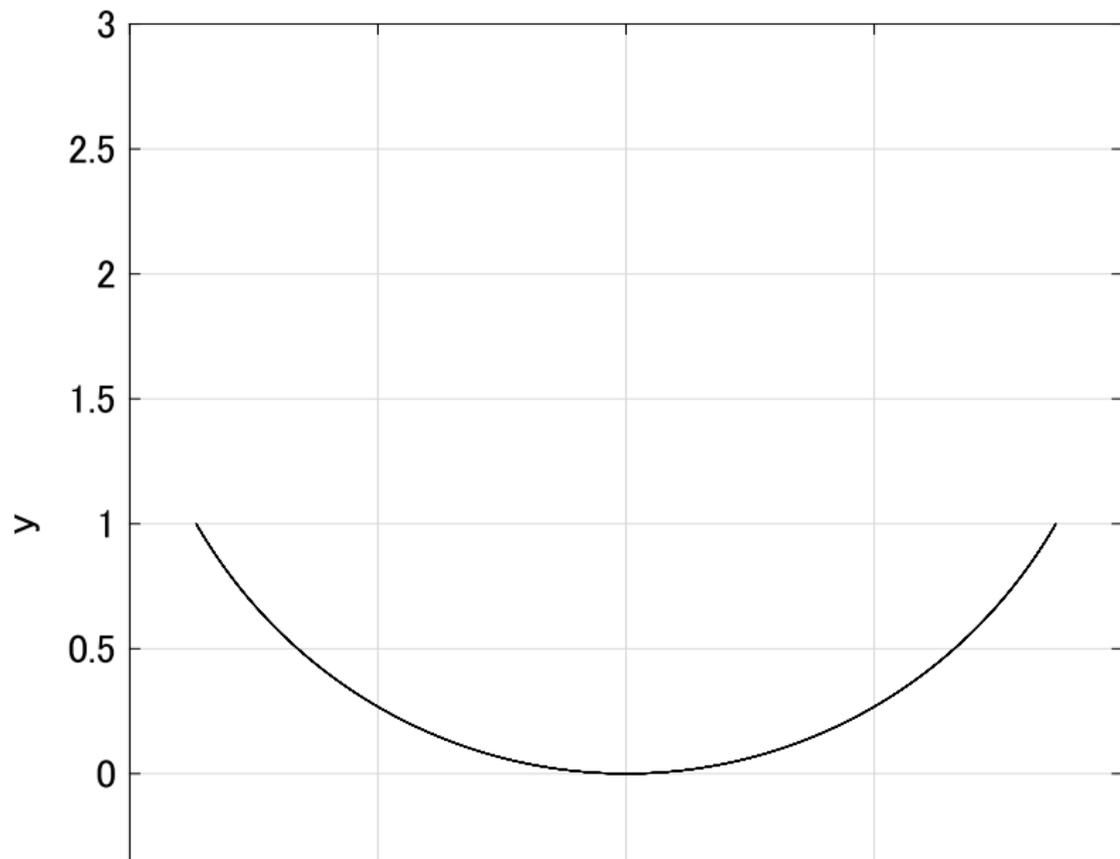


MATLAB





MATLAB



まとめ

常微分方程式の標準形

- 状態変数に関する一階の微分方程式
- 状態変数の値を与えると、その時間微分を計算できる

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q})$$

常微分方程式の数値解法

- 標準形を数値的に解く
- ステップ幅固定：オイラー法，ホイン法，ルンゲ・クッタ法
- ステップ幅可変：ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

制約安定化法

- 制約式を微分方程式に変換

レポート

次の問題に答え， pdf ファイルで moodle+R に提出する．

ファイル名：学籍番号（11桁半角数字）名前（空白なし）.pdf

例えば 12345678901 平井慎一.pdf

12345678901HiraiShinichi.pdf

pdf ファイル以外は採点対象外

レポートにはグラフとプログラムを含める

ワードや写真のファイルは pdf に変換し，アップすること

締切：2026年5月11日（月曜）01:00 AM

レポート

時刻 t に依存する変数 x, y, z に関する常微分方程式

$$\dot{x} = -p(x - y)$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

を, 時間 $[0, 10]$ で解き, x (横軸) と y (縦軸) のグラフ, x (横軸) と z (縦軸) のグラフ, y (横軸) と z (縦軸) のグラフを示せ. ここで, $p = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ は定数である. 変数の初期値は, $[x(0), y(0), z(0)]^T = [4, 4, 4]^T$ とする.