数値計算：連立一次方程式

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

講義の流れ

1. LU 分解
   - LU 分解
   - ピボット型 LU 分解
   - ピボット選択型 LU 分解
   - 組み込み関数
2. コレスキー分解
3. 連立一次方程式
4. まとめ

LU 分解

$$
\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}
$$

下三角行列 (対角要素はすべて 1)　　上三角行列

LU 分解

$$
\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

下三角行列
(対角要素はすべて 1)

上三角行列

LU 分解

$$
\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

下三角行列
(対角要素はすべて 1)

上三角行列

LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列
(対角要素はすべて 1)

上三角行列

LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列
(対角要素はすべて 1)

上三角行列

LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列 (対角要素はすべて 1)

上三角行列

LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列
(対角要素はすべて 1)

上三角行列

LU 分解

$$
\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

下三角行列 (対角要素はすべて 1)　　上三角行列

LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列 上三角行列

(対角要素はすべて 1)

LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列 上三角行列

(対角要素はすべて 1)

LU 分解

下三角行列 (Lower triangle matrix)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

上三角行列 (Upper triangle matrix)

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

LU 分解

任意の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

LU 分解 (LU decomposition)

$$A = LU$$

LU 分解

正方行列 A の要素：9 個

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$$

行列 L の対角要素はすべて 1 $\quad \Longrightarrow \quad$ 未知数 9 個

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} p &= 3 \\ q &= -7 - (-2)p = -1 \\ r &= -2 - (-1)p - 2q = 3 \end{aligned}$$

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 3z = 3 &\Rightarrow z = 1 \\ -2y = -1 - z = -2 &\Rightarrow y = 1 \\ 3x = 3 - (-2)y - (-1)z = 6 &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

ピボット型LU分解

4次の正方行列

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -7 & 5 & -1 \\ 6 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

をLU分解

$$\begin{aligned} A_4 &= L_4 U_4 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ピボット型LU分解

ブロック分割

$$L_4 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline l_{21} & & & \\ l_{31} & & L_3 & \\ l_{41} & & & \end{array}\right]$$

$$U_4 = \left[\begin{array}{c|ccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ \hline & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ \hline & & & \\ & & U_3 & \\ & & & \end{array}\right]$$

ピボット型LU分解

$$L_4 U_4 = \left[\begin{array}{c|c} u_{11} & u_{12} \quad\quad u_{13} \quad\quad u_{14} \\ \hline l_{21} u_{11} & \\ l_{31} u_{11} & \begin{bmatrix} l_{21} \\ l_{31} \\ l_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix} + L_3 U_3 \\ l_{41} u_{11} & \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$u_{11} = 2, \quad u_{12} = 3, \quad u_{13} = -1, \quad u_{14} = 1$$
$$l_{21} u_{11} = -4, \quad l_{31} u_{11} = 6, \quad l_{41} u_{11} = 2$$

$$\begin{bmatrix} l_{21} \\ l_{31} \\ l_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix} + L_3 U_3 = \begin{bmatrix} -7 & 5 & -1 \\ 7 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

ピボット型LU分解

行列 U_4 の1行目の要素 $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$ の値

$$u_{11} = 2, \quad u_{12} = 3, \quad u_{13} = -1, \quad u_{14} = 1$$

行列 L_4 の1列目の要素 l_{21}, l_{31}, l_{41} の値

$$l_{21} = -4/u_{11} = -2, \quad l_{31} = 6/u_{11} = 3, \quad l_{41} = 2/u_{11} = 1$$

$$\begin{aligned} L_3 U_3 &= \begin{bmatrix} -7 & 5 & -1 \\ 7 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ピボット型 LU 分解

3 次の正方行列

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

を LU 分解

$$\begin{aligned} A_3 &= L_3 U_3 \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline l_{32} & 1 & \\ l_{42} & l_{43} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline & u_{33} & u_{34} \\ & & u_{44} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline l_{32} & \\ l_{42} & L_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline & & \\ & U_2 & \end{array}\right] \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

ピボット型LU分解

$$L_3U_3 = \left[\begin{array}{c|cc} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline \begin{matrix} l_{32}u_{22} \\ l_{42}u_{22} \end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} l_{32} \\ l_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{23} & u_{24} \end{bmatrix} + L_2U_2} \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$u_{22} = -1, \quad u_{23} = 3, \quad u_{24} = 1$$
$$l_{32} = (-2)/u_{22} = 2, \quad l_{42} = 2/u_{22} = -2$$

$$L_2U_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A_2$$

ピボット型 LU 分解

2 次の正方行列

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

を LU 分解

$$\begin{aligned} A_2 &= L_2 U_2 \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline l_{43} & L_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} u_{33} & u_{34} \\ \hline & U_1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} u_{33} &= -2, \quad u_{34} = -1 \\ l_{43} &= 2/u_{33} = -1 \end{aligned}$$

$$L_1 U_1 = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = A_1$$

ピボット型 LU 分解

1 次の正方行列

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

を LU 分解

$$\begin{aligned} A_1 &= L_1 U_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$u_{44} = 3$$

ピボット型 LU 分解

計算結果

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ & -1 & 3 & 1 \\ & & -2 & -1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

行列 A_4, A_3, A_2, A_1 の $(1, 1)$ 要素：ピボット
ピボット型 LU 分解

ピボット型LU分解

$$
\begin{aligned}
& L = I_{n\times n}, \quad U = O_{n\times n} \\
& \text{for } k = 1, 2, \cdots, n \\
& \qquad \text{for } j = k, k+1, \cdots, n \\
& \qquad\qquad u_{kj} = a_{kj} \\
& \qquad \text{for } i = k+1, k+2, \cdots, n \\
& \qquad\qquad l_{ik} = \frac{a_{ik}}{u_{kk}} \\
& \qquad \text{for } i = k+1, \cdots, n \\
& \qquad\qquad \text{for } j = k+1, \cdots, n \\
& \qquad\qquad\qquad \mathrm{a}_{ij} = a_{ij} - l_{ik} u_{kj}
\end{aligned}
$$

LU_pivot.m

```
L = eye(n,n); U = zeros(n,n);
for k=1:n
    for j=k:n
        U(k,j) = A(k,j);
    end
    for i=k+1:n
        L(i,k) = A(i,k)/U(k,k);
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - L(i,k)*U(k,j);
        end
    end
end
```

LU_pivot.m

```
>> A
A =
     2    -1    -5
     3    -4     1
    -2     7     3

>> LU_pivot
>> L
L =
    1.0000         0         0
    1.5000    1.0000         0
   -1.0000   -2.4000    1.0000
```

LU_pivot.m

```
>> U
U =
    2.0000   -1.0000   -5.0000
         0   -2.5000    8.5000
         0         0   18.4000

>> L*U
ans =
     2    -1    -5
     3    -4     1
    -2     7     3
```

メモリ節約ピボット型LU分解

a_{ij} の値は l_{ij} あるいは u_{ij} の計算のみに必要
l_{ij} あるいは u_{ij} の計算結果を a_{ij} に格納

行列 U の成分	：	対角成分と対角より上
行列 L の成分	：	対角より下

$$
\begin{aligned}
&\text{for } k = 1, 2, \cdots, n \\
&\quad \text{for } i = k+1, k+2, \cdots, n \\
&\quad\quad a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\
&\quad \text{for } i = k+1, \cdots, n \\
&\quad\quad \text{for } j = k+1, \cdots, n \\
&\quad\quad\quad a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}
\end{aligned}
$$

LU_pivot_memorysaving.m

```
for k=1:n
    for i=k+1:n
        A(i,k) = A(i,k)/A(k,k);
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j);
        end
    end
end
```

LU_pivot_memorysaving.m

```
>> A
A =
     2    -1    -5
     3    -4     1
    -2     7     3

>> LU_pivot_memorysaving
>> A
A =
    2.0000   -1.0000   -5.0000
    1.5000   -2.5000    8.5000
   -1.0000   -2.4000   18.4000
```

計算できない場合

```
>> A
A =
     0    10    20
     2     1    10
    10     0     5

>> LU_pivot_memorysaving
>> A
A =
     0    10    20
   Inf  -Inf  -Inf
   Inf   NaN   NaN
```

計算できない場合

ピボット型 LU 分解は $a_{kk} = 0$ のとき実行できない
a_{kk} の値が 0 から離れている i.e. 絶対値が大きい方が望ましい

$$\Downarrow$$

ピボット選択

a_{kk} の絶対値が最大となるように行列 A の行を入れ替える

ピボット選択型 LU 分解

4 次の正方行列

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -6 \\ 8 & 1 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

においてピボット選択

行列 A_4 の 1 列目の要素で最も絶対値が大きい：$(2, 1)$ 要素の 8

1 行目と 2 行目を交換

$$A_4' = \left[\begin{array}{c|ccc} 8 & 1 & 6 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

ピボット選択型 LU 分解

ピボット型 LU 分解を一段実行

$$
A_4' = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline 0 & * & & \\ -1/4 & * & * & \\ 1/2 & * & * & * \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|ccc} 8 & 1 & 6 & -2 \\ \hline & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{array}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 1/4 & 3/2 & 5/2 \\ -5/2 & -5 & 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ピボット選択型 LU 分解

3 次の正方行列

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 1/4 & 3/2 & 5/2 \\ -5/2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

においてピボット選択

行列 A_3 の 1 列目の要素で最も絶対値が大きい：$(3,1)$ 要素の $-5/2$

1 行目と 3 行目を交換

$$A_3' = \left[\begin{array}{c|cc} -5/2 & -5 & 5 \\ \hline 1/4 & 3/2 & 5/2 \\ 1 & 4 & -6 \end{array}\right]$$

ピボット選択型 LU 分解

ピボット型 LU 分解を一段実行

$$A_3' = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline -1/10 & * & \\ -2/5 & * & * \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} -5/2 & -5 & 5 \\ \hline & * & * \\ & & * \end{array}\right]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3/2 & 5/2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/10 \\ -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ピボット選択型 LU 分解

2 次の正方行列

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

においてピボット選択

行列 A_2 の 1 列目の要素で最も絶対値が大きい：$(2, 1)$ 要素の 2

1 行目と 2 行目を交換

$$A_2' = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -4 \\ \hline 1 & 3 \end{array}\right]$$

ピボット型 LU 分解を一段実行

$$A_2' = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1/2 & * \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & -4 \\ \hline & * \end{array}\right]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

置換行列

行列 A_4 の 1 行目と 2 行目の交換を表す行列

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列 P_{12} を左から乗ずると，1 行目と 2 行目が交換される

$$\begin{bmatrix} 2\text{ 行目} \\ 1\text{ 行目} \\ 3\text{ 行目} \\ 4\text{ 行目} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\text{ 行目} \\ 2\text{ 行目} \\ 3\text{ 行目} \\ 4\text{ 行目} \end{bmatrix}$$

置換行列

行列 A_3 の 1 行目と 3 行目は，A_4 の 2 行目と 4 行目に対応
行列 A_4 の 2 行目と 4 行目の交換を表す行列

$$P_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行列 A_2 の 1 行目と 2 行目は，A_4 の 3 行目と 4 行目に対応
行列 A_4 の 3 行目と 4 行目の交換を表す行列

$$P_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

置換行列

行を交換する過程

$$\begin{bmatrix} 2\text{ 行目} \\ 4\text{ 行目} \\ 1\text{ 行目} \\ 3\text{ 行目} \end{bmatrix} \overset{P_{34}\times}{\Longleftarrow} \begin{bmatrix} 2\text{ 行目} \\ 4\text{ 行目} \\ 3\text{ 行目} \\ 1\text{ 行目} \end{bmatrix} \overset{P_{24}\times}{\Longleftarrow} \begin{bmatrix} 2\text{ 行目} \\ 1\text{ 行目} \\ 3\text{ 行目} \\ 4\text{ 行目} \end{bmatrix} \overset{P_{12}\times}{\Longleftarrow} \begin{bmatrix} 1\text{ 行目} \\ 2\text{ 行目} \\ 3\text{ 行目} \\ 4\text{ 行目} \end{bmatrix}$$

行の交換はまとめて

$$P = P_{34}P_{24}P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と表される.

置換行列

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad P^\top \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$P^{-1} = P^\top$$

ピボット選択型 LU 分解

行を交換した行列 PA が LU 分解できる.

$$PA = LU$$

あるいは

$$A = P^\top LU$$

行列 PA の LU 分解を求める.

ピボット選択型LU分解

行列 A_4' の LU 分解式：

置換 P_{12} は成されている.

置換 P_{24} と P_{34} は成されていない.

$$\Downarrow$$

置換 P_{24} と P_{34} を適用する必要がある.
LU 分解に置換行列を左から乗ずる：下三角行列の行が交換される.
行列 A_4' の LU 分解式：
下三角行列の要素の列に，置換 P_{24} と P_{34} を適用

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/4 \end{bmatrix} \underset{\Longleftarrow}{P_{34}\times} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/4 \\ 0 \end{bmatrix} \underset{\Longleftarrow}{P_{24}\times} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

ピボット選択型LU分解

行列 A'_3 の LU 分解式：

置換 P_{12} と P_{24} は成されている．

置換 P_{34} は成されていない．

$$\Downarrow$$

置換 P_{34} を適用する必要がある．

行列 A'_3 の LU 分解式：

下三角行列の要素の列に，置換 P_{34} を適用

$$\begin{bmatrix} \\ 1 \\ -2/5 \\ -1/10 \end{bmatrix} \overset{P_{34}\times}{\Longleftarrow} \begin{bmatrix} \\ 1 \\ -1/10 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

ピボット選択型LU分解

行列 A_2' の LU 分解式：

置換 P_{12}, P_{24}, P_{34} は成されている．

$$\Downarrow$$

置換を適用する必要はない．

$$\begin{bmatrix} \\ \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

ピボット選択型 LU 分解

行列 PA の LU 分解

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ 0 & -2/5 & 1 & \\ -1/4 & -1/10 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 & -2 \\ & -5/2 & -5 & 5 \\ & & 2 & -4 \\ & & & 5 \end{bmatrix}$$

ピボット選択型 LU 分解

$$L = I_{n\times n}, \quad U = O_{n\times n}$$

for $k = 1, 2, \cdots, n$

　ピボット選択

　行列 A と L の更新

　for $j = k, k+1, \cdots, n$

$$u_{kj} = a_{kj}$$

　for $i = k+1, k+2, \cdots, n$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}}{u_{kk}}$$

　for $i = k+1, \cdots, n$

　　for $j = k+1, \cdots, n$

$$a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}u_{kj}$$

ピボット選択型LU分解

ピボット選択

$$
\begin{aligned}
& p = k \\
& \text{for } j = k+1, k+2, \cdots, n \\
& \qquad \text{if } |a_{kp}| < |a_{kj}| \text{ then } p = j
\end{aligned}
$$

行列 A と L の更新

$$
\begin{aligned}
& \text{for } j = k, k+1, \cdots, n \\
& \qquad a_{kj} \text{ の値と } a_{pj} \text{ の値を交換} \\
& \text{for } j = 1, 2, \cdots, k-1 \\
& \qquad l_{kj} \text{ の値と } l_{pj} \text{ の値を交換}
\end{aligned}
$$

置換行列の表現

行の交換を示す整数配列 index
初期状態 index $= [1,\ 2,\ \cdots,\ n]^\top$
k 行と p 行を交換したとき，index(k) の値と index(p) の値を交換

置換行列 P

$$P_{k,\mathrm{index}(k)} = 1 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

これ以外の要素の値は 0

index $= [2,\ 4,\ 1,\ 3]^\top$ のとき

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

LU_pivot_select.m

```
L = eye(n,n);
U = zeros(n,n);
index = 1:n;

for k=1:n
    p = k; max = abs(A(k,k));
    for j=k+1:n
        if (max < abs(A(k,j)))
            p = j; max = abs(A(k,j));
        end
    end
    for j=k:n
        A([k,p],j) = A([p,k],j);
    end
```

LU_pivot_select.m

```
for j=1:k-1
    L([k,p],j) = L([p,k],j);
end
index([k,p]) = index([p,k]);
for j=k:n
    U(k,j) = A(k,j);
end
for i=k+1:n
    L(i,k) = A(i,k)/U(k,k);
end
```

LU_pivot_select.m

```
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - L(i,k)*U(k,j);
        end
    end
end

P = zeros(n,n);
for k=1:n
    P(k,index(k)) = 1;
end
```

LU_pivot_select.m

```
>> A
A =
     0    10    20
     2     1    10
    10     0     5

>> LU_pivot_select
>> L
L =

    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
    0.2000    0.1000    1.0000
```

LU_pivot_select.m

```
>> U
U =
    10     0     5
     0    10    20
     0     0     7

>> L*U
ans =

    10     0     5
     0    10    20
     2     1    10
```

LU_pivot_select.m

```
>> P
P =
     0     0     1
     1     0     0
     0     1     0

>> P'*L*U
ans =
     0    10    20
     2     1    10
    10     0     5
```

LU_pivot_select_memorysaving.m

```
index = 1:n;

for k=1:n
    p = k; max = abs(A(k,k));
    for j=k+1:n
        if (max < abs(A(k,j)))
            p = j; max = abs(A(k,j));
        end
    end
    for j=1:n
        A([k,p],j) = A([p,k],j);
    end
    index([k,p]) = index([p,k]);
```

LU_pivot_select_memorysaving.m

```
    for i=k+1:n
        A(i,k) = A(i,k)/A(k,k);
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j);
        end
    end
end

P = zeros(n,n);
for k=1:n
    P(k,index(k)) = 1;
end
```

関数 lu

ファイル lu_decompose.m

```
A = [ 2, -1, -5;...
      3, -4,  1;...
     -2,  7,  3 ];
[L,U,P] = lu(A);
```

$$\Rightarrow \qquad PA = LU \quad \text{or} \quad A = P^\top LU$$

関数 lu

```
>> lu_decompose
>> L

L =
    1.0000         0         0
   -0.6667    1.0000         0
    0.6667    0.3846    1.0000
```

関数 lu

```
>> U

U =
    3.0000   -4.0000    1.0000
         0    4.3333    3.6667
         0         0   -7.0769

>> P

P =
     0     1     0
     0     0     1
     1     0     0
```

関数 lu

```
>> A

A =
     2    -1    -5
     3    -4     1
    -2     7     3

>> P'*L*U

ans =
     2    -1    -5
     3    -4     1
    -2     7     3
```

コレスキー分解

コレスキー分解 (Cholesky decomposition)

正定対称行列 A

$$\Downarrow$$

下三角行列 L

$$A = LL^\top$$

or

上三角行列 U

$$A = U^\top U$$

LU 分解の特別な場合

コレスキー分解

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 3 & & \\ -1 & 1 & 1 & \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ & 3 & 1 & -2 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

正定対称行列

正定

二次形式が正 ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のときのみ 0)

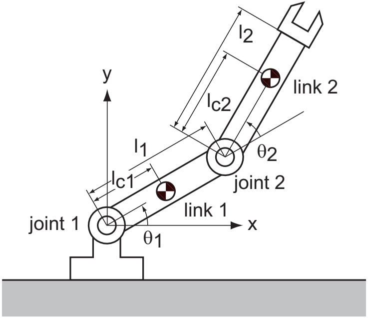
$$\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0, \qquad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

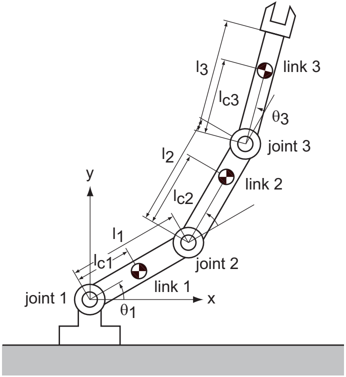
対称

$$a_{ij} = a_{ji}$$

正定対称行列

慣性行列





$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{23} \end{bmatrix}$$

コレスキー分解

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

行列 A の独立な要素：10 個 (対角要素 4 個，非対角要素 ${}_4C_2 = 6$ 個)

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

行列 U の未知要素：10 個 (対角要素 4 個，非対角要素 ${}_4C_2 = 6$ 個)

コレスキー分解

4 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{12} & u_{22} & & \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$u_{11}{}^2 = a_{11} \Longrightarrow u_{11} = (a_{11})^{1/2} = 2$$

$$u_{11} u_{12} = a_{12} \Longrightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = 1$$

$$u_{11} u_{13} = a_{13} \Longrightarrow u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = -1$$

$$u_{11} u_{14} = a_{14} \Longrightarrow u_{14} = \frac{a_{14}}{u_{11}} = 1$$

コレスキー分解

4 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{12} & u_{22} & & \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Longleftarrow \begin{bmatrix} 10 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -5 & -4 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

コレスキー分解

3 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{22} & & \\ u_{23} & u_{33} & \\ u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & u_{33} & u_{34} \\ & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$u_{22}{}^2 = a_{22} \Longrightarrow u_{22} = (a_{22})^{1/2} = 3$$

$$u_{22} u_{23} = a_{23} \Longrightarrow u_{23} = \frac{a_{23}}{u_{22}} = 1$$

$$u_{22} u_{24} = a_{24} \Longrightarrow u_{24} = \frac{a_{24}}{u_{22}} = -2$$

コレスキー分解

3 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{22} & & \\ u_{23} & u_{33} & \\ u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & u_{33} & u_{34} \\ & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Longleftarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

コレスキー分解

2 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{33} & \\ u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{33} & u_{34} \\ & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$u_{33}{}^2 = a_{33} \Longrightarrow u_{33} = (a_{33})^{1/2} = 1$$

$$u_{33} u_{34} = a_{34} \Longrightarrow u_{34} = \frac{a_{34}}{u_{33}} = -1$$

コレスキー分解

2 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{33} & \\ u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{33} & u_{34} \\ & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{44} \end{bmatrix} &\Longleftarrow \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

コレスキー分解

1 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

$${u_{44}}^2 = a_{44} \Longrightarrow u_{44} = (a_{44})^{1/2} = 2$$

コレスキー分解

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 3 & & \\ -1 & 1 & 1 & \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ & 3 & 1 & -2 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

コレスキー分解のアルゴリズム

$$
\begin{aligned}
& L = O_{n\times n} \\
& \text{for } k = 1, 2, \cdots, n \\
& \quad u_{kk} = (a_{kk})^{1/2} \\
& \quad \text{for } i = k+1, k+2, \cdots, n \\
& \quad\quad u_{ki} = \frac{a_{ki}}{u_{kk}} \\
& \quad \text{for } i = k+1, k+2, \cdots, n \\
& \quad\quad \text{for } j = k+1, k+2, \cdots, n \\
& \quad\quad\quad a_{ij} = a_{ij} - u_{ki}u_{kj}
\end{aligned}
$$

cholesky.m

```
U = zeros(n,n);

for k=1:n
    U(k,k) = sqrt(A(k,k));
    for i=k+1:n
        U(k,i) = A(k,i)/U(k,k);
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - U(k,i)*U(k,j);
        end
    end
end
```

cholesky.m

```
>> A
A =
     4     2    -2     2
     2    10     2    -5
    -2     2     3    -4
     2    -5    -4    10

>> cholesky
>> U
U =
     2     1    -1     1
     0     3     1    -2
     0     0     1    -1
     0     0     0     2
```

cholesky.m

```
>> U'*U
ans =
     4     2    -2     2
     2    10     2    -5
    -2     2     3    -4
     2    -5    -4    10
```

cholesky_memorysaving.m

a_{ij} の値は u_{ij} の計算のみに必要　u_{ij} の計算結果を a_{ij} に格納
行列 U の成分：行列 A の対角成分と対角より上に格納

```
for k=1:n
    A(k,k) = sqrt(A(k,k));
    for i=k+1:n
        A(k,i) = A(k,i)/A(k,k);
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - A(k,i)*A(k,j);
        end
    end
end
```

cholesky_memorysaving.m

```
>> A
A =
     4     2    -2     2
     2    10     2    -5
    -2     2     3    -4
     2    -5    -4    10

>> cholesky_memorysaving
>> A
A =
     2     1    -1     1
     2     3     1    -2
    -2     3     1    -1
     2    -6    -1     2
```

関数 chol

ファイル cholesky_decompose.m

```
A = [ 4,  2,  -2,  2;...
      2, 10,   2, -5;...
     -2,  2,   3, -4;...
      2, -5, -4, 10 ];
[U] = chol(A);
```

関数 chol

```
>> cholesky_decompose
>> U
U =
     2     1    -1     1
     0     3     1    -2
     0     0     1    -1
     0     0     0     2

>> U'*U
ans =
     4     2    -2     2
     2    10     2    -5
    -2     2     3    -4
     2    -5    -4    10
```

コレスキー分解による正定性の判定

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$u_{11}^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad u_{11} = 1 \qquad u_{12}u_{11} = 3 \quad \Longrightarrow \quad u_{12} = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$3^2 + u_{22}^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad u_{22}^2 = -4$$

行列は正定でない

$\Downarrow$

コレスキー分解できない

対称行列にコレスキー分解のアルゴリズムを適用
$\Longrightarrow$ 行列が正定か否かを判定することができる

連立一次方程式を解く

連立一次方程式を解く

```
>> A = [ 3,  2, -2;...
         6,  2, -1;...
        -3, -8,  7 ];
>> b = [ 1; 3; 6 ];
>> A\b

ans =

    1.0000
   -2.0000
   -1.0000
```

連立一次方程式を解く

```
>> A\b
```

Step 1	行列 A が三角行列であるかを調べる 三角行列である場合，三角行列用の計算を実行
Step 2	行列 A が対称である場合，コレスキー分解を実行 可能ならばコレスキー分解を用いて連立一次方程式を解く
Step 3	コレスキー分解に失敗した場合は，LU 分解を実行 LU 分解を用いて連立一次方程式を解く

$$\Downarrow$$

オペレータ\は効率が良くない
LU 分解を明示的に実行 (ファイル le_solve_LU.m)
コレスキー分解を明示的に実行 (係数行列が正定対称の場合)
(ファイル le_solve_Cholesky.m)

連立一次方程式を解く

LU 分解を用いて連立一次方程式を解く

$$PA = LU$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$
$$LU\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$L\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{b}$　最初の式から解き $\boldsymbol{y}$ を求める

$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$　最後の式から解き $\boldsymbol{x}$ を求める

le_solve_LU.m

ファイル le_solve_LU.m

```
A = [ 3,  2, -2;...
      6,  2, -1;...
     -3, -8,  7 ];
b = [ 1; 3; 6 ];
[L,U,P] = lu(A);
y = L\(P*b);
x = U\y;
x
```

le_solve_LU.m

```
>> le_solve_LU

x =

    1.0000
   -2.0000
   -1.0000
```

連立一次方程式を解く

コレスキー分解を用いて連立一次方程式を解く

$$M = U^\top U$$

$$M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$$U^\top U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\Downarrow$$

$U^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$　最初の式から解き $\boldsymbol{y}$ を求める

$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$　最後の式から解き $\boldsymbol{x}$ を求める

le_solve_Cholesky.m

ファイル le_solve_Cholesky.m

```
M = [ 4,  -2, -2;...
     -2,  2,  0;...
     -2,  0,  3 ];
b = [ 2; 2; -5 ];
U = chol(M);
y = U'\b;
x = U\y;
x
```

le_solve_Cholesky.m

```
>> le_solve_Cholesky

x =

     1
     2
    -1
```

まとめ

LU 分解

正方行列 A を下三角行列 L と上三角行列 U の積で表す

$$
\begin{aligned}
A &= LU \\
PA &= LU (\text{ピボット選択：置換行列 } P)
\end{aligned}
$$

コレスキー分解

正定対称行列 A

$$A = LL^\top \qquad A = U^\top U$$

線形計算

LU 分解/コレスキー分解を用いて連立一次方程式を解く

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「連立一次方程式」
締切：2026 年 6 月 1 日（月曜）01:00 AM